共形映射与边值问题

闻国椿 编著

共形映射与边值问题

闻国椿 编著

高等教育出版社

本书是作者在长期的教学和科研的基础上编写成的。内容包括共形映射与边值问题两部分，全书分为六章和两个附录。前三章的内容主要讲述解析函数、下调和函数与单叶亚纯函数的一些性质，以及把一般区域共形映射到各种标准区域的基本定理与积分表示式。后三章的内容主要讲述单连通区域与多连通区域上解析函数与调和函数的各种基本边值问题，其中也包括了作者处理边值问题的一些新方法和新结果。而附录则介绍了拟共形映射与偏微分方程、边值问题与积分方程之间的一些联系。

本书在内容的选取上，既考虑到理论的重要程度，又考虑到实际应用的需要；在定理的证明上，也注意了方法的典型性与推理的严格性。每章还配有一定数量的习题，可作为高等学校数学系高年级学生和研究生选修课的教材，也可供高等学校数学教师及从事于复变函数应用的科技工作者参考。

责任编辑　丁鹤龄

共形映射与边值问题

闻国椿　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

顺义永利印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.25　字数 274,000

1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷

印数 00,001—03,700

书号 13010・01119　定价 2.60 元

序

共形映射与边值问题是复变函数论的两个重要分支，前者是解析函数的几何理论，后者则是与许多实际问题密切相关的复变理论，而共形映射与边值问题之间在理论上又存在着一定的联系.

本书前三章的主要内容是讲述一般有限连通区域共形映射到各类标准区域的存在唯一性定理，讨论单叶解析函数的一些性质，并给出共形映射函数的具体表示式. 关于获得上述结果所使用的方法是多种多样的，如证明有限连通区域共形映射到标准区域的存在性主要是求解极值问题、应用解析函数的变态 **Dirichlet** 问题以及使用连续性方法，直线多角形与圆弧多角形到上半平面或单位圆的共形映射函数具体表示式是用解析开拓的方法得到的，关于解析函数序列收敛性的结果也是共形映射许多定理证明中的重要工具.

本书的后三章较详细地介绍多连通区域上解析函数的基本边值问题(联结边值问题与 **Hilbert** 边值问题等)及调和函数的各种边值问题(第一、第二、第三与混合边值问题及非正则斜微商边值问题). 这里我们没有使用研究边值问题常用的积分方程方法，而是先用下调和函数或共形映射的方法证明多连通区域上调和函数 Dirichlet 边值问题解的存在性，然后在对边值问题的解作出先验估计的基础上，使用连续性方法与其它方法证明前述解析函数 Hilbert 边值问题的可解性，并且我们也给出了这种边值问题解的积分表示式. 至于解析函数的联结边值问题，这里仍使用哥西(Cauchy) 型积分的常用方法. 关于调和函数一些边值问题解的存在性的证明，主要依赖于上述解析函数边值问题的可解性结果，

其中也讨论了一种新的混合边值问题，这种边值问题把通常调和函数第三边值问题边界条件中方向微商的方向改进到较一般的情形.

为了便于读者了解共形映射理论与某些边值问题间的相互联系，我们在各章中都对这个问题作了说明. 另外，我们还写了两个附录，简单介绍了拟共形映射以及边值问题与奇异积分方程的一些联系. 在本书中，我们还选了一些习题，以供读者课外练习.

本书是作者在长期教学和科学研究的基础上编写成的. 书中的大部分内容曾数次作为北京大学数学系高年级学生与研究生的选修课或专门化课程的教材. 在教学实践的过程中，听取了许多有益的意见和建议，作了多次的修改. 应当特别提出的是：庄圻泰、路见可两位教授，以及戴中维、陈方权、黄沙、田茂英、吴志坚等同志对本书原稿提出了不少宝贵的改进意见，使本书的内容得到进一步的改善，我在此谨向他们表示衷心的感谢. 限于编者的水平，书中定有不妥之处，欢迎读者批评、指正.

闻国椿于北京大学

1984 年 5 月

目　　录

第一章　解析函数与调和函数的一些性质

本章的内容是以后各章讨论共形映射与边值问题的基本工具．这里我们将先给出解析函数序列与调和函数序列的收敛性定理，进而介绍下调和函数的一些性质，然后使用下调和函数的方法，讨论调和函数与解析函数 Dirichlet 边值问题的可解性．

§1. 解析函数序列的收敛性

大家知道：对于 z 平面上任一个有界数列$\{z_n\}$，总可以选出一个收敛的子序列$\{z_{n_k}\}$，其极限是一个有限数．至于区域D内的解析函数序列$\{f_n(z)\}$，是否有类似的结论呢？或者说，对于$\{f_n(z)\}$加上什么样的条件，就能从中选出一个子序列$\{f_{n_k}(z)\}$来，使得在D内收敛到一个解析函数呢？

为了回答上述问题，先引入两个定义．

定义1.1. 设 $A=\{f(z)\}$ 是定义在 z 平面上的点集E上的一个函数族．如果存在一个正数M，对于A中所有的函数 $f(z)$，都有$|f(z)|<M$(当 $z\in E$)，则称此函数族A在E上是一致有界的．如果函数族$A=\{f(z)\}$定义在区域D内，又在每一个闭集$E\subset D$上一致有界，则称族A在D中内闭一致有界．

定义1.2. 设 $A=\{f(z)\}$是区域D内的一个解析函数族，如果对于A中任一个函数序列$\{f_n(z)\}$，都含有在D中内闭一致收敛于一个解析函数的子序列$\{f_{n_k}(z)\}$，则称族A在D中是列紧的．所谓 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在D中内闭一致收敛，即对于每一个闭集 $E\subset D$，$\{f_{n_k}(z)\}$都一致收敛．

根据 Weierstrass 关于解析函数序列的一致收敛性定理，在

定义 1.2 中，如果$\{f_{n_k}(z)\}$在D中内闭一致收敛，那么必内闭一致收敛到一个解析函数，因而也在D中收敛到这个解析函数. 容易了解：函数序列在D中内闭的一致收敛性较弱于在D中的一致收敛性.

现在回到原来的问题. 如果在区域D内的解析函数序列$\{f_n(z)\}$没有一致有界性的条件，则在$\{f_n(z)\}$中可能选不出在D内收敛的子序列. 例如，在$|z|<2$内的解析函数序列：

$$z, z^2, \cdots, z^n, \cdots,$$

它在$|z|<1$中内闭一致收敛于 0，也在$|z|<1$内收敛于 0，而在$1<|z|<2$，它发散，趋于∞. 但是，我们有以下定理.

定理 1.1 (Montel). 设$\{f_n(z)\}$是区域D内的解析函数序列，且在D中内闭一致有界，则$\{f_n(z)\}$在D中具有列紧性.

证 (1) 先证明：对于每一个给定的有界闭集$E\subset D$，解析函数序列$\{f_n(z)\}$在E上是同等连续的，即任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当E上的任二点z_1、z_2满足$|z_1-z_2|<\delta$时，对于$n=1, 2, \cdots$，都有

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon.$$

事实上，E与D的边界之距离不小于正数η. 设E_1是与E的距离不超过$\frac{\eta}{2}$的所有点的集合，显然$E\subset E_1$，且E_1是D中的一闭集. 由定理的条件，$\{f_n(z)\}$在E_1上一致有界，故有正数M，使当$z\in E_1$，有$|f_n(z)|<M, n=1, 2, \cdots$. 任取一对点$z_1$、$z_2\in E$，且$|z_1-z_2|<\frac{\eta}{4}$. 设$K$是以$z_1$为中心、$\frac{\eta}{2}$为半径的圆，其边界为$\gamma$，自然$K+\gamma\subset E_1$，由哥西(Cauchy)公式，对于$n=1, 2, \cdots$，

$$f_n(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(t)}{t-z_1}dt,$$

$$f_n(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(t)}{t-z_2}dt,$$

因而

$$\begin{aligned}|f_n(z_1)-f_n(z_2)|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(t)(z_1-z_2)}{(t-z_1)(t-z_2)}dt\right|\\&\leqslant\frac{\eta}{2}\operatorname*{Max}_{t\in\gamma}\left|\frac{f_n(t)(z_1-z_2)}{(t-z_1)(t-z_2)}\right|\\&\leqslant\frac{\eta}{2}\cdot\frac{M|z_1-z_2|}{\frac{\eta}{2}\cdot\frac{\eta}{4}}=\frac{4M}{\eta}|z_1-z_2|.\end{aligned}$$

取 $\delta=\min\left(\frac{\eta}{4},\frac{\eta}{4M}\varepsilon\right)$，则当 z_1、$z_2\in E$，且 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，有

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\varepsilon, n=1, 2, \cdots,$$

故 $\{f_n(z)\}$ 在 E 上是同等连续的.

(2) 其次证明：从 $\{f_n(z)\}$ 中可以选出子函数序列在 D 中的全部有理点上收敛.

有理点即纵坐标与横坐标都是有理数的点. 我们把 D 中全部有理点排成序列：$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$. 先从有界数列 $\{f_n(r_1)\}$ 中选出一个收敛子序列 $\{f_{n,1}(r_1)\}$，与其对应的函数序列为 $\{f_{n,1}(z)\}$，它在 $z=r_1$ 收敛. 然后从有界数列 $\{f_{n,1}(r_2)\}$ 中又可选出一个收敛子序列 $\{f_{n,2}(r_2)\}$，与其对应的函数序列为 $\{f_{n,2}(z)\}$，它在 $z=r_1$、r_2 收敛. 依此类推，有 $\{f_n(z)\}$ 的子函数序列 $\{f_{n,3}(z)\}$，$\cdots$，$\{f_{n,m}(z)\}$，$\cdots$，而 $\{f_{n,m}(z)\}$ 在 $z=r_1, \cdots, r_m$ 上收敛. 将以上依次选取的子函数序列写成

$$\begin{array}{l}f_{1,1}(z), f_{2,1}(z), \cdots, f_{n,1}(z), \cdots\\f_{1,2}(z), f_{2,2}(z), \cdots, f_{n,2}(z), \cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_{1,m}(z), f_{2,m}(z), \cdots, f_{n,m}(z), \cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

$$f_{1,n}(z), f_{2,n}(z), \cdots, f_{n,n}(z), \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

取对角线序列 $f_{1,1}(z), f_{2,2}(z), \cdots, f_{n,n}(z), \cdots$，它除前面 $m-1$ 个函数外，都包含在序列$\{f_{n,m}(z)\}$中，因此 $\{f_n(z)\}$ 的子函数序列$\{f_{n,n}(z)\}$在D中全部有理点：$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$上收敛.

（3）现在要证上面所得的子函数序列$\{f_{n,n}(z)\}$在任一有界闭集 $E\subset D$ 上是一致收敛的.

根据有限覆盖定理，总可以由在D中的有限个闭正方形覆盖E，不妨设每个正方形含有E中的点，记 E_2 为这些正方形点集之和集.

由前所证：$\{f_{n,n}(z)\}$在 E_2 上是同等连续的，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 E_2 中任二点 z_1、z_2，满足$|z_1-z_2|<\delta$时，有

(1.1) $$|f_{n,n}(z_1)-f_{n,n}(z_2)|<\frac{\varepsilon}{3}, n=1, 2, \cdots.$$

自然，我们还可将 E_2 分解成有限个各边长为$\frac{\delta}{2}$的正方形之和集，从每个这样的正方形，取一个有理点，故得有限个有理点 $r_1, r_2, \cdots, r_p$. 函数序列$\{f_{n,n}(z)\}$在这些点 $r_1, r_2, \cdots, r_p$ 是收敛的，即对于 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N>0$，当 m、$n>N$ 时，有

(1.2) $$|f_{m,m}(r_k)-f_{n,n}(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3}, k=1, 2, \cdots, p.$$

在每边之长为$\frac{\delta}{2}$的正方形中任取一个正方形 K，K 中必含有某一个 $r_k(1\leqslant k\leqslant p)$. 对 $z\in K$，有$|z-r_k|<\frac{\delta}{2}\sqrt{2}<\delta$，故由(1.1)式，得

(1.3) $$\begin{aligned}&|f_{m,m}(z)-f_{m,m}(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3},\\&|f_{n,n}(z)-f_{n,n}(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

从(1.2)与(1.3)式，当 m、$n>N$ 时，有

$$|f_{m,m}(z)-f_{n,n}(z)|<\varepsilon.$$

由于N与K中的点 z 无关，所以 $f_{n,n}(z)\,(n=1,2,\cdots)$ 在K上一致收敛，因而$\{f_{n,n}(z)\}$在D中任一个有界闭集E上一致收敛到一个解析函数.

(4) 最后还要证明：当区域D包含点∞时，$\{f_{n,n}(z)\}$在点∞的邻域$|z|>R$上一致收敛，这里 $0<R<\infty$，不妨设$\{|z|\geqslant R\}\subset D$.

在前面已证明：$\{f_{n,n}(z)\}$在$|z|=R$ 上一致收敛，因而 $\left\{f_{n,n}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$在$|z|=\frac{1}{R}$上一致收敛，即对于 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使得当 m、$n>N$ 时，在$|z|=\frac{1}{R}$上，有

$$\left|f_{m,m}\left(\frac{1}{z}\right)-f_{n,n}\left(\frac{1}{z}\right)\right|<\varepsilon.$$

根据解析函数的最大模原理，上式在$|z|\leqslant\frac{1}{R}$ 上也成立，故 $\left\{f_{n,n}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$在$|z|\leqslant\frac{1}{R}$上一致收敛，而$\{f_{n,n}(z)\}$在$|z|\geqslant R$ 上一致收敛到一个解析函数.

同理，也可从$\{f_n(z)\}$中的任一个子函数序列里选取收敛的子序列. 这就表明了$\{f_n(z)\}$在D中的列紧性. 证毕.

我们还可证明：定理 1.1 的逆定理也是成立的，即：若在区域D内的解析函数序列$\{f_n(z)\}$ 具有列紧性，则$\{f_n(z)\}$在D中内闭一致有界.

使用上述列紧性原理，可得以下的解析函数序列的收敛性准则.

定理1.2(Vitali). 设$\{f_n(z)\}$是区域D内的解析函数序列，且在D中内闭一致有界，又$\{f_n(z)\}$在D中一点列$\{z_k\}$上收敛，$\{z_k\}$有

一极限点属于 D，则$\{f_n(z)\}$在D中内闭一致收敛.

证 先证$\{f_n(z)\}$在D内的收敛性. 用反证法，假定D中有一点 a，数列$\{f_n(a)\}$不收敛，那么从$\{f_n(a)\}$可选出两个子序列$\{f_{n,1}(a)\}$、$\{f_{n,2}(a)\}$分别收敛到数 b_1、b_2，且 $b_1 \neq b_2$. 由定理的条件，知函数序列$\{f_{n,1}(z)\}$及$\{f_{n,2}(z)\}$都在D中内闭一致有界. 又由定理1.1,可从$\{f_{n,1}(z)\}$、$\{f_{n,2}(z)\}$选取子函数序列$\{f^*_{n,1}(z)\}$、$\{f^*_{n,2}(z)\}$在D中分别内闭一致收敛到解析函数 $f^*_1(z)$、$f^*_2(z)$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} f^*_{n,1}(a) = b_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} f^*_{n,2}(a) = b_2,$$

故 $f^*_1(a)=b_1$， $f^*_2(a)=b_2$， 而 $f^*_1(a) \neq f^*_2(a)$. 但是 $\{f^*_{n,1}(z)\}$及$\{f^*_{n,2}(z)\}$都是$\{f_n(z)\}$的子函数序列，它们在点列$\{z_k\}$上收敛于相等的数，故 $n\to\infty$ 时，

$$f^*_{n,1}(z_k) - f^*_{n,2}(z_k) \to 0 \, (k=1, 2, \cdots),$$

因而

$$f^*_1(z_k) - f^*_2(z_k) = 0 \, (k=1, 2, \cdots).$$

由解析函数的唯一性定理，知 $f^*_1(z)-f^*_2(z)\equiv 0$， 当 $z\in D$， 这与 $f^*_1(a) \neq f^*_2(a)$矛盾，因而$\{f_n(z)\}$在D中每一点均收敛. 然后与定理 1.1 证明中的第(3)、(4)部分那样， 可证$\{f_n(z)\}$在D中内闭一致收敛.

以下要证明关于单叶解析函数序列一致收敛性的结果.

定理 1.3. 设 $\{f_n(z)\}$ 是区域D内的单叶解析函数序列. 如果$\{f_n(z)\}$在D中内闭一致收敛到函数 $f(z)$， $f(z)$ 不是常数，则 $f(z)$是D内的单叶解析函数.

证 $f(z)$在D内的解析性是明显的. 假如 $f(z)$ 在D内不单叶，则在D内有二点 z_1、z_2，$z_1 \neq z_2$， 使 $f(z_1)=f(z_2)$， 我们不妨设 z_1、z_2 都不是点∞，因为否则， 通过 z 的一个分式线性变换即达要求. 以 z_1、z_2 为中心作二小圆 K_1、K_2， 其边界分别为 Γ_1、Γ_2， 使

$K_1+\Gamma_1$、$K_2+\Gamma_2$ 互不相交，且都在D内，又 $f(z)-f(z_1)$在$K_1+\Gamma_1$ 及 $K_2+\Gamma_2$ 上除 z_1、z_2 外无其它零点，这是因为$f(z)$不是常数。因此有正数 $\delta>0$，当 $z\in\Gamma_1+\Gamma_2$ 时，

$$|f(z)-f(z_1)|>\delta.$$

另一方面，由定理的条件，$\{f_n(z)\}$在 $\Gamma_1+\Gamma_2$ 上一致收敛到函数 $f(z)$，故存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有$|f_n(z)-f(z)|<\delta$，$z\in\Gamma_1+\Gamma_2$. 应用 Rouché 定理，解析函数

$$f_n(z)-f(z_1)=[f(z)-f(z_1)]+[f_n(z)-f(z)],\ n>N$$

在 K_1 及 K_2 内都至少有一个零点，这与 $f_n(z)$在D内的单叶性矛盾，此矛盾证明了 $f(z)$在D内的单叶性.

§2. 调和函数序列的收敛性

上一节关于解析函数序列的列紧性原理与 Vitali 定理，可以类推到调和函数序列，但后一个定理的条件需要加强.

正如上节定理 1.1 证明中利用哥西公式一样，这里要用到圆内调和函数的 Poisson 公式，下面将导出这个公式，同时也证明圆内调和函数 Dirichlet 边值问题解的存在唯一性.

定理 2.1. 设 $\Phi(t)=\Phi(Re^{i\varphi})$是$|t|=R(0<R<\infty)$ 上的连续实值函数，则在圆$|z|\leqslant R$ 上以 $\Phi(t)$为边值的 Dirichlet问题的解是存在唯一的，即存在唯一的在圆$|z|<R$ 内的调和函数 $u(z)$，它在$|z|\leqslant R$ 上连续，又在$|t|=R$ 上，有 $u(t)=\Phi(t)$，并且$u(z)$具有如下的 Poisson 积分表示式:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)\,\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi, \tag{2.1}$$

其中 $t=Re^{i\varphi}$, $|z|<R$.

证 由于 $\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)$在 $|z|<R$ 内调和，通过积分号下求微

商，可知由(2.1)式积分所确定的函数 $u(z)$ 也在 $|z|<R$ 内调和。因此只要证明：对 $|t|=R$ 上任一点 t，有

(2.2) $$\lim_{z\to t}u(z)=\Phi(t),$$

则 $u(z)$ 就是圆 $|z|<R$ 内调和函数 Dirichlet 问题的解。

任取实常数 a，易知当 $|z|<R$，有

(2.3) $$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi\\&=\mathrm{Re}\frac{a}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{(t+z)\,dt}{(t-z)\,t}\\&=\mathrm{Re}\frac{a}{2\pi i}\int_{|t|=R}\left[\frac{2}{t-z}-\frac{1}{t}\right]dt=a.\end{aligned}$$

下面先证(2.2)式当 $t=R$ 时成立。任给 $\varepsilon>0$，可得数 $\delta>0$ $(\delta<R)$，使

$$|\Phi(t)-\Phi(R)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |t-R|\leqslant\delta,\ |t|=R.$$

由(2.1)及(2.3)，有

$$\begin{aligned}u(z)-\Phi(R)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi(t)-\Phi(R)]\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varphi_0}+\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0}+\int_{2\pi-\varphi_0}^{2\pi}\right]\cdot\\&\quad\cdot[\Phi(t)-\Phi(R)]\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi=I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

其中 I_1、I_2、I_3 依次表示相应的各项积分，又 $0<\varphi_0<\pi$，取 $Re^{i\varphi_0}$ 满足 $|Re^{i\varphi_0}-R|=\delta$. 由于

$$\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}>0,$$

这里 $z=re^{i\theta}$，所以

(2.4) $$|I_1|+|I_3|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\varphi_0}+\int_{2\pi-\varphi_0}^{2\pi}\right]\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi=\frac{\varepsilon}{2}.$$

至于 I_2, 因为 $|\Phi(t)-\Phi(R)|\leqslant M$, M 为一常数, 又若 z 为一点使 $|z|<R$ 及 $|z-R|<\frac{\delta}{2}$, 则

$$\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)=\frac{R^2-|z|^2}{|t-z|^2}<\frac{R^2-|z|^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2},$$

$$\varphi_0<\varphi<2\pi-\varphi_0,$$

故有

$$|I_2|<M\frac{R^2-|z|^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

只要取 η 适当小, $0<\eta<\frac{\delta}{2}$, 使 $|z-R|<\eta$, 上式后一不等式必成立. 这样, 从(2.4)、(2.5), 当 $|z|<R$, $|z-R|<\eta$, 就有

$$|u(z)-\Phi(R)|<\varepsilon,$$

这证明了 $t=R$ 时, (2.2)式成立.

对于圆 $|t|=R$ 上任一点 $t_0=Re^{i\varphi_0}$, 令

$$u_1(z)=u(ze^{i\varphi_0}),\ \Phi_1(t)=\Phi(te^{i\varphi_0}).$$

从(2.1)式, 易知有

$$u_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_1(t)\mathrm{Re}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)d\varphi,$$

因此由前面已证的结果, 有

$$\lim_{z\to R}u_1(z)=\Phi_1(R),$$

这样就得(2.2)式.

其次证明唯一性: 如果有两个调和函数 $u_1(z)$、$u_2(z)$ 满足定理条件, 设 $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$, 则 $u(z)$ 在 $|z|<R$ 内调和, 在 $|z|\leqslant R$ 上连续, 并且在 $|t|=R$ 上, $u(t)=0$. 根据调和函数的最大

值、最小值原理，知 $u(z)\equiv 0$，当 $|z|\leqslant R$，即 $u_1(z)\equiv u_2(z)$.

如果定理 2.1 中的圆 $|z|<R$ 代以 $|z-a|<R$，这里 a 是一个复数，又 $\Phi(t)$ 在 $|t-a|=R$ 上连续，则同样可证在圆 $|z-a|<R$ 内存在唯一的调和函数 $u(z)$，使得

$$\lim_{z\to t} u(z)=\Phi(t),\ |t-a|=R,$$

而此调和函数 $u(z)$ 就是圆 $|z-a|<R$ 上 Dirichlet 边值问题的解. 它可由如下的 Poisson 积分表示：

$$(2.6)\qquad u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)\,\mathrm{Re}\left(\frac{t+z-2a}{t-z}\right)d\varphi,$$

$$t=a+Re^{i\varphi}.$$

又 $|z-a|>R$ 上调和函数 Dirichlet 边值问题的解 $u(z)$ 可表示成

$$(2.7)\qquad u(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)\,\mathrm{Re}\left(\frac{t+z-2a}{t-z}\right)d\varphi,$$

其中 $\Phi(t)$ 是 $|t-a|=R$ 上的连续实函数. 这是因为：设 $z=\frac{1}{\zeta}+a$，当 $|z-a|>R$ 时，有 $|\zeta|<\frac{1}{R}$；又 $t=\frac{1}{\tau}+a$，当 $|t-a|=R$ 时，有 $|\tau|=\frac{1}{R}$；由 (2.1) 式，当 $|\zeta|<\frac{1}{R}$ 时，有

$$\begin{aligned}
U(\zeta)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=\frac{1}{R}}\Phi\left(\frac{1}{\tau}+a\right)\mathrm{Re}\,\frac{\tau+\zeta}{\tau-\zeta}\cdot\frac{d\tau}{\tau}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-a|=R}\Phi(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{\dfrac{1}{t-a}+\dfrac{1}{z-a}}{\dfrac{1}{t-a}-\dfrac{1}{z-a}}\cdot\frac{dt}{t-a}\\
&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|t-a|=R}\Phi(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{t+z-2a}{t-z}\cdot\frac{dt}{t-a}\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{t+z-2a}{t-z}d\varphi
\end{aligned}$$