高等学校教学用书

分析力学

汪家华 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

分 析 力 学

汪家华 编

北京师范大学出版社

内 容 簡 介

全书共分八章，内容讲述了变分原理，拉格朗日方程，哈米顿正则方程，系统运动稳定性和微小振动，非完整力学系的动力学方程，正则变换，哈米顿-雅可比方程，还介绍了相对论力学和场的拉格朗日表示等. 前六章附有习题和答案.

本书可供综合大学、师范院校物理专业学生使用.

高等学校教学用书

分 析 力 学

汪家华 编

责任编辑 戴俊杰

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 7.5 字数: 184 千

1989 年 10 月第 1 版 1989 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—2 000

ISBN 7-303-00541-2/O·101

定价: 1.90 元

前　言

在综合性大学和师范学院物理系的教学大纲里，分析力学是理论力学课程的一部分。但近几年来，不少院校开设了分析力学选修课。本书就是本人在北京师范大学物理系讲授分析力学选修课时，所编讲义的基础上，修改、整理编成的。

本书在材料的选取和安排上，主要根据以下几点：(1) 尽量与 1980 年教育部颁发的高等师范院校物理专业《理论力学大纲》规定的重点内容不重复。因此本书以哈米顿原理这一力学的基本原理出发，来建立分离体系和场的动力学方程。(2) 课时少（大约 45—50 学时），在有限的时间内考虑理科学生的特点，重点放在对基本理论、基本原理、基本概念和方法的讨论上。(3) 在不超出本课程的范围，适当联系其它理论课程和适当考虑师范院校特点。

全书共八章。第一、二章讲述了变分原理(哈米顿原理、修正的哈米顿原理和最小作用原理)，并以变分原理为基础推出完整的分离系统的动力学方程(拉格朗日方程和哈米顿正则方程)，同时，介绍了有利于求解具有循环坐标的系统的罗斯方程。在这两章里又介绍了通过时空对称性来对自由质点的拉格朗日函数作初步估计，以及时空对称性与守恒定律的关系。第三章是拉格朗日方程的具体应用。全书重点是讲述完整的力学系统的动力学规律。只在第四章对非完整系动力学的罗斯方程和阿沛尔方程作了讨论，本章的目的只在使学生能对生活中常见的这类问题(如滑冰、球滚动等)，在理论上和处理方法上有所理解和掌握，这对师范院校学生是有用的。第五、六两章是研究如何求解正则方程，如泊松括号

和正则变换等内容又有助于量子力学的学习。在这里又进一步介绍了对称性（$\delta H=0$）与守恒量的关系。第七章讲述了狭义相对论力学和狭义相对论中带电粒子在电磁场作用下的拉格朗日表述和动力学方程．最后第八章仅对场的拉格朗日和哈米顿表述作了初步介绍，并介绍了如何通过作用量的不变性以及拉格朗日函数密度在洛伦兹变换下的不变性，找出已知场的拉格朗日函数密度，从而推出场方程、场的动量和能量等。并具体讨论了电磁场方程和电磁场的能量。本书选取这一章的目的是希望通过一般原理的经典讨论，对原理的意义有进一步理解，并对学习近代场论有所帮助。

在本书的编写过程中，我系喀兴林教授，刘锡陇、卢圣治和池无量副教授给予了热情的支持，提出了很多宝贵的具体修改意见，并提供了资料，在此表示感谢。

限于本人水平，书中一定有不少错误，恳切希望读者批评指正。

编　者

目　　录

引　言

分析力学是在18世纪由伯努利、达朗贝尔、拉格朗日等人创建，后由哈米顿、雅可比等人发展起来的，是经典力学的一分支.

1788年拉格朗日发表了他的著作《分析力学》，其主要内容现在称为拉格朗日力学．这部著作为分析力学奠定了基础．拉格朗日力学在表述形式和方法上都不同于我们所熟悉的矢量力学．矢量力学的基础是牛顿三定律．应用矢量力学曾解决了大量的力学问题，尤其是质点问题．但对于较复杂的力学系统，如大量存在于实际中的受约束系统，应用矢量力学就不方便了．矢量力学把物体运动状态改变的原因归结为力的作用，采用约束力来代替约束对系统运动的限制．而这些力都是加入运动方程的未知量．另外由于约束的存在，用来描述系统运动的坐标和速度也不完全独立，这就增加了求解运动方程的困难．拉格朗日引进了广义坐标、虚位移等概念，以虚位移原理为出发点建立了完整力学系统的拉格朗日方程，在这些方程中，消除了约束力，减少了运动方程数和方程中的未知量的个数．从而减少了求解方程的困难．其优点还在于拉格朗日力学分析问题侧重于能量，特别是对保守力学系统，方程中出现的物理量只有动能和势能函数，因而一力学系统在不同的广义坐标描述下拉格朗日运动方程将保持不变的形式，这就便于建立非惯性参考系中系统的运动方程.

1834年哈米顿引入了广义动量$\left(p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$的概念，用广义坐标和广义动量作为独立变量（称正则变量）来描述系统的状态．后又引入了哈米顿函数H，建立了另一组动力学方程（一阶微分方

程)——正则方程，并提出了著名的哈米顿变分原理。这些原理和方程的正则形式，对量子力学中建立薛定格方程和广义相对论等都提供了桥梁。

虚位移原理和哈米顿原理为分析力学的基本原理，与矢量力学的基本原理——牛顿三定律的区别是，后者为非变分原理，而前者则为变分原理(微分和积分的变分原理)。所谓变分原理即是从考察一切可能的运动中识别并挑选出实际运动，它比按矢量力学研究力学问题时(单纯考查实际运动)概括面广，理论更完整。

以上所述的力学原理，无论是变分或非变分的原理，都属于"经典力学"范畴。它们虽有不同的表述形式，但在一定的条件下是等效的。

本书为选修课分析力学，安排在理论力学课程之后。在理论力学课程中已经学习了分析力学的部分内容，如约束、虚位移、广义坐标等概念，和虚位移原理，并由此出发建立了拉格朗日第二类方程和哈米顿正则方程，以及这些方程的应用。因此我们不再重复以上内容，并以哈米顿原理作为力学的基本原理。从理论上推出拉格朗日方程和正则方程，以及求解动力学方程的研究。

分析力学研究的对象是 n 个质点 ($n=1$ 到 $n=\infty$) 组成的力学系统。为了确定系统的位置，和描述系统位置随时间的变化，我们通常是用三维的客观空间。n 个质点组成的力学系统，在三维空间中，是由 n 个位置矢量，或 $3n$ 个坐标来单值地确定 n 个质点在 t 时刻的位置。但是在一般问题的讨论中，我们常以 $3n$ 个坐标 ($x_1, x_2\cdots, x_{3n}$) 组成的一个 $3n$ 维正交空间中的一点来描述系统的位形 (位置与形状)。 这个空间称为笛卡尔坐标位形空间(简称 x 空间)。在位形空间中描述系统位形的点称为位形点。对于一个自由系统，位形空间的任一点与系统的可能位形一一对应。当系统的位形随时间的增加而改变时，位形点则在位形空间中划出一条曲线称为轨迹。如果是受约束的系统，x 空间中的任一点

不一定与系统的可能位形相对应。例如一个 $n=1$ 的系统（质点），令其坐标为 x_1, x_2, x_3，位形空间为 x_1, x_2, x_3 所组成的三维空间（也是客观的三维空间）。假若系统所受约束为 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-a^2=0$。则系统的可能位形只与 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 所确定的球面上的点相对应，如图(0-1(a))。若约束为$f_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2-a^2=0$ 和 $f_2=x_3-b=0(b<a)$ 时，则在 x 空间中，描述系统可能位形的点只能在 $f_1\cap f_2$ 所确定的曲线上如图 0-2(a)。

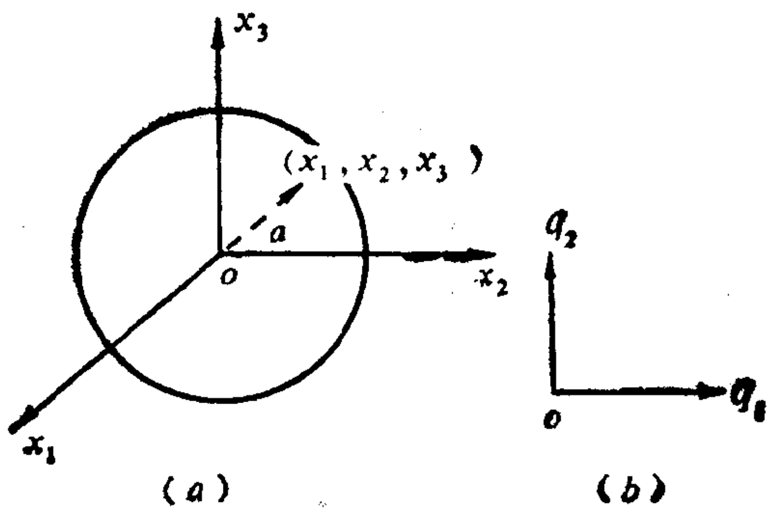

图 0-1

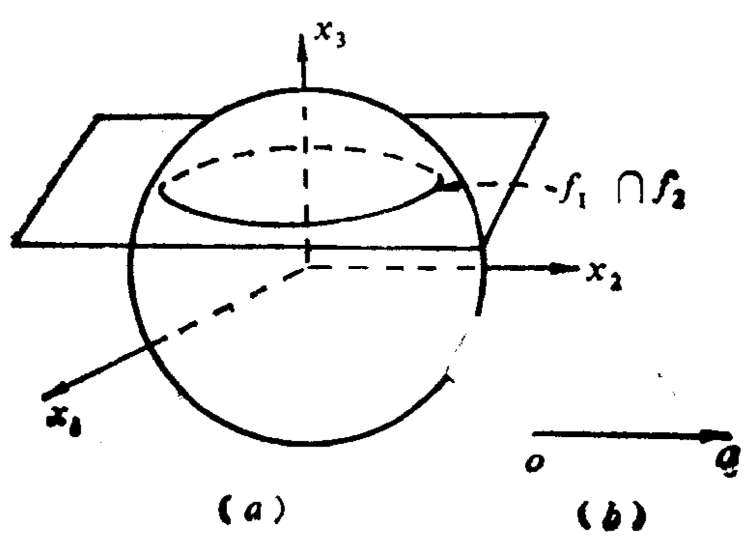

图 0-2

一般来说，对于 n 个质点的系统，其约束为 $f_l(x_1, x_2 \cdots x_{3n}, t) = 0 (l = 1 \cdots k)$ 时，则系统的自由度是 $s = 3n - k$. 假若我们选取 x 空间来描述系统的运动，那么，由上例可知，代表系统位形的点所能达到的空间只是由 k 个 $f_l = 0$ 表示的超曲面的交集所确定的子空间，即 $f_1 \cap f_2 \cdots \cap f_k$ 所确定的空间（x 的子空间）的点才与系统在约束条件下的可能位形一一对应。

而当我们采用广义坐标 $q_1 \cdots q_s$（s 为自由度）来描述系统的运动时，我们则可以 s 个广义坐标为轴组成一个 s 维的位形空间（简称 q 空间）来描述系统的位形及位形的变化。在 q 空间中，因为各坐标 q_i 是独立的，因此在此空间中任一点与受约束系统的可能位形一一对应。如前例，对同一系统，其可能位形只与 x 空间如图 0-1(a) 中球面上的点对应，而在 q 空间图 0-1(b) 中则与任一点对应，即 q 空间中，位形是自由的。同样图 0-2(b) 是与图 0-2(a) 对应的 q 空间。由于 q 空间中位形点不受约束，以后在大多数情况下我们将采用 q 空间。

在位形空间中，时间 t 是参量。但有时我们将在 s 维位形空间上增添一时间轴形成一个 $s+1$ 维的空间，此空间中每一点不仅表示出系统的位形，并指出了出现这一位形的时刻，此空间称为事件空间。

最后来介绍相空间的概念，我们知道，一个系统在某个时刻的状态是由系统的坐标和动量来描述，因此我们以 s 个广义坐标 q_1, $q_2 \cdots q_s$ 和它的 s 个共轭广义动量 $p_1, p_2 \cdots p_s$ 为坐标轴构成一个 $2s$ 维的空间称为相空间。q_j, $p_j (j = 1 \cdots s)$ 的一组值就对应相空间一个点。也就是说，相空间的一个点表示系统的在给定时刻的力学状态。

第一章　变分原理和拉格朗日方程

在本书中，我们以哈米顿原理为力学的基本原理，由它出发推导出力学系统的运动方程。

哈米顿原理和下一章要讲到的最小作用原理，都是积分形式的变分原理。因此在数学工具上要涉及变分法，我们在本章的开始，先对变分法作简单的介绍，然后，讨论哈米顿原理和运动方程。

§1.1　变分法初步

1. 变分问题

变分法是研究泛函极值的方法。所谓泛函就是指一个变量，它的值依赖于一个或者几个函数的选取而确定的。如图 1-1 通过 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$ 两点，由函数 $y=y(x)$ 来确定的平面曲

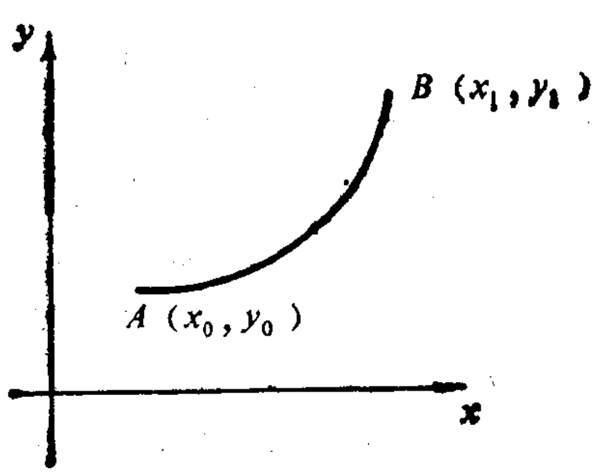

图 1-1

线的弧长为 l:

$$l = \int_{C_1} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x \qquad (1.1.1)$$

式中 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 如果选取另一条曲线 C_2, 则 l 的值也将随着曲线形状的改变而改变。因此 l 值取决于整个函数 $y = y(x)$。即 $l = l[y(x)]$。 又如一质点沿着光滑平面轨道 $y(x)$ 从 A 自由下滑到 B 所需的时间如图 1-2:

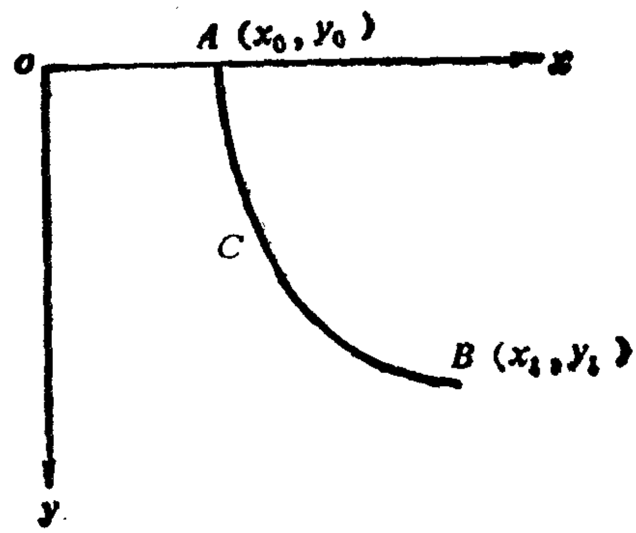

图 1-2

$$T = \int_{ACB} \mathrm{d}t = \int_{ACB} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\, \mathrm{d}x \qquad (1.1.2)$$

如果轨道选取不同，则从 A 到 B 所需时间 T 也随之而异。时间 T 取决于 $y = y(x)$ 确定的整个轨道的形状,即 $T = T[y(x)]$。无论是 l 或 T, 它们的值都是由函数 $y = y(x)$ 的选取而确定的. 即它们的值依赖于一个或几个函数。于是变量 l 和 T 都是泛函。

泛函和函数两个概念是不同的。函数所表示的是因变量的数值与自变量的数值的对应关系 $y = y(x)$。其中 x 为自变量, y 是因变量(即函数)。而泛函所表示的则是因变量与某一个或几个函

数的对应关系。即 l（或 T）取决于函数 $y(x)$，而不取决于一个或若干个 y 的值。

变分法是研究泛函极值的方法，凡是有关求泛函的极大值和极小值的问题，都叫做变分问题。对于变分法的发展有着巨大影响的是：(1) 最速落程问题；(2) 短程线问题；(3) 等周问题。以最速落程问题为例来说明。最速落程问题就是求一被限制在一垂直平面上且仅受重力作用的质点，从 A 沿轨道自由下滑到另一点 B 所需时间最短的曲线。如图 1-2 所示。求

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\,dx$$

在 $y_0 = y(x_0)$ 和 $y_1 = y(x_1)$ 的条件下取极值时的曲线函数 $y = y(x)$。这就是泛函 $T[y(x)]$ 的极值问题。也称为变分问题。

2. 变分的定义及其运算特性

函数的微小变更称为变分。函数的变分与函数的微分有严格的区别。在讨论函数的微分时自变量改变，从而引起函数的改变。但是变分则是讨论自变函数 $y(x)$ 的改变。

设有 x 的函数 $\tilde{y}(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ 集合，即在 x，y 空

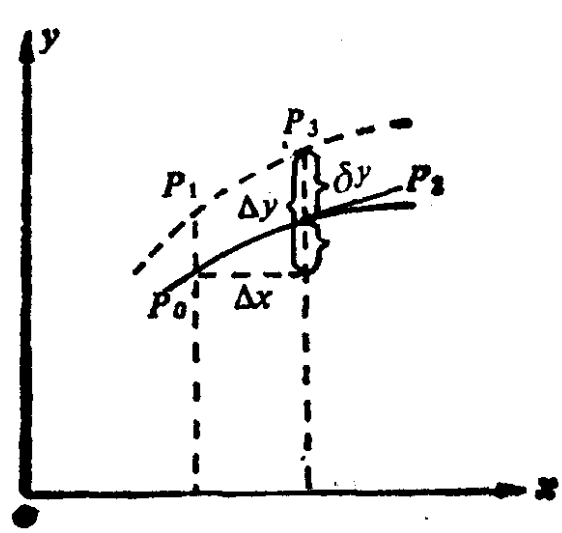

图 1-3

间的一组曲线集合。α 是小参量，$\eta(x)$ 是 x 的任意可微函数(如图 1-3)。$y(x)$ 为 $\alpha=0$ 时的函数 $\tilde{y}(x, 0)=y(x)$。由函数 $y(x)$ 描述的曲线变化到 $\tilde{y}(x)$ 时，可取曲线 $y(x)$ 上的点，在 x 不变的条件下变到 $\tilde{y}(x, \alpha)$ 曲线上的对应点而得到。如 P_0 到 P_1，P_2 到 P_3……等。也可以由 P_0 到 P_3 等各对应点的改变来得到，这时变量 x 同时发生了改变。我们把前一种方式各对应点纵坐标的差(或函数值之差)，叫做变分或等时变分。而后一种方式各对应点函数值之差则称为全变分。

于是等时变分的定义可以表述为：在自变量 x（在力学上常以 t 为自变量)不变的条件下，$y(x)$ 的变更为

$$\delta y=\tilde{y}(x, \alpha)-y(x)=\alpha\eta(x) \tag{1.1.3}$$

或可写为

$$\delta y=\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.1.4}$$

这里需要注意 δy 与微分 $\mathrm{d}y$ 的区别，$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$、函数 y 的微分 $\mathrm{d}y$ 是由于自变量变化 $\mathrm{d}x$ 而引起的变化。

等时变分和微分运算可交换顺序，因为自变量 x 与变分 δ 无关。将等式 (1.1.3) 对 x 取导数得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)=\tilde{y}'(x, \alpha)-y'(x)=\alpha\eta'(x) \tag{1.1.5}$$

另一方面按照等时变分的定义，若取函数集合

$$\tilde{y}'(x, \alpha)=y'(x)+\alpha\eta'(x) \tag{1.1.6}$$

于是

$$\delta y'=\tilde{y}'(x, \alpha)-y'(x)=\alpha\eta'(x) \tag{1.1.7}$$

由式 (1.1.5) 与 (1.1.7) 式得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)=\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta = \delta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \tag{1.1.8}$$

现考虑任何一函数 $F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$，将 $\tilde{y}(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ 代入F得 $F(x, y + \alpha\eta(x), y' + \alpha\eta'(x))$。再将$F$在 $\alpha = 0$ 处展开，并略去二次小量即可得：

$$F(x, y + \alpha\eta(x), y' + \alpha\eta'(x)) = F(x, y, y') + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\alpha=0} \alpha\eta(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{\alpha=0} \alpha\eta'(x)$$

则可定义

$$\delta F = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\alpha=0} \delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{\alpha=0} \delta y' \tag{1.1.9}$$

可见，δF 正是由于 δy、$\delta y'$ 引起的函数F的变化，我们称它为函数F的变分。式中

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha = \eta(x)\alpha,\ \delta y' = \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha = \eta'(x)\alpha.$$

因此，对于任一泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

也是一种函数，所以其变分可写为

$$\begin{aligned}\delta J &= J[y(x) + \delta y] - J[y(x)] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x) + \delta y, y'(x) + \delta y')\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将 (1.1.9) 式代入则

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta F\mathrm{d}x \tag{1.1.10}$$

即当积分变量与变分无关时(即等时变分)，变分 δ 与积分符号可以互换。

关于 y 的全变分则是表示自变量 x 随变分而改变的变分。我们用符号 Δ 来表示。假设

$$\tilde{x}=x+\alpha\xi(x)$$

$\xi(x)$ 为任意可微函数，而且

$$\Delta x=\tilde{x}-x=\alpha\xi(x)\neq 0 \tag{1.1.11}$$

则函数 y 的全变分为

$$\begin{aligned}\Delta y&=\tilde{y}(x+\Delta x)-y(x)\\&=y(x+\Delta x)+\alpha\eta(x+\Delta x)-y(x)\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

根据等时变分和微分的定义

$$\Delta y=y'\Delta x+\delta y \tag{1.1.13}$$

于是全变分可理解为在自变量不变的条件下函数形状的改变和因自变量改变而引起的函数的改变的总和。

全变分 Δ 和对 x 的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 不具有交换性质。我们对(1.1.13)式取导数得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta y&=y''\Delta x+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\\&=\delta y'+y''\Delta x+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta x\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

但对 y' 的全变分，根据全变分定义为

$$\Delta y'=\delta y'+y''\Delta x \tag{1.1.15}$$

由(1.1.14)和(1.1.15)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta y=\Delta y'+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta x\neq\Delta y' \tag{1.1.16}$$

只有在 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta x=0$ 时，也就是等时变分时，才有