

高等数学

上册

上海交通大学应用数学系 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书分上下两册，另有上海交通大学出版社出版的《高等数学习题集》与本书相配套。它们编排的章次完全一致。

本书上册内容包括：函数；极限与连续；导数与微分；微分中值定理、导数的应用；不定积分；定积分及其应用；向量代数与空间解析几何。每章后面还备有附注。

本书可供高等工科院校作为教材，也可供高等院校、成人高校的师生以及报考高等工科院校研究生的读者作为参考用书。

高 等 数 学

(上)

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄12号)

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 15/625 字数 403000

1987年6月第1版 1987年7月第1次印刷

印数：1—12,000

统一书号：ISBN7-313-00022-7/013 科技书目：154—

定价：[]

2011/143/06

前 言

《高等数学》是高等院校一门传统的基础课。它在传授知识、启发学生思维和培养学生能力等方面都具有重要的作用。本书是在我校教师多年教学实践的基础上，参照1980年教育部颁发的《高等工业学校高等数学教学大纲（草案）》的要求，力图贯彻减少课堂教学时数的精神，处理好传授知识和培养能力二者的关系编写而成的。

本书的特点是：文字通俗易懂，便于阅读，为减少课堂教学时数创造条件，以适应精讲与自学相结合的教学改革要求；内容丰富，论证严谨，逻辑性强，并采用了一些现代数学的符号，使叙述更为简洁；在正文中的部分内容前面记有星号，作为教师根据教学的实际情况，进行删减参考；各章后面备有附注，以开拓学生视野，有利于贯彻因材施教原则；例题经过认真选择，具有多样性，有些带有一定的技巧，以启发和培养学生解题的能力；另有与本书相配套的《高等数学学习题集》，其编排次序与本书章次完全一致，已由上海交通大学出版社出版。

学习本书时，学生可在教师的指导下，系统地获得高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，培养和提高运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力和空间想象能力，并能运用所学知识解决有关几何和物理中的问题，也为学习后继课程打下坚实的数学基础。

本书由徐桂芳、曹敏谦主编，参加编写工作的还有李重华、荣、景继良等同志。在编写过程中得到校系领导的关心和帮助并听取了我系广大教师的不少宝贵意见，在此谨向他们表示感谢。尽管如此，本书还会存在许多不足之处，殷切期望

广大师生和读者给予批评指正。

编 者

1986年10月于上海交通大学

目 录

第一章 函数	1
§1 函数的概念	2
§2 函数的简单性质	8
§3 反函数	12
§4 复合函数	17
§5 初等函数	18
§6 实际问题中建立函数举例	21
附注	23
第二章 极限与连续	32
§1 数列的极限	32
§2 收敛数列的性质	40
§3 无穷小与无穷大	42
§4 数列极限的有理运算	46
§5 数列极限的存在准则	49
§6 函数的极限	54
§7 极限的运算法则、两个重要极限	66
§8 无穷小的比较	73
§9 函数的连续性	77
§10 闭区间上连续函数的性质	83
§11 复合函数与反函数的连续性	86
附注	90
第三章 导数与微分	99
§1 函数的变化率	99
§2 导数的概念	103

§3	基本导数表	11
§4	函数的和、差、积、商的导数	115
§5	复合函数的导数	120
§6	反函数的导数	126
§7	隐函数的导数和参数方程所表示的函数的导数	131
§8	微分及其应用	137
§9	高阶导数与高阶微分	148
	附注	158
第四章	微分中值定理 导数的应用	161
§1	罗尔定理	161
§2	拉格朗日定理及其推广	163
§3	罗彼塔法则	170
§4	泰勒定理及其应用	179
§5	函数增减性的判别法和极值	193
§6	曲线的凸向和拐点	210
§7	渐近线和函数作图	218
§8	方程的近似解	228
	附注	235
第五章	不定积分	241
§1	不定积分的概念	241
§2	换元积分法	249
§3	分部积分法	256
§4	有理函数的积分	262
§5	三角函数的有理式的积分	273
§6	简单无理函数的积分	280
§7	一些不能用初等函数表示的积分	284
	附注	286
第六章	定积分及其应用	299
§1	定积分的概念	299

§2	牛顿 - 莱布尼兹公式	310
§3	定积分的计算法	314
§4	广义积分	328
§5	定积分在几何方面的应用	345
§6	定积分在物理方面的应用 函数平均值	365
§7	曲率	374
	附注	387
第七章	矢量代数与空间解析几何	398
§1	矢量及其运算	398
§2	矢量的坐标	413
§3	矢量运算的坐标表示	419
§4	曲面和空间曲线	430
§5	平面	447
§6	直线	458
§7	二次曲面	472
	附注	486

第一章 函数

函数是高等数学中最基本的概念之一，也是高等数学研究的主要对象。时至十六、十七世纪，随着生产力的发展，有大量问题要求人们去探讨变量以及变量与变量之间的依赖关系，由此产生了函数概念的雏型。使用函数一词始于莱布尼兹^①，当时虽然没有给出明确的定义，但他已考虑到变量 x 以及与变量 x 同时变动的变量 y ，即变量 x 的函数，后经欧拉^②、柯西^③以及狄利希莱^④等数学家对函数概念不断加以修正、扩充而逐步形成现在较为完整的函数概念。

本章首先给出实数的绝对值和有关的不等式，这是学习高等数学必备的基本知识。然后给出函数的定义以及讨论函数的一些简单性质。最后通过几个实际问题建立变量之间的函数关系。

在高等数学课程中所涉及的数主要是实数。但是，要了解清楚什么是实数并不是一件容易的事。从数学的发展史来看，直到十九世纪下半叶，人们对实数的本质才有较深刻的认识。为了使读者能对实数的本质有一个初步的了解，在本章的附注中介绍了实数的基本公理，以供参考。

① 莱布尼兹(G.W. Leibniz, 1646~1716)，德国数学家，同牛顿被称为微积分的创始人。

② 欧拉(L. Euler, 1707~1783)，瑞士数学家。

③ 柯西(A.L. Cauchy, 1789~1857)，法国数学家。

④ 狄利希莱(P.G.L. Dirichlet, 1805~1859)，德国数学家。

§1 函数的概念

一、实数的绝对值与不等式

设 a 为任意实数，则定义 a 的绝对值为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0; \\ -a, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

根据定义，明显地有 $|a| \geq 0$ 。并且，当且仅当 $a=0$ 时 $|a|=0$ 。此外，还有

$$|-a| = |a|, \quad |b-a| = |a-b|.$$

从几何图形上来看， $|a|$ 就是原点到 a 点的距离，而 $|a-b|$ 则为 a b 两点之间的距离。

又对于任意两个实数 a 和 b ，有

$$|ab| = |a||b|,$$

当 $b \neq 0$ 时，

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

下面再讨论几个关于绝对值的不等式。

1° 不等式 $|a| \leq A$ 等价于 $-A \leq a \leq A$ 。

事实上，如果 $|a| \leq A$ ，则 $-|a| \geq -A$ 。又因为 $-|a| \leq a \leq |a|$ ，故有 $-A \leq a \leq A$ 。

反之，设 $-A \leq a \leq A$ ，即：

当 $a \geq 0$ 时，有 $|a| = a$ ，因此 $|a| \leq A$ ；

当 $a < 0$ 时，有 $|a| = -a$ ，由假设 $-A \leq a$ 得 $A \geq -a$ ，从而有 $|a| \leq A$ 。

2° $|a+b| \leq |a| + |b|$ 。

事实上，由 $-|a| \leq a \leq |a|$ 及 $-|b| \leq b \leq |b|$ 相加得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

由 1° 即得 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 。

把这个不等式推广, 得

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|。$$

$$3^\circ \quad |a-b| \geq ||a| - |b||。$$

因为 $a = (a-b) + b$, 由 2° 得

$$|a| \leq |a-b| + |b|,$$

从而有 $|a| - |b| \leq |a-b|。$

又因为 $b = a + (b-a)$, 故由 2° 得

$$|b| \leq |a| + |b-a| = |a| + |a-b|,$$

从而又有 $-|a-b| \leq |a| - |b|。$

合并以上结果得

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|。$$

由 1° 得 $|a-b| \geq ||a| - |b||。$

二、变量与常量

世界上一切事物都是处于不停地运动和变化之中。在研究事物运动过程时, 常常会遇到两种不同的量。在某一过程中可取不同数值的量称为**变量**(或变数); 数值保持不变的量称为**常量**(或常数)。

在高等数学中, 常用各种**区间**表示变量的取值范围, 借助于集合符号将其表示如下:

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\};$

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\};$

左开右闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\};$

左闭右开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\};$

无穷区间 $(a, +\infty) = \{x | x > a\};$

$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\};$

$(-\infty, b) = \{x | x < b\};$

$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\};$

$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}。$

图 1-1 给出区间在数轴上的表示法。

以上各种区间中的 a 和 b 称为区间的端点, a 称为左端点, b 称为右端点。属于区间内而不是端点的点称为内点。

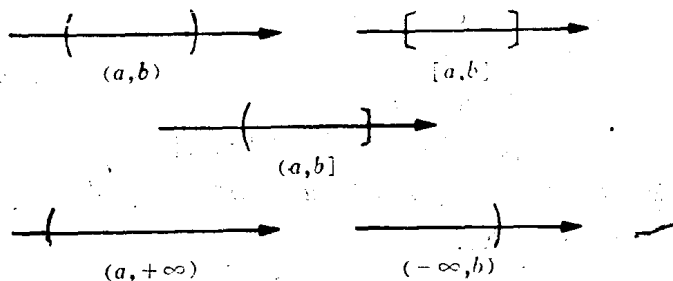


图 1-1

开区间 $(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta \ (\delta > 0)\}$ 称为点 a 的 δ 邻域 (或称点 a 的邻域), 记作 $U(a, \delta)$, a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径; 而对于点 a 除外的邻域 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为去心邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$ (见图 1-2)。

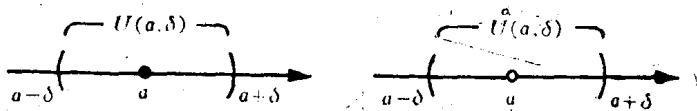


图 1-2

三. 函数概念

自然界中各种现象的变化不是孤立的、各不相关的, 而是互相依赖的。例如, 在气缸内一定质量的气体, 它的压强 p 、体积 V 及 (绝对) 温度 T 之间有下列关系, 称为克拉伯龙 (Claperon) 公式:

$$pV = RT$$

其中 R 是常数。为了使讨论问题简单化, 可假定温度保持不变, 于是压强与体积两个变量之间互相依赖的规律为

$$p = \frac{c}{V},$$

其中 c 为常数。这个关系式称为波义尔-马略特 (Boyle-Mariotte) 定律。

又如一质点在一单位圆周上作等角速转动时, 其直角坐标 x, y 随时间 t 而定的情况可由下式表达:

$$x = \cos \omega t, \quad y = \sin \omega t,$$

其中常量 ω 是质点旋转的角速度。自然界中这种例子是很多的。从这些例子抽出它们共同的特性, 可建立一重要概念, 这就是函数概念。

定义 设有一变量 x , 它的取值范围是一数集 X , 如果在 X 内所取的每一数值 x , 根据一确定法则 $f(\quad)$, 有另一变量 y 的唯一确定的数值与它相对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作:

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

称 x 为自变量, y 为因变量。 X 称为函数 $f(x)$ 的定义域, y 值构成的数集 Y 称为函数 $f(x)$ 的值域。

如果函数的定义域为区间, 则称这区间为函数的定义区间。

例如: 函数 $y = ax + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 它们的定义区间是 $(-\infty, +\infty)$; 而函数 $y = \sqrt{(x-a)(b+x)}$

$(a < b)$, $x \in [a, b]$, 它的定义区间是 $[a, b]$ 。约定: 当不考虑函数中两个变量所表示的实际意义时, 函数的定义域将由解析式子本身来确定。

在函数定义中, 重要的是必有一确定法则存在。据此, 自变量取定后, 函数随着必有唯一的定值, 至于法则的内容, 是否能用一个公式加以表达, 是另一回事, 不是函数定义所要求的。例如

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

是一个函数, 其中 y 随 x 而定的法则, 用两个公式分别来说明,

这种表达形式的函数常称为分段函数。

只要有一条明确的法则，不问其内容、说明方式如何，当自变量在某数集内任取一值时，必有因变量的唯一数值，依据此法则随它而定，那末，这就是一个函数，它的法则常用记号 $f(\quad)$ 表达。对函数定义域内任何 x 运用法则 $f(\quad)$ ，从而获得的 $f(x)$ ，它就是对应于 x 的 y 值： $y=f(x)$ ，称为 x 的函数值。不同的法则用不同的符号来表示，例如

$g(\quad)$ 或 $\varphi(\quad)$ 或 $F(\quad)$ 等等。有时，也用 $y(\quad)$ 来表示因变量 y 的对应法则。

这样抽象而广泛地来理解的函数概念，在近代数学中所产生的影响是深远的。

下面再举三个常用的函数例子。

例 1 符号函数(也称克罗内克尔^①函数)：

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ 1, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

通过它可以表示任何实数 x 的绝对值： $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ 。因此 $\operatorname{sgn}(x)$ 起了 x 的符号作用，故称它为符号函数。

例 2 取整函数：对于任意实数 x ，对应的 y 是不超过 x 的最大整数，记作

$$y = [x].$$

下面列出它的几个函数值： $[1.2] = 1$ ， $[3.9] = 3$ ， $[0] = 0$ ， $[0.3] = 0$ ， $[-0.7] = -1$ ， $[-3.1] = -4$ 。

例 3 狄利希莱函数：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

在讨论函数时除了对应法则之外，还应注意它的定义域。为了加深对函数定义的理解和记忆，作一表格再次说明函数的概

^① 克罗内克尔(L. Kronecker, 1823~1891). 德国数学家。

念。

x 在 X 中取值 $x \in X$	确定的法则 $f(\quad)$	对应于 x 的 y 值 $y = f(x)$
例 1 $x \in (-\infty, +\infty)$	$(\quad)^2$	$y = x^2$
例 2 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin(\quad)$	$y = \sin x$
例 3 $x \in [0, +\infty)$	$e^{-(x)}[\sin(\quad) + \cos(\quad)]$	$y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$

四、隐函数与显函数

平面上一条直线的方程是

$$Ax + By + C = 0.$$

这是一个二元一次方程，其中 x 及 y 不能各自独立地取值，若 x 任意取定一值时，为了满足方程， y 当然不能任意取值。这样一个方程表示两个变量间相依而变的关系。若指定 x 为自变量， y 为因变量，则当 $B \neq 0$ 时，

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

它的对应法则是

$$f(\quad) = -\frac{A}{B}(\quad) - \frac{C}{B}.$$

因而方程 $Ax + By + C = 0$ 确定了函数 y ，称 y 是自变量 x 的隐函数。

一般说来，设有两个变量 x 、 y 的方程为

$$F(x, y) = 0,$$

如果存在一个函数 $y(x)$ ， $x \in X$ ，将它代入上列方程，得恒等式

$$F(x, y(x)) = 0,$$

则称方程 $F(x, y) = 0$ 定义了 y 为 x 的**隐函数**。如果函数 y 能够通过自变量 x 直接表达为 $y = f(x)$ 形式, 则称为**显函数**。

例如, 椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

定义了 y 为 x 的隐函数, 它的显函数为

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [-a, a]$$

和 $y = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \in [-a, a].$

实际上, 显函数与隐函数并没有严格的界限, 有时可以从隐函数 $F(x, y) = 0$ 解出显函数来。但是, 一般说来, 解一个方程并不容易, 因此, 将隐函数化为显函数就有一定的困难。例如, 方程 $y^5 + xy + x^5 = 0$ 定义的隐函数就不能用代数的方法化为显函数。

§2 函数的简单性质

讨论函数, 主要是认识函数值随自变量而定的规律性, 这就需要研究函数的一些性质。随着数学工具的发展, 可以逐步对函数作深入的研究。这里只能讨论函数的一些简单性质。此外, 为了使函数的规律性能有直观形象, 可对函数作图: 应用笛卡儿^①直角坐标系, 以 x 为横坐标, 以对应于 x 的函数值 $y = f(x)$ 为纵坐标, 作出平面上满足这函数关系的点 (x, y) , 这种点的集合 (通常是曲线) 构成函数 $y = f(x)$ 的图形。

下面列出函数的几个性质。

^① 笛卡儿(R. Descartes, 1596~1650), 法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家, 解析几何的创始人。

(1) 单值性

根据函数的定义，在定义区间内函数值是唯一的，这称为函数的单值性。例如，由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 确定的关系式

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

应当分别看作两个函数

$$f(x) = +b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad g(x) = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

而每一个都是单值的。函数的单值性，反映到它的图形上是：任何与 Oy 轴平行的直线，如果与它的图形相交，只能有一个交点（图 1-3）。

(2) 奇偶性

设有函数 $y = f(x)$ ，它的定义域 X 对称于原点。如果对任何 $x \in X$ ，恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任何 $x \in X$ ，恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数。奇函数的图形对称于原点，而偶函数的图形对称于 Oy 轴。例如函数 $y = x^3$ （图 1-4）、 $y = \sin x$ （图 1-5）和 $y = \operatorname{tg} x$ （图 1-6）都是奇函数； $y = x^2$ （图 1-7）和 $y = \cos x$

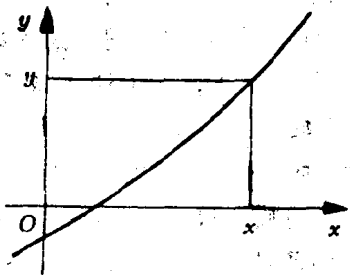


图 1-3

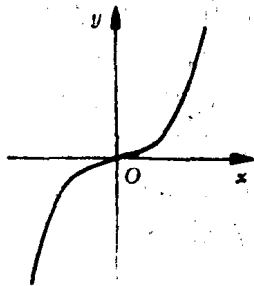


图 1-4

(图 1-8) 都是偶函数。

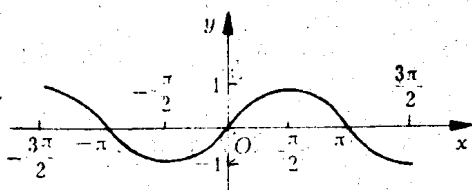


图 1-5

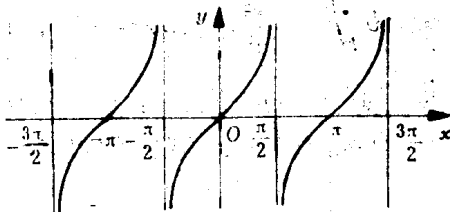


图 1-6

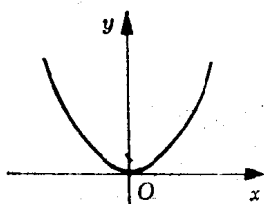


图 1-7

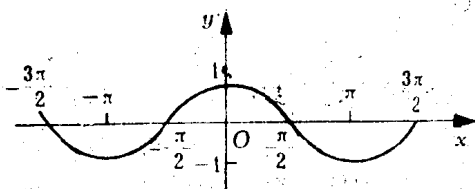


图 1-8

(3) 单调性

设有函数 $y=f(x)$, $x \in X$ 。如果对任意两点 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为 X 上的 (递) 增函数; 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为 X 上的 (递) 减函数。增函数及减函数统称为严格单调函数。此外, 若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为单调增函数 (即非减函数); 若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为单调减函数 (即非增函数)。单调增函数及单调减函数统称为单调函数。

说明了单调性的意义, 可知在某区间内的增函数 (图 1-9)