

近代原子核模型

廖继志 编著

四川大学出版社

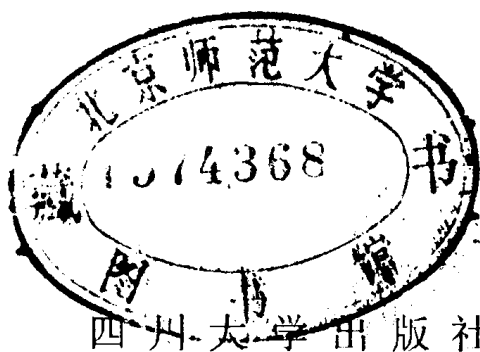
MODERN
NUCLEAR
MODELS



791115 (2)

近代原子核模型

廖继志 编著



四川·太·学·出·版·社

内 容 提 要

本书系统地介绍近代核结构研究中一些常用模型的理论及其应用。主要包括：原子核中的等效相互作用矩阵元，壳模型和大空间壳模型，与原子核振动、转动和粒子自由度与集体自由度的耦合相关的一些模型，原子核 $SU(3)$ 模型，相互作用玻色子和相互作用玻色子-费米子模型，集体势能面与过渡核结构模型， γ -不稳定模型、三轴转子加准粒子模型和广义集体模型等。本书比较重视实际应用，相当大一部分内容，读者可以直接用于实际计算。

本书可作为核物理与核技术专业、理论物理专业研究生的教材，本科生选修课教学参考书，也可供核物理、核化学、理论物理等领域有关教师和科学研究人员参考。

近 代 原 子 核 模 型

廖继志 编著

责任编辑：杨守智 封面设计：黎 明

四川大学出版社出版发行(四川大学校内)

四川省新华书店经销 成都教育印刷厂印刷

四川省华夏信息工程公司照排站排版

开本 787×1092 1/16 印张 23.38 字数 460 千

1990 年 12 月第 1 版 1990 年 12 月第 1 次印刷

印数：0001-1400 册

ISBN7-5614-0323-2/O·47 定价：4.60 元

前 言

本书是在四川大学物理系原子核结构模型理论课程讲义的基础上修改、补充而成的。它可作为核物理和核技术专业、理论物理专业研究生必修课教材，本科生选修课的教学参考书，也可供有关教师和科学研究人员参考。本书着重阐述核结构模型的基本思想、物理基础、理论框架和处理实际问题的分析、计算方法。对于一些重要的前沿领域也作了必要的介绍。编写中重视理论的实际应用，书中涉及的一些理论结果已表示为可以直接应用的形式。有些内容，读者仅需参考少量专门文献即可开展工作。阅读本书的读者需具有量子力学和原子核物理基础知识。为了方便读者，在书末的附录中列出了有关角动量理论、空间转动、时间反演等方面的一些有用的公式，供正文的推导引用，附录中的公式编号一律冠以英文字母 A，以区别于正文的公式。

本书系统地介绍常用的主要低能核结构模型及其应用。全书内容可分成三大部分：第一、二章为第一部分，讲述原子核中的等效相互作用矩阵元和壳模型。第二部分包括第三、四、五章和第八章，讨论原子核集体运动的各种几何模型和势能面理论。第六、七两章构成第三部分，介绍核结构的代数模型，涉及较多的群论知识，但偏重于群论的应用而略去了大部分数学过程。三部分内容相对独立，可选择讲授。未学过群论的读者可以只读第一至五章和第八章中的 § 8.1、§ 8.4、§ 8.7 和 § 8.8 等节。

由于篇幅的限制还有一些有用的模型不能介绍，只好忍痛割爱了。

编 者

1989 年 12 月于成都

目 录

第一章 原子核内的等效相互作用

§ 1.1 谐振子势的单粒子能级和波函数	(1)
§ 1.2 二粒子组态中态的分类	(5)
§ 1.3 δ -相互作用矩阵元	(8)
§ 1.4 表面 δ -相互作用和修正的表面 δ -相互作用	(11)
§ 1.5 有限力程自旋相关中心相互作用矩阵元	(14)
§ 1.6 经验的等效相互作用矩阵元	(20)

第二章 原子核壳层模型

§ 2.1 壳模型组态的可能态	(25)
§ 2.2 二核子体系的能谱	(31)
§ 2.3 粒子——空穴组态	(35)
§ 2.4 j^n 组态的波函数和能谱	(41)
§ 2.5 $(\pi j^n)(\nu j^n)$ 组态的波函数和能谱	(49)
§ 2.6 (j^{n+1}) 纯组态模型中的核性质	(54)
§ 2.7 多粒子体系中的组态混合	(61)
§ 2.8 Lanczos 方法和大空间壳模型计算	(67)

第三章 原子核的表面振动和集体势能面

§ 3.1 集体坐标和正则共轭集体动量	(73)
§ 3.2 原子核四极集体运动哈密顿的一般形式	(79)
§ 3.3 原子核表面的简谐振动	(84)
§ 3.4 简谐振动模型的几个应用	(91)
§ 3.5 粒子与振动场的耦合——弱耦合模型	(97)
§ 3.6 本体坐标系中的基本变换	(101)
§ 3.7 四极集体势能面的示意模型	(106)

第四章 变形原子核的集体运动模型

§ 4.1 转动——振动模型(RVM)的哈密顿量	(114)
§ 4.2 转动——振动模型哈密顿的零级解	(121)
§ 4.3 RVM 零级波函数的对称化	(125)
§ 4.4 转动——振动相互作用引起的带混合	(129)
§ 4.5 非轴对称转子模型(ARM)	(137)
§ 4.6 集体能级之间的电四极跃迁	(145)
§ 4.7 偶偶核基态带能谱的唯象公式	(151)

第五章 强耦合近似和高速转动核结构

§ 5.1 轴对称变形壳模型	(163)
§ 5.2 强耦合近似哈密顿量及其零级解	(171)
§ 5.3 变形奇 A 核能谱的带结构	(177)
§ 5.4 单粒子运动与集体运动的耦合	(180)
§ 5.5 变形奇核的能谱	(185)
§ 5.6 变形奇 A 核的磁矩和 $M1$ 跃迁几率	(187)
§ 5.7 原子核的转动惯量	(194)
§ 5.8 无排列极限与脱耦合极限	(198)
§ 5.9 Y_{rast} 带的结构和回弯现象	(204)
§ 5.10 转动势场中的单粒子能级	(211)
§ 5.11 高自旋态实验数据的分析	(217)

第六章 原子核 $SU(3)$ 模型

§ 6.1 哈密顿量的对称性群和本征态的分类	(224)
§ 6.2 谐振子与群 $SU(3)$	(227)
§ 6.3 杨图和杨盘	(230)
§ 6.4 同时按 S_n 和 $SU(3)$ 分类	(230)
§ 6.5 按 $SU(3) \supset SO(3)$ 分类	(240)
§ 6.6 按 $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ 分类	(241)
§ 6.7 好角动量波函数的构造	(246)
§ 6.8 等效相互作用和 $SU(3)$ 的 Casimir 算子	(249)

第七章 相互作用玻色子模型

§ 7.1 相互作用玻色子模型哈密顿量	(255)
§ 7.2 玻色子态矢量按 $U(6)$ 及其子群链的分类	(259)
§ 7.3 IBM 的 $U(5)$ 极限	(265)
§ 7.4 IBM 的 $O(6)$ 极限	(270)
§ 7.5 IBM 的 $SU(3)$ 极限	(275)
§ 7.6 s. d. g. IBM 的三种极限	(280)
§ 7.7 质子玻色子与中子玻色子——IBM-2	(286)
§ 7.8 相互作用玻色子—费米子模型	(289)

第八章 过渡核的结构和广义集体模型

§ 8.1 四极集体运动模型哈密顿量	(296)
§ 8.2 五维谐振子本征态的分类	(299)
§ 8.3 集体势能面和偶偶核能谱	(306)
§ 8.4 过渡奇 A 核的 γ 不稳定模型	(315)
§ 8.5 五维谐振子的解析波函数	(321)
§ 8.6 广义集体模型	(325)
§ 8.7 三轴转子加准粒子模型	(335)

附 录	(346)
参考文献	(362)

第一章 原子核内的等效相互作用

大量实验事实表明, 原子核的某些性质随着核所包含的质子数和中子数的增加呈现明显的周期性变化。标志这种周期的质子数和中子数为 2、8、20、28、50、82 和中子数 126。这些数目称为幻数。幻数在核结构中的地位与电子壳层数在原子结构中的地位相当。这表明原子核内存在着某种壳层结构, 幻数正是较低壳层被完全填满时的质子数或中子数。如果把一个处于基态或接近基态的相互作用着的费米子体系当成一个在某种有心场(平均场)中独立运动的无相互作用的多粒子体系来处理, 就可以再现这些幻数。这种近似就是独立粒子模型。

然而, 独立粒子模型只能描述十分有限的核现象。这是因为平均场不能包含核子间的全部相互作用, 二者之差称为剩余相互作用。剩余相互作用的强度虽然比平均场弱得多, 但是它对原子核的性质有巨大的影响。在处理低能核性质时可以认为剩余相互作用基本上是两体相互作用。由于核力的真实形式还不清楚, 人们只好采用等效相互作用。在用壳层模型或原子核多体理论计算核能谱和波函数时, 真正需要的只是等效相互作用在二粒子态间的矩阵元。

本章首先讨论球对称中心场中的单粒子态, 然后研究等效相互作用两体矩阵元的计算问题。

§ 1.1 谐振子势的单粒子能级和波函数

独立粒子模型的基本假定是, 核内核子在一个稳定的球对称平均势场 $U(r)$ 中独立地运动, 互不干扰。因此单粒子薛定格方程可写成

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(r) \right] u(r) = Eu(r) \quad (1.1)$$

用分离变量法求解。令

$$u(r) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \quad (1.2)$$

代入(1.1)式即可得到径向薛定格方程

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{nl} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R_{nl} + \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = 0 \quad (1.3)$$

中心势 $U(r)$ 可以有各种选择, 如直角势阱, 谐振子势, 指数势和 Woods-Saxon 势

等。若用三维谐振子势

$$U(r) = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \quad (1.4)$$

则方程(1.3)的归一化解为

$$R_{nl}(r) = \left[\frac{2^{l-n+3} (2l+2n-1)!! \alpha^3}{(n-1)! \sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} (\alpha r)^l e^{-\frac{1}{2}(\alpha r)^2} \\ \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 2^k (n-1)! (\alpha r)^{2k}}{k! (n-1-k)! (2l+2k+1)!!}; \quad \alpha^2 = M\omega / \hbar \quad (1.5)$$

上式中 M 是核子质量, ω 是振子频率。对应的能量本征值是

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(2n + l - \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (1.5a)$$

这里 $n=1, 2, 3, \dots$ 为径向量子数, $N=2(n-1)+l$ 为主量子数, $l=0, 1, 2, \dots$ 为轨道角动量量子数。对于给定的主量子数 N , 本征态是简并的。 N 为偶数时, l 可以取从 0 到 N 的所有偶数, 简并度是 $\frac{1}{2}N+1$; N 为奇数时, l 可以取从 1 到 N 的所有奇数值, 简并度是 $\frac{1}{2}(N+1)$ 。另外还有对轨道角动量投影量子数 m_l 的简并和对自旋投影的简并。所以每一个 l 为定值的态可以容纳的全同粒子数为 $2(2l+1)$ 。但是谐振子势给出的幻数, 除最小的三个(2, 8, 20)外都不正确。

经验表明, 为了得到 126 以内的全部幻数, 必须在平均场中加入能解除不同 l 值能级简并的 $\mathbf{l}^2$ 项和自旋——轨道耦合项 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$:

$$U(r) = -V_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 + C\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} + D\mathbf{l}^2 \quad (1.6)$$

式中 C 和 D 都是与 r 无关的负值常数, 代表相应项的强度。加上 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ 项之后, 单粒子的自旋与轨道角动量耦合成总角动量 $\mathbf{j}$: $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ 。对应的波函数记为 $|nljm\rangle \equiv |jm\rangle$:

$$|jm\rangle = R_{nl}(r) \sum_{m_l} \left(lm_l \frac{1}{2}m - m_l \middle| jm \right) Y_{lm_l}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2}, m-m_l} \quad (1.7)$$

这里 $\left(lm_l \frac{1}{2}m - m_l \middle| jm \right)$ 是 CG 系数。由于 C, D 都与 r 无关, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ 和 $\mathbf{l}^2$ 在 $|jm\rangle$ 态中是对角的, 所以径向波函数仍由(1.5)式确定, 但能量本征值变成

$$E_{nlj} = \hbar\omega \left(2n + l - \frac{1}{2} \right) + D l(l+1) + \alpha \begin{cases} -l & j=l+\frac{1}{2} \\ l+1 & j=l-\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.8)$$

式中 $\alpha = -\hbar^2 C / 2$ 。这样, 谐振子能级的简并被部分地解除, N 为定值的能级发生分

裂。图 1.1 显示出 $N=4$ 的振子能级的分裂情况。分裂后能级具有确定的 nlj 值。 $l=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 的态分别用字母 s, p, d, f, g, h, i, j 来表示。 j 为定值的每个态可以容纳 $2j+1$ 个同类核子。

由于 l^2 分裂使每一振子壳层的最大 l 能级下降最大，而自旋——轨道分裂使 j 值最大的能级下降到较低的一个振子壳层的能级群之中，改变了能级分布状况形成了具有正确幻数的主壳层。这样得到的单粒子能级图和壳层划分见图 1.2。

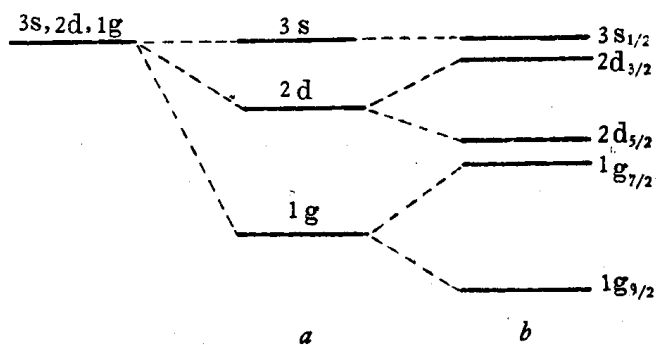


图 1.1 l^2 和 $l \cdot s$ 引起的诸振子能级分裂

a. l^2 分裂; b. $l \cdot s$ 分裂

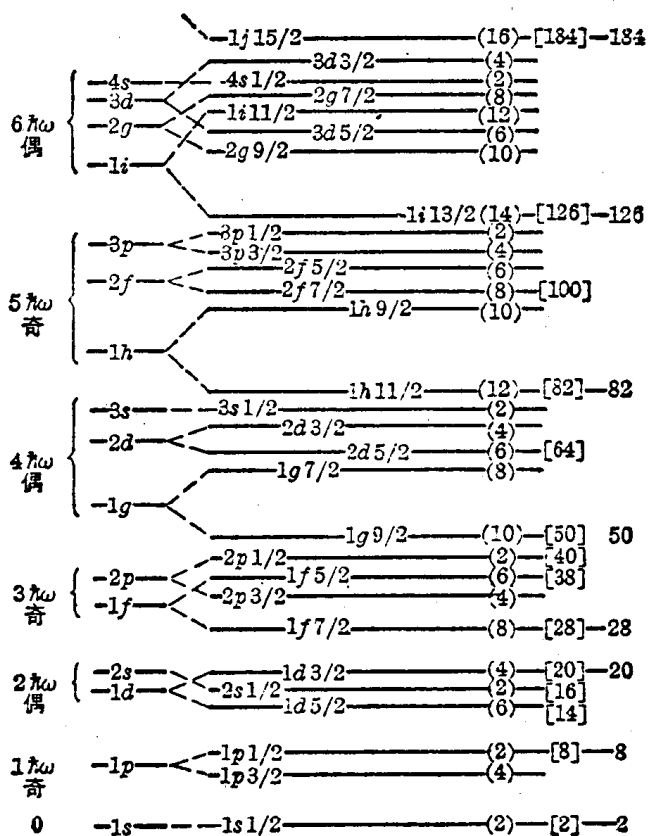


图 1.2 独立粒子模型单粒子能级图

在用谐振子波函数进行核结构计算时，需要振子能量 $\hbar\omega$ 的值。通过对振子势中 A 个粒子的总能量的计算可以求出

$$\hbar\omega = 41A^{-1/3} \quad (1.9)$$

对于不同的质量区上式中的常数 41 可以作小的调整。在核性质研究中常常需要计算 $r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$ 的矩阵元，当使用谐振子波函数(1.5)式时，直接计算给出

$$\begin{aligned} \langle n'l'|r^\lambda|nl\rangle &= \left(\frac{\hbar}{M\omega}\right)^{\lambda/2} \left[\frac{1 + (-1)^{l+l+\lambda}}{2} \right] \\ &\times \left[\frac{(n'-1)!(n-1)!(2l'+2n'-1)!!(2l+2n-1)!!}{2^{n+n'}} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{kk'} \frac{(-1)^{k'+k} (l'+l+\lambda+2k'+2k+1)!!}{k'!k!(n'-k'-1)!(n-k-1)!(2l'+2k'+1)!!(2l+2k+1)!!} \end{aligned} \quad (1.10)$$

球谐函数 $Y_{\lambda\mu}$ 在单粒子态 $|nljm\rangle$ 中的约化矩阵元公式见附录中的(A3.11)式。

独立粒子模型对满壳层附近原子核的基态自旋、宇称和磁矩的数量级能作出正确的预言，有关问题已在原子核物理课中讨论过了。这里只简短讨论满壳层加一个质子的原子核的电四极矩，即单质子的电四极矩。电四极矩算符为

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \quad (1.11)$$

Q_{20} 在单粒子态 $|nljm\rangle$ 中的期待值很容易由(1.11)和(1.7)式求出

$$\begin{aligned} Q_j^m &\equiv \langle nljm|Q_{20}|nljm\rangle \\ &= \langle nl|r^2|nl\rangle \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_{\sigma} \left(lm - \sigma \frac{1}{2} \right) \int Y_{l,m-\sigma}^* Y_{20} Y_{l,m-\sigma} d\Omega \\ &= 2\langle nl|r^2|nl\rangle \sum_{\sigma} \left(lm - \sigma \frac{1}{2} \right) (lm - \sigma 20 | lm - \sigma) (l020 | l0) \end{aligned}$$

计算中用了附录中列出的三个球谐函数的积分公式(A1.36)。利用 C-G 系数的性质和表示式将上式化简后可得

$$Q_j^m = -\frac{3m^2 - j(j+1)}{2j(j+1)} \langle nl|r^2|nl\rangle \quad (1.12)$$

令 $m=j$ 即得单质子的电四极矩

$$Q_j \equiv Q_j^j = -\frac{2j-1}{2j+2} \langle nl|r^2|nl\rangle \quad (1.13)$$

径向矩阵元 $\langle nl|r^2|nl\rangle$ 可用(1.10)式计算。由(1.12)式看出， $Q_j^m = Q_j^{-m}$ 。 j 壳层填满时核的电四极矩为

$$\begin{aligned}\sum_{m=-j}^j Q_j^m &= 2 \sum_{m=-1/2}^j Q_j^m = \langle r^2 \rangle \sum_{m=-1/2}^j \left[1 - \frac{3m^2}{j(j+1)} \right] \\ &= \langle r^2 \rangle \left[\left(j - \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{3}{j(j+1)} \cdot \frac{1}{6} j(j+1)(2j+1) \right] = 0\end{aligned}$$

由此得出结论，满壳层核的电四极矩等于零。这是满壳层核具有球对称性的基本含义。要计算 j 轨道中有 $Z=2n+1$ 个质子 (n 为整数) 的核的电四极矩，需首先构造 Z 质子态的波函数然后求 Q_{20} 的期待值。结果是

$$Q(Z) = \left[1 - \frac{2(Z-1)}{2j-1} \right] Q_j^j, \quad Z = 1, 3, 5, \dots, 2j \quad (1.14)$$

由此很容易求出单个质子空穴，即 $Z=2j$ 态的电四极矩

$$Q(2j) = -Q_j^j = -Q(1) \quad (1.15)$$

这样，独立粒子模型预言，满壳层加、减一个质子的原子核的电四极矩反号。实验数据证实了这一结论。但是单粒子模型计算的 Q 值太小，一般在 10^{-26} 至 $5 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ 之间，而实验电四极矩大部分为 10^{-24}cm^2 数量级。同时在 $N=82$ 到 126 之间的奇中子核也有大的正值电四极矩。这些都说明原子核中核子间存在着关联因而产生了其它运动形态。

§ 1.2 二粒子组态中态的分类

根据独立粒子模型，核内核子从最低能量开始依序填充 nlj 为定值的单粒子能级。核子在单粒子能级中的一种分布方式称为组态。一个指定核子的能量等于它所在单粒子态的能量。无相互作用时，组态的能量等于它所包含的核子的能量之和。能量最低的组态称为基态组态，其余的都是激发组态。习惯上略去满壳层只写出外围核子(或价核子)的组态。例如 ^{43}Sc 核由 ^{40}Ca 核心加一个质子两个中子组成，基态组态可写成 $(\pi 1f_{7/2})^1 (\nu 1f_{7/2})^2$ ；激发组态之一是 $(\pi 2p_{3/2})^1 (\nu 1f_{7/2})^2$ 这里 π 代表质子， ν 代表中子。

当核子间存在相互作用时，核哈密顿量为

$$H = \sum_i \left[T(i) + U(i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(i, j) \quad (1.16)$$

式中第一项为独立粒子模型哈密顿，第二项是剩余相互作用，基本上是一种两体相互作用。根据微扰论，可以先求解零级哈密顿 $H_0(i) = T(i) + U(i)$ 的本征值问题

$$H_0(r_i) \phi_\alpha(r_i) = \varepsilon_\alpha \phi_\alpha(r_i) \quad (1.17)$$

若 $U(i)$ 取(1.6)式，则量子数 α 代表 $(n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\alpha)$ ，即球对称解。然后在一定的简并子空间内构造 H 的本征态，建立对应的能量矩阵并将它对角化即可求出(1.16)式的解。

最简单的情形是在满壳层外只有二个核子的体系，即二粒子组态的问题。设二粒子分别处在 $n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\alpha$ 和 $n_\beta l_\beta j_\beta m_\beta$ 轨道上，零级能量是 $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$ 。对应于此能量的本征态是 $(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)$ 度简并的。这一组简并态可以用史拉特行列式表示

$$\Phi(m_\alpha, m_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(1) & \phi_\alpha(2) \\ \phi_\beta(1) & \phi_\beta(2) \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

波函数 $\Phi(m_\alpha, m_\beta)$ 对二粒子交换是反对称的，但没有确定的角动量。考虑到相互作用，二粒子角动量 j_α 和 j_β 可以矢量耦合合成总角动量 $J = j_\alpha + j_\beta$ 。于是可以用 C-G 系数将 m -系统波函数(1.18)变换到 J -系统，从而得到具有确定角动量的态：

$$|j_\alpha j_\beta JM\rangle = \sum_{m_\alpha m_\beta} (j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM) \Phi(m_\alpha, m_\beta), \quad \alpha \neq \beta \quad (1.19)$$

$$J = |j_\alpha - j_\beta|, |j_\alpha - j_\beta| + 1, \dots, j_\alpha + j_\beta$$

J -系统波函数的总数仍为 $(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)$ 个，本征能量都是 $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$ 。

现在来证明一个重要的定理：剩余相互作用 $v(12)$ 在 JM 一定的态中是对角的，而且能量修正与 M 值无关。证明很容易，因为 $v(12)$ 必须是转动不变的标量(即零阶球张量)，故由 Wigner-Eckart 定理(A3.7)和 C-G 系数的公式(A2.8)、(A2.16)可得

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha j_\beta J'M' | v(12) | j_\alpha j_\beta JM \rangle &= (JM00 | J'M') (j_\alpha j_\beta J' \| v \| j_\alpha j_\beta J) \\ &= (-1)^{J'-M} \sqrt{2J'+1} (JM J' - M | 00) (j_\alpha j_\beta J' \| v \| j_\alpha j_\beta J) \\ &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} (j_\alpha j_\beta J' \| v \| j_\alpha j_\beta J) \end{aligned} \quad (1.20)$$

得证。这样，相互作用 v 引起的能量修正为

$$E(j_\alpha j_\beta JM) \equiv \langle j_\alpha j_\beta JM | v(12) | j_\alpha j_\beta JM \rangle = (j_\alpha j_\beta J \| v \| j_\alpha j_\beta J) \quad (1.21)$$

这个能量修正值与 M 无关，对不同 J 值的态有不同的值。因此态的简并被部分地解除，原来的 $(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)$ 维空间被分解成若干个 J 为定值的简并子空间，每个子空间的维数是 $2J+1$ 维。或者说二粒子组态的态可以按 JM 来分类。

对于同一轨道上的两个同类核子， $(n_\alpha l_\alpha j_\alpha) = (n_\beta l_\beta j_\beta) = (nlj)$ ，波函数(1.19)需要重新归一化。事实上，令 $|jjJM\rangle \equiv |j^2 JM\rangle$ ，则

$$\begin{aligned} \langle j^2 JM | j^2 J'M' \rangle &= \sum_{m_\alpha m_\beta} \sum_{m'_\alpha m'_\beta} (j m_\alpha j m_\beta | JM) (j m'_\alpha j m'_\beta | J'M') \\ &\times \frac{1}{2} \iint [\phi_{m_\alpha}(\mathbf{r}_1) \phi_{m_\beta}(\mathbf{r}_2) - \phi_{m_\alpha}(\mathbf{r}_2) \phi_{m_\beta}(\mathbf{r}_1)]^* [\phi_{m'_\alpha}(\mathbf{r}_1) \phi_{m'_\beta}(\mathbf{r}_2) - \phi_{m'_\alpha}(\mathbf{r}_2) \phi_{m'_\beta}(\mathbf{r}_1)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &= \sum (j m_\alpha j m_\beta | JM) (j m'_\alpha j m'_\beta | J'M') [\delta_{m_\alpha m'_\alpha} \delta_{m_\beta m'_\beta} - \delta_{m_\alpha m'_\beta} \delta_{m_\beta m'_\alpha}] \\ &= [1 - (-1)^{2j-J}] \delta_{JJ'} \delta_{MM'} = \begin{cases} 0, & \text{当 } J \text{ 为奇数} \\ 2\delta_{JJ'} \delta_{MM'}, & \text{当 } J \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

计算中用了 C-G 系数的正交性(A2.4)和对称性(A2.6)。上式表明, j 轨道上的一对全同粒子的波函数为

$$|j^2 JM\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_\alpha, m_\beta} (j m_\alpha j m_\beta | JM) \Phi(m_\alpha, m_\beta) \quad (1.22)$$

$$J = 0, 2, 4, \dots, 2j-1$$

即, 全同粒子的 j^2 组态只有 J 为偶数的状态, 不存在 J 为奇数的状态。

二核子体系有质子-质子体系, 中子-中子体系和质子-中子体系三种。如果零级哈密顿 H_0 与电荷无关, 则由一个质子与一个中子构成的体系的态 $|j_\alpha^{(p)} j_\beta^{(n)} JM\rangle$ 与 $|j_\alpha^{(n)} j_\beta^{(p)} JM\rangle$ 是简并的。这里 $j_\alpha^{(p)} j_\beta^{(n)}$ 表示质子在 α 态中子在 β 态。质子与中子都是费米子, 故体系波函数相对于粒子 1, 2 所有量子数的交换应该是反对称的。于是有

$$|j_\alpha^{(p)} j_\beta^{(n)} JM\rangle_0 = \frac{1}{2} \sum_{m_\alpha, m_\beta} (j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM) \left[\phi_\alpha(1) \phi_\beta(2) + \phi_\alpha(2) \phi_\beta(1) \right] \times \left[p(1)n(2) - p(2)n(1) \right] \quad (1.23a)$$

$$|j_\alpha^{(p)} j_\beta^{(n)} JM\rangle_1 = \frac{1}{2} \sum_{m_\alpha, m_\beta} (j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM) \left[\phi_\alpha(1) \phi_\beta(2) + \phi_\alpha(2) \phi_\beta(1) \right] \times \left[p(1)n(2) + p(2)n(1) \right] \quad (1.23b)$$

这里 r_i 被省写成(1), $p(i)$ 、 $n(i)$ 分别是质子态、中子态电荷波函数。波函数(1.23a)对二粒子的空间、自旋坐标的交换是对称的, 对电荷交换是反对称的; 波函数(1.23b)正好相反, 对空间、自旋交换是反对称的, 对电荷交换是对称的。为了统一描述三种二核子体系, 可采用显含同位旋的波函数。

二核子体系的总同位旋 T 为

$$T = \frac{1}{2} [\tau(1) + \tau(2)] \quad (1.24)$$

τ 是泡利矩阵, 核子同位旋 $t = \frac{1}{2}\tau$, t 的 z 分量 $\tau_z = \pm \frac{1}{2}$ 。规定 $\tau_z = \frac{1}{2}$ 代表质子态, $\tau_z = -\frac{1}{2}$ 代表中子态。二核子体系的总同位旋量子数 $T = 0, 1$ 两个值。由于二质子和二中子体系的波函数

$$|j_\alpha^{(p)} j_\beta^{(p)} JM\rangle = \sum_{m_\alpha, m_\beta} (j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM) \Phi(m_\alpha, m_\beta) p(1)p(2) \quad (1.25a)$$

$$|j_\alpha^{(n)} j_\beta^{(n)} JM\rangle = \sum_{m_\alpha, m_\beta} (j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM) \Phi(m_\alpha, m_\beta) n(1)n(2) \quad (1.25b)$$

对二粒子的电荷交换是对称的, 他们的 M_T 分别是 +1 和 -1。 (1.23b) 式的函数在电荷交换下也是对称的, 而且 $M_T = 0$ 。故这三个函数构成 $T = 1$ 的同位旋三重态。波函数

(1.23a)则是 $T=0$, $M_T=0$ 的同位旋单态。这样, 藉助于 (TM_T) 可把二核子体系的完全反对称波函数统一写成

$$|j_\alpha j_\beta JM TM_T\rangle = \sum_{m_\alpha m_\beta} \sum_{m_{1\alpha} m_{1\beta}} (j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM) \left(\frac{1}{2} m_{1\alpha} \frac{1}{2} m_{1\beta} | TM_T \right) \Phi(m_\alpha m_{1\alpha}, m_\beta m_{1\beta}) \quad (1.26)$$

$$\Phi(m_\alpha m_{1\alpha}, m_\beta m_{1\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(1) \chi_{m_{1\alpha}}(1) & \phi_\alpha(2) \chi_{m_{1\alpha}}(2) \\ \phi_\beta(1) \chi_{m_{1\beta}}(1) & \phi_\beta(2) \chi_{m_{1\beta}}(2) \end{vmatrix}$$

于是二核子体系的状态可以按 (JT) 分类。波函数(1.26)称为 JT 系统波函数或显含同位旋的波函数。

应用 Wigner-Eckart 定理容易证明, 电荷无关相互作用在波函数(1.26)中是对角的

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha j_\beta JM TM_T | v(12) | j_\alpha j_\beta J' M' T' M'_T \rangle &= (J' M' 00 | JM) (T' M'_T 00 | TM_T) \\ &\times (j_\alpha j_\beta JT \| v(12) \| j_\alpha j_\beta J' T') \\ &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{TT'} \delta_{M_T M'_T} (j_\alpha j_\beta JT \| v(12) \| j_\alpha j_\beta J' T') \end{aligned} \quad (1.27)$$

因此, 电荷无关相互作用引起的一级能量修正与角动量和同位旋的投影量子数无关

$$\begin{aligned} E(j_\alpha j_\beta JM TM_T) &\equiv \langle j_\alpha j_\beta JM TM_T | v(12) | j_\alpha j_\beta JM TM_T \rangle \\ &= (j_\alpha j_\beta JT \| v(12) \| j_\alpha j_\beta JT) \end{aligned} \quad (1.28)$$

显然, (1.27)和(1.28)式是(1.20)和(1.21)式的推广。 $E(j_\alpha j_\beta JM)$ 和 $E(j_\alpha j_\beta JM TM_T)$ 也称为两体矩阵元, 在一切核结构计算中都是必不可少的。

最后, 考虑 j 轨道中的一对全同核子。由于一对质子的 $M_T=1$, 一对中子的 $M_T=-1$, 所以 j 轨道中的全同核子对只能耦合成同位旋三重态即 $T=1$ 的态, 而且角动量 J 只能为偶数。这样, 根据(1.22)式立即可以写出 j^2 组态的 JT 系统波函数

$$|j^2 JM TM_T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{all m} (j m_\alpha j m_\beta | JM) \left(\frac{1}{2} m_{1\alpha} \frac{1}{2} m_{1\beta} | TM_T \right) \Phi(m_\alpha m_{1\alpha}, m_\beta m_{1\beta})$$

$$J = 0, 2, 4, \dots, 2j-1, \quad T = 1. \quad (1.29)$$

必须强调指出, 本节讨论的二粒子组态波函数都是反对称化的。由这些波函数计算的两体矩阵元称为反对称化的两体矩阵元。在以下几节中将讨论两体矩阵元的计算方法以及从实验数据抽取两体矩阵元的方法。

§ 1.3 δ -相互作用矩阵元

最简单的两体相互作用是 δ -相互作用

$$\begin{aligned}
v(12) &= -4\pi V_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
&= -4\pi V_0 \frac{1}{r_1 r_2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned} \quad (1.30)$$

V_0 是相互作用强度。现在计算(1.30)在 $|j_1 j_2 J M T M_T\rangle$ 中的矩阵元。首先对波函数作一些变化。根据(1.23)和(1.25)式, $T=1$ 态的空间-自旋函数是反对称的, $T=0$ 态的空间-自旋函数是对称的。同时(1.30)的 δ -相互作用与同位旋 T 无关, 故波函数中的同位旋部分可以略去。于是可将 $|j_1 j_2 J M T M_T\rangle$ 简记为

$$\begin{aligned}
|j_1 j_2 J M\rangle_T &= \left[2(1 + \delta_{j_1 j_2})\right]^{-1/2} \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | J M) \\
&\quad \times \left[\phi_{j_1 m_1}(r_1) \phi_{j_2 m_2}(r_2) + (-1)^T \phi_{j_2 m_2}(r_1) \phi_{j_1 m_1}(r_2) \right]
\end{aligned} \quad (1.31)$$

上式中也考虑了 $j_1 = j_2$ 时要出现附加的归一化因子 $1/\sqrt{2}$ 的事实。将 $\phi_{j m}$ 的显式(1.7)代入(1.31)式, 得

$$\begin{aligned}
|j_1 j_2 J M\rangle_T &= \left[2(1 + \delta_{j_1 j_2})\right]^{-1/2} R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_2}(r_2) \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | J M) \\
&\quad \times \sum_{k_1 k_2} \left(l k_1 \frac{1}{2} m_1 - k_1 \middle| j_1 m_1 \right) \left(l k_2 \frac{1}{2} m_2 - k_2 \middle| j_2 m_2 \right) Y_{l_1 k_1}(\theta_1, \varphi_1) Y_{l_2 k_2}(\theta_2, \varphi_2) \\
&\quad \times \left[\chi_{m_1 - k_1}(1) \chi_{m_2 - k_2}(2) + (-1)^T \chi_{m_2 - k_2}(1) \chi_{m_1 - k_1}(2) \right]
\end{aligned} \quad (1.32)$$

直接用(1.32)去计算(1.30)的矩阵元运算很复杂。这里只给出结果而略去数学过程:

$$\begin{aligned}
E(j_1 j_2; j_3 j_4)_{JT} &= \frac{V_0 \bar{R}}{2(2J+1)} \left[\frac{1 + (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}}{2} \right] \left[\frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)}{(1 + \delta_{j_2 j_3})(1 + \delta_{j_1 j_4})} \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left\{ (-1)^{l_2 + l_4 + l_2 + l_4} \left[1 - (-1)^{J+T+l_3+l_4} \right] \left(j_2 - \frac{1}{2} j_1 \frac{1}{2} \middle| J 0 \right) \left(j_4 - \frac{1}{2} j_3 \frac{1}{2} \middle| J 0 \right) \right. \\
&\quad \left. - \left[1 + (-1)^T \right] \left(j_2 \frac{1}{2} j_1 \frac{1}{2} \middle| J 1 \right) \left(j_4 \frac{1}{2} j_3 \frac{1}{2} \middle| J 1 \right) \right\}
\end{aligned} \quad (1.33)$$

式中 $\delta_{ik} \equiv \delta_{j_i j_k} \delta_{l_i l_k}$, $\bar{R}$ 是径向波函数的积分

$$\bar{R} \equiv \int R_{n_1 l_1}(r) R_{n_2 l_2}(r) R_{n_3 l_3}(r) R_{n_4 l_4}(r) r^2 dr \quad (1.34)$$

常用(1.5)式的谐振子波函数来计算 $\bar{R}$ 。由于谐振子势有无限高的墙, 与 $r \rightarrow \infty$ 时势能趋于零的势相比, 前者的波函数更大程度地被限制在势阱内, 造成小 l 值的 R 偏大。例如对 $^{18}\text{O}_{10}$ 核的两个 $(1d, 2s)$ 中子, 用谐振子波函数算得 $\bar{R}(2s^4)/\bar{R}(1d^4) = 205/84$, 而用有限势阱计算的这个比值约为 1。克服这一缺点的途径之一是引入表面 δ -相互作用

用，它的矩阵元将在下一节中讨论。

现在讨论一种特殊情形，即 $j_3 = j_1$, $j_4 = j_2$ 。这时 $l_1 + l_3 = 2l_1$, $l_2 + l_4 = 2l_2$ 都是偶数。若两个粒子都是质子或都是中子，则 $T = 1$, (1.33) 可以简化。于是对二全同粒子组态， δ -相互作用的矩阵元为

$$E(j_1 j_2; j_1 j_2)_J = \frac{-V_0 \bar{R}}{2j+1} \cdot \frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{1+\delta_{12}} \cdot \frac{1+(-1)^{J+l_1+l_2}}{2} \left(j_1 \frac{1}{2} j_2 - \frac{1}{2} \middle| J0 \right)^2$$

$$= \begin{cases} \frac{-V_0 \bar{R}}{2J+1} \frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{1+\delta_{12}} \left(j_1 \frac{1}{2} j_2 - \frac{1}{2} \middle| J0 \right)^2, & \text{若 } J+l_1+l_2 \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{若 } J+l_1+l_2 \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (1.35)$$

如果二全同核子在同一轨道上，则

$$E(j^2, JM) = \frac{-V_0 \bar{R}}{2J+1} \cdot \frac{1}{2} (2j+1)^2 \left(j \frac{1}{2} j - \frac{1}{2} \middle| J0 \right)^2, \quad \text{当 } J \text{ 为偶数}$$

$$= 0, \quad \text{当 } J \text{ 为奇数} \quad (1.36)$$

定义一个量 $A(j_1 j_2 JM)$

$$A(j_1 j_2 JM) = \begin{cases} \frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{(2J+1)(1+\delta_{12})} \left(j_1 \frac{1}{2} j_2 - \frac{1}{2} \middle| J0 \right)^2, & \text{当 } J+l_1+l_2 \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{当 } J+l_1+l_2 \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (1.37)$$

这是一个与单体势无关的、只由 $j_1 j_2 J$ 决定的普适函数，一个几何因子。作为例子，在表 1.1 中列出了全同核子 j^2 组态的 $A(j^2 JM) \equiv A(jj JM)$ 值，包含 $j = 1/2$ 到 $9/2$ 的五个组态。

表 1.1 全同核子的 $A(j^2 JM)$ 值

(j^2)	J	$2A(j^2 JM)$	(j^2)	J	$2A(j^2 JM)$
$(1/2)^2$	0	2	$(7/2)^2$	2	40/21
$(3/2)^2$	0	4		4	72/77
	2	4/5		6	200/429
$(5/2)^2$	0	6	$(9/2)^2$	0	10
	2	48/35		2	80/33
	4	4/7		4	180/143
$(7/2)^2$	0	8		6	320/429
				8	980/2439

现在简要讨论自旋相关的 δ -相互作用。质子与中子自旋平行同向时可以结合成稳定的氘核，但自旋平行反向时没有束缚态。这说明自旋三重态 ($S=1$) 和自旋单态 ($S=0$) 中的核力不同，核力是自旋相关的。利用 $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ 在三重态中本征值等于 1，在单态中本征值为 -3 的事实，可以定义三重态投影算符 P_t 和单态投影算符 P_s ：