名师指点"素质教育"丛书　　主编　牛宝彤

数学解题思路、方法、技巧和策略答问

主　编　汪景瑛　郝德志
副主编　关　强　杨雨春
　　　　谭业静　蒋桂生

地震出版社

名师指点"素质教育"丛书　　主编　牛宝彤

数学解题思路、方法、技巧和策略答问

主编　汪景瑛　郝德志

责任编辑　王　伟

地震出版社出版

北京民族学院南路 9 号

北京丰华印刷厂印刷

新华书记北京发行所发行

全国各地新华书店经售

787×1092　1/32　15.125 印张　354 千字

1998 年 8 月第一版　　1998 年 8 月第一次印刷

印数:0001—8000

ISBN 7-5028-1580-5/G・123

(2023)　定价:21.80 元

前　言

我曾给我的学生出过这样一个题目，如图 1，有共点于 P 的三条射线 a、b、c，作直线 l 分别交 a、b、c 于 A、B、C 三点，使 $AB=m$，$BC=n$。在被测试的 50 人中正确的仅有 17 人，只占 34%。其实这不是一道难题，只须在 l 上截取 $AB=m$，$BC=n$。AB、BC 所对的角分别为 $\angle APB$ 和 $\angle BPC$ 均为已知，所以 P 点可求。这说明广大中学生对于解题思路、方法、技巧和策略的掌握有待于提高。问题是数学的心脏，这已成为人们的共识。当代著名数学教育家波利亚曾经指出："掌握数学意味着什么?这就是善于解题，不仅要善于解一些标准的题，而且还要善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和发明创造的题。"所以无论从实践上考虑，还是从理论上考虑，我们认为编写一本关于研究解题的书是非常必要的。为此，邀请了长期在教学第一线工作的一些老师，集他们多年在教学实践中的积累和经验，经过认真的思考、整理、提炼和总结编成此书。所以这本书是集体智慧的结晶。

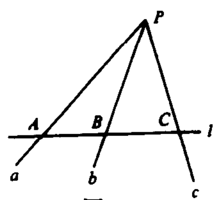

图 1

按着数学教学大纲和高考说明的规定，数学学科对学生的能力要求是：运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力、解决问题和分析问题的能力。我们认为这些要求是宏观上的要求，比较抽象。为落实这些要求，有必要根据高中数学教材，把这

些能力分解为若干个具体的技能，由这些具体技能的形成和培养，完成上面四种能力的形成和培养，这是培养能力的必由之路！为此我们按教材体系，全书提出 65 个问题，即 65 个小节；每个小节设典型例题、规律小结、能力训练三部分。典型例题中，每题后面除解法外，又根据问题的特点，分别从思路分析、方法点技、策略和技巧评述的某一个侧面进行剖析，一题一议，其目的是不仅使学生学会某一题的解法，更重要的是使他们了解这个思路是怎么产生的，这种解法反映了什么数学思想方法，运用了什么策略原则和技巧。规律小结中，用简明的语言，总结规律，回答这一小节题目中的问题。能力训练是每节中不可分割的部分，所选题目具有典型性，供读者练习使用。可以相信，这本书对提高读者的解题能力将会大有作用。当然提高解题能力主要靠长期解题实践的积累，决不是一朝一夕的事，但这种实践要在一定理论的指导下才能收到事半功倍的效果。

本书是《名师指点“素质教育”丛书》的一个分册，它是在丛书主编牛宝彤教授统一安排和具体指导下编写的，在体例上和丛书其他分册大体保持一致。在编写过程中，得到了清原高中校长崔宝石先生的大力支持，我们表示衷心的感谢。由于水平所限，书中提法若有不当处敬请专家和读者指正，以期再版时修正。

汪景瑛

总 序

为了贯彻“科教兴国”的战略方针，中等学校必须强化“素质教育”，以有效地提高广大中学生在道德品质、科学知识等方面的素质以及解决实际问题的能力，成长为祖国21世纪现代化建设的优秀人才。为此，我们编辑出版了这套《名师指点“素质教育”丛书》，旨在指点中学生掌握解题的思路、方法、技巧和策略，从而巩固所学各科的基础知识，加强基本训练，提高运用所学知识的能力。

本丛书是邀请各地特级或高级教师特别是奋战在教学第一线有丰富经验的名师编写的，注重科学性、实用性和可读性，注重学生素质的提高是本丛书的宗旨。我们力求做到每本书“言之有物”，教给同学们真知识、真本领，切实为中学生解难答疑。

本丛书设主编一人，各分册设分册主编、副主编及编委若干人，以便层层把关，保证质量。

本丛书分学科编写，同学们可以根据自己的实际情况选读。我们衷心希望，本书能受到同学们的欢迎，以此为“科教兴国”尽一份努力，为“素质教育”献一份爱心。

牛宝彤

戊寅年写于中国人民公安大学木樨斋

目　　录

§1　解题的正确思路是怎样形成的？

一、典型例题

例1　直线 l 的方程为 $x=-\frac{P}{2}(P>0)$，椭圆中心为 $D(2+\frac{P}{2},0)$，焦点在 x 轴上，长半轴长为 2，短半轴长为 1，它的顶点为 $A(\frac{P}{2},0)$。问 P 在哪个范围内取值时，椭圆上有 4 个不同的点，它们中的每一个点到 A 点的距离等于到直线 l 的距离。

解：由题意和抛物线的定义，这 4 个点为椭圆

$$\frac{[x-(2+\frac{P}{2})]^2}{4}+y^2=1$$

和抛物线 $y^2=2Px$ 的交点。所以方程组

$$\begin{cases}\dfrac{[x-(2+\frac{P}{2})]^2}{4}+y^2=1\\ y^2=2Px\end{cases}$$

有 4 组不同的实数解。消去 y 得：

$$x^2+(7P-4)x+\frac{P^2}{4}+2P=0$$

所以

$$\Delta=(7P-4)^2-4(\frac{P^2}{4}+2P)>0$$

即

$$3P^2-4P+1>0$$

解之得

$$P>1 \quad 或 \quad P<\frac{1}{3}$$

故所求 P 的范围为

$$P>1 \quad 或 \quad 0<P<\frac{1}{3}$$

思路分析：这个结果是错误的。由于 $y^2=2Px$，所以 $x>0$，方程

$$x^2+(7P-4)x+\frac{P^2}{4}+2P=0$$

应当有两个不等的正根。所以除了 $\Delta>0$ 的条件外还应加上 $7P-4<0$ 的条件，即 P 的取值范围应当是 $0<P<\frac{1}{3}$。造成错误的原因是没有认真的审题，所以就没有搞清楚量和量的本质联系，正确的解题思路就很难形成。如下面这个题：数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a、公比为 $-a$ 的等比数列，记 $b_n=a_n\lg|a_n|$，当 $0<a<1$ 时，是否存在自然数 M，使对任意的自然数 n 都有 $b_n<b_M$。如果深刻分析题意，不难发现，它的实质是问数列 $\{b_n\}$ 中是否存在最大的项，而 $b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg|a|$ 是 n 的函数，因此问题转化为此函数是否有最大值。因为 $0<a<1$，所以 $\{b_n\}$ 中奇数项为负，偶数项为正，b_n 的最大值只能从偶数项的增减性中讨论得知，而增减性的讨论可以归结为任意相邻两项（相邻的偶数项）的比较。这就形成了初步的解题思路，所以准确掌握题意，注意细微差别，多角度、全方位理解题意，注意分析潜在条件，注意发现题的本质，都是非常重要的。认真审题，发现联系，注意本质是形成正确解题思路的基础和前提。

例 2　已知 a 为常数，$x\in R$，且

$$f(x+a)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$$

问 $f(x)$是否为周期函数，若是，求出它的一个周期，若不是，说明理由。

解：由条件 $f(x+a)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$

$$\therefore\ f(x+2a)=\frac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1}=\frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=-\frac{1}{f(x)}$$

$$\therefore\ f(x+4a)=f(x+2a+2a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$$

所以 $f(x)$是周期函数，一个周期为 $4a$。

思路分析：上面的解流畅和谐，显出一种数学美。上述的解题思路是这样形成的，由题设条件

$$f(x+a)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$$

联想到我们熟知的余切函数，余切函数有

$$\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\operatorname{ctg}x-1}{\operatorname{ctg}x+1}$$

由此可以想到 $f(x)$可以 $\operatorname{ctg}x$ 为原型，条件中的常数 a 应当对应于原型中的$\frac{\pi}{4}$，而余切函数的周期为 π，而 $\pi=4\cdot\frac{\pi}{4}$，因此所给函数的周期应当为 $4a$。对余切函数我们有

$$\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{2})=-\operatorname{tg}x=-\frac{1}{\operatorname{ctg}x}$$

$$\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{2})}=\operatorname{ctg}x$$

这样上述的解题思路就跃然于纸上了。再看一题：

$$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0 \qquad x、y、z\in R$$

求证 $x、y、z$ 成等差数列。观察题目特点，发现它们在整体上和“$B^2-4AC=0$”的形式相似，由此我们得到解题思路，构造方程：

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0$$

有重根 1，所以$\dfrac{y-z}{x-y}=1$，即 $2y=x+z$。

解题的实质，是用自己头脑中的知识作用于思维对象（题目）的过程，数学题目千变万化，数量极多，但题目的构成、外在形式、解题的方法、思维模式等方面总有千丝万缕的的联系，总有相似之处，注意发现和联系与题目特点相似的数学对象，在自己头脑的知识库中寻找相似题目的知识和思考方式，由此及彼、联系相似，是形成正确解题思路的重要途径。

例 3　已知 $n\in N$，求证：

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$$

证明：$\because\ C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=(1+1)^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore\ n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n\cdot 2^{n-1}$

$$\because\ kC_n^k=k\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$=n\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

$\therefore\ C_n^1=nC_{n-1}^0 \quad 2C_n^2=nC_{n-1}^1 \quad \cdots \quad nC_n^n=nC_{n-1}^{n-1}$

$$\therefore\ C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})$$

$$=n2^{n-1}$$

$\therefore\ C_n^1+2C_n^2+3C_n^3\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$

思路分析：我们把左边记为 A，右边记为 B，A 看作题目

的初始条件，B 看作题目的解题目标。解题过程是转化初始条件最终达到解题目标的过程，这就不可避免地要对初始条件和解题目标作比较，发现其差异，并以此确定和调整解题方向，使差异逐步缩小，最终达到解题目标，实现解题。此例 A 和 B 二者形式相差甚远，A 是极难处理的和式，由 A 直接向 B 过渡不易，这就迫使我们构建一个和 A、B 都接近的中间目标 M，联系已有知识，易知：

$$C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$$

$$n(C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n\cdot 2^{n-1}$$

可以把此作为 M，最后我们实现了 $A\Leftrightarrow M\Leftrightarrow B$ 的转化。

再如：若 z_1、z_2 为复数，满足 $10z_1^2-2z_1z_2+5z_2^2=0$ 且 z_1+2z_2 是纯虚数，求证 $3z_1-z_2$ 是实数。我们可将解题目标题定为 $(3z_1-z_2)^2\geqslant 0$。比较初始条件 $10z_1^2-2z_1z_2+5z_2^2=0$ 与解题目标 $9z_1^2-6z_1z_2+z_2^2\geqslant 0$，二者的差是 $-z_1^2-4z_1z_2-4z_2^2\geqslant 0$，即 $(z_1+2z_2)^2\leqslant 0$，而初始条件 z_1+2z_2 为纯虚数，知 $(z_1+2z_2)^2<0$ 成立。

在解题中，先确定初始条件和解题目标，比较初始条件和解题目标，发现其差异，注意促成转化。有时初始条件和解题目标比较隐蔽；有时初始条件和解题目标表现形式不易处理，要注意转化为等价的形式；有时二者相差甚大，要善于构建中间目标。总之注意分析条件和目标，发现差异，实现转化是形成正确解题思路的突破口和重要线索。

例 4　已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$

证明：$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1\Leftrightarrow|a+b|<|1+ab|\Leftrightarrow a^2+b^2<1+a^2b^2$

$$\Leftrightarrow(a^2-1)(1-b^2)<0$$

$\because\ |a|<1 \qquad |b|<1$

$\therefore\ (a^2-1)(1-b^2)<0$ 成立，所以原不等式 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$ 成立。

思路分析：此题可做如下推广：$|a|<r$，$|b|<r$，则 $\left|\dfrac{a}{r}\right|<1$，$\left|\dfrac{b}{r}\right|<1$，所以 $\left|\dfrac{a+b}{r^2+ab}\right|<\dfrac{1}{r}$。

由此出发可以解决下题：已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个根 α、β，证明如果 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，那么 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$。

作如下证明：

$\because\ |\alpha|<2 \qquad |\beta|<2$

$\therefore\ \left|\dfrac{\alpha+\beta}{4+\alpha\beta}\right|<\dfrac{1}{2}$

由根和系数的关系，有：

$$\left|\frac{a}{4+b}\right|<\frac{1}{2} \qquad 2|a|<|4+b|$$

$\because\ b=\alpha\beta$

$\therefore\ |b|=|\alpha||\beta|<4 \qquad 4+b>0$

即 $2|a|<4+b$ 成立。

例 4 是教材中的习题，上题是高考试题，这里可以看出，题目解出以后要注意反思，看解题的方法是否最佳，能不能改进，解题的思路有没有推广的价值，即这种解法思路能不能做为一种普遍的模式解决其他问题，得到的结论能否推广，这种推广有没有使用价值等等。总之解题以后要反思，促成迁移，这是一个积累过程，常此以往，坚持下去，就会发生质变，正确的解题思路就会油然而生，运用自如。

二、规律小结

问题是数学的核心，一个问题的重要意义不在于它的解法，而在于这个解法是怎么产生的，即解题的正确思路是怎么产生的。所谓解题思路就是解题过程中思维的走向，思维的程序或模式，认真审题、发现本质是形成正确解题思路的基础和前提；由此及彼、联系相似是形成正确解题思路的途径；注意分析题目的初始条件和解题目标，发现差异、促成转化是形成正确解题思路的突破口；解后反思是一种积累过程，可以提高解题能力，是形成正确解题思路的智力基础。

三、能力训练

（一）选择题

1. 若 $x^2+2x-y^2=0\quad(x,y\in R)$，则 x^2+y^2 的最小值为（　　）。

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. -1　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. $m\in R$，直线：$(2+m)x+(m-1)y-(m+2)=0$，圆：$x^2+y^2=3$，直线和圆的位置关系为（　　）。

A. 相离　　B. 相切　　C. 相交

D. 由 m 的值确定其位置关系

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-2}{\cos x+3}$ 的值域为（　　）。

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,3]$

C. $\left[\dfrac{-3-\sqrt{3}}{4},\dfrac{-3+\sqrt{3}}{4}\right]$

D. $\left[\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$

4. 若 $a^2>a^3$，a 的取值范围为（　　）。