物理学中的数学方法

第一卷

〔美〕F. W. 拜仑　R. W. 富勒　著

科学出版社

物理学中的数学方法

第一卷

〔美〕F. W. 拜仑　R. W. 富勒 著

熊家炯　曹小平 译

吴建时　校

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书是为配合研究生学习经典力学、电磁学及量子力学等课程而编写的．书中利用向量空间理论，对物理学不同学科所用的数学方法作了统一处理．为了阐明数学方法在物理学中的作用，书中列举了大量的物理应用范例以及物理学习题．全书分为两卷．第一卷主要内容为：经典物理学中的向量，变分法，向量与矩阵，物理学中的向量空间，希耳伯特空间——完备正交归一集合．重点是向量空间理论．第二卷主要内容为：解析函数理论的初步原理和应用，格林函数，积分方程导论，希耳伯特空间中的积分方程，群论初步．重点是介绍理论物理中的一些重要数学技巧．

本书自成系统，与物理内容密切结合，数学推导详细，适合于教学和自学．对于具有大学本科物理学、数学预备知识的读者，是一本较好的数学参考书，不但可以扩充读者的数学知识，而且可以加深读者对物理学的理解．

本书适合于大学理工科高年级学生和研究生的教学用书，也可供有关科研人员参考．

F. W. Byron Jr. R. W. Fuller

Mathematics of Classical and Quantum Physics

Volume one

Addison-Wesley, 1969

物理学中的数学方法

第 一 卷

〔美〕F. W. 拜仑 R. W. 富勒 著

熊家炯 曹小平 译

吴建时 校

责任编辑 荣毓敏

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年4月第一版 开本：850×1168 1/32

1982年4月第一次印刷 印张：11 3/8

印数：0001—12,800 字数：297,000

统一书号：13031·1853

本社书号：2518·13—1

定价： 2.10 元

序　言

本书是为了配合研究生学习高等经典力学、电学、磁学及量子力学等物理教材而编写的．它是由在哥伦比亚大学讲授的一门课程发展而来的，这门课程是所有一年级研究生都要学习的第四门基础课，这样就可以不必在一些物理课程中片断地讲授有关的数学内容．本书分两卷，大体上与全年两学期课程相对应．将研究生在各门物理课程中所需的数学合并在一门课程中讲授，就可以对物理学不同分支所用的数学方法作统一的处理．同时也可以将学生掌握的片断数学知识集中在一起，并按照特别适合于物理学的方式组织起来．组成本书核心的统一论题是向量空间概念．为了说明数学在物理学中的作用，我们在本书中收集了大量的物理应用，并给出了许多有物理意义的习题．

虽然本书是为了配合基本物理课程而编写的教科书，但它的目的不仅仅限于为物理学工作者提供这些课程所需的数学技巧．在过去四十年中，物理学所用的数学有了很大变化．可以肯定，在今天培养的这一代物理学工作者所生活的年代中，它的变化将更快．因此，物理学工作者要想跟上他所研究领域的发展和这个领域所用数学语言的变化，就必须熟悉抽象数学．本书的目的之一，就是将数学语言和风格连同与当代物理学有关的一些专题内容，一并介绍给物理学工作者．

本书基本上是自成体系的，只假定读者具有大学本科物理学和数学的预备知识，也就是具有大学本科的力学、电磁学、初等量子力学、高等微积分及微分方程的知识．数学的严格程度一般说来相当于典型的数学教科书，但并不总是完全一致．严格程度和抽象程度因论题而异．处理论题的细致程度和所用数学的深浅程度是各不相同的，在一个论题中逻辑的严密性是很有启发性的，但

在另一论题中可能是很繁琐的.

为了计算傅里叶系数或计算残数积分，虽然不必懂得外尔斯特拉斯（Weierstrass）定理或柯西-古尔萨（Cauchy-Goursat）定理的证明，但我们认为读者学过了这些证明，在完成正式的课程后将具有更好的有利条件向数学方面发展. 没有一本数学参考书能够给学生提供将来所需要的全部数学结果，更不用说一本教科书了. 也许可能做到的只是使学生有信心在数学文献中找到所需要的结果，并能够了解和运用它们. 我们的宗旨是将我们所处理的有限个论题讨论得足够详细，以便使读过本书的物理学学生在研究工作中能够毫不犹豫地直接运用数学文献.

本书的主干是向量空间理论，我们在第三、四、五章中叙述. 对这些材料的陈述深受哈尔莫斯（P. R. Halmos）《有限维向量空间》一书的影响. 一代理论物理学工作者曾从这本书学习了向量空间理论. 哈尔莫斯关于向量空间理论的结构已成了本书的"第二天性"，以致难以用适当方式来陈述他的影响.

第一章和第二章主要论述经典物理学用的数学. 第一章是对已熟知内容的复习，并作为将要学习的内容的一个导引. 我们在熟悉的三维框架中来讨论向量，同时引入一些符号和术语，以便为以后推广到向量空间的抽象向量作准备. 在第二章我们稍离开主题，讲述经典力学用的数学，并阐述后面要用的变分概念. 第三、四两章讲述有限维向量空间和算子理论，讲述的方法在以后不需修改就能导致无限维向量空间（希耳伯特空间）——量子力学的数学结构. 第五章的主题是希耳伯特空间，它为讨论数学物理中的许多特殊函数提供了一个很方便的统一框架. 第六章解析函数理论只是一个插曲，在于确立数学物理各分支中都需要的技巧和结果. 在这章中暂时不讲向量空间这个主题，但是，本章的内容与物理学的关系仍是非常密切的. 在第七、八、九章中，我们把理论物理学中一些最重要的技术介绍给读者，包括解微分方程和偏微分方程的格林函数方法以及积分方程理论. 最后在第十章中，我们把在物理学中日益重要的课题——群论作了简介.

我们作了特别努力来使习题成为正文的有益的补充. 我们相信，只有通过完善地求解一些有用的习题，学生才能真正"学好"一个课题. 因此，我们在每章后提供了大量以供选用的习题，其中有一些是说明和扩展数学论点，另一些强调正文中所发展的方法在物理中的应用. 在最后几章中，把一些具有重要意义的结论留作为习题，甚至编成一系列习题；这样做的理由是：当学生通过前几章学习，树立了信心，掌握了推理能力后，就可以借助很少的提示，自己得到某些非平庸的结果.

本书可以根据教师的选择，略去一些章节，也可以用作研究生(或较高的本科学生)的一学期课程. 例如，可以把卷 I 的内容作为一学期课程. 作者之一在加里福尼亚大学伯克利分校常用的一个办法，是根据第三、四、五、十诸章组织一学期课程. 另外，"物理学中的高等数学方法"的一学期课程，也可以由第二卷的内容构成.

每章中有些较难的小节，对本书其余大部分内容也无关紧要，我们已用星号标出.

编写这类的书，总是要求助于各方面的成果. 除了哈尔莫斯的著作外，我们也受到了柯朗和希耳伯特 (Courant-Hilbert) 关于希耳伯特空间的著作和李政道关于希耳伯特空间的讲义，李兹 (Riesz) 和纳吉 (Nagy) 关于积分方程著作以及哈莫麦许 (Hamermash)《群论》一书的影响.

我们应对弗里德伯 (R. Friedberg) 表示特别谢意，他对本书内容的评论是极为有帮助的. 特别是 5.10 节的叙述，是以他的讲义为基础而写成的.

本书部分手稿由富勒 (A. L. Fuller) 阅读并讲授过. 她的评论意见使手稿有很大改进. 哈格隆 (R. Haglund) 以及隆丁 (S. Lundeen) 阅读过手稿，并提出过意见. 他们的辛勤工作使本书避免了许多缺点，我们真诚地感谢他们.

本书大部分曾以哥伦比亚大学讲义的形式印出过. 对哥伦比亚大学及其他大学的许多学生指出了其中的错误，帮助改进了手稿，对此我们表示感谢. 在伯克利学习这些内容的学生的热情，也

给了我们很大的鼓舞.

虽然所有以上提到的人都帮助我们改进过手稿，但对书中存在的错误和不妥之处，应由我们负责. 希望读者指出错误，以便在下次印刷中能够改正，我们对此将致以谢意.

作者之一(拜仑)在写作本书的大部分时间内曾得到阿尔弗雷得·P·斯隆基金会的支持，并对布鲁塞尔自由大学得默尔 (M. Demeur) 教授及约阿善 (C. J. Joachain) 教授的热情接待表示感谢. 另一个作者(富勒)对斯维里大学的罗森鲍姆 (R. A. Rosenbaum) 以及这所大学的高级研究中心及其主任霍尔根 (P. Horgan) 在本书写作过程中的热情接待表示感谢. 我们也感谢米尔福德 (F. J. Milford) 及贝蒂尔纪念研究所的西雅图研究中心提供了支持，使本书得以完成. 在菲格里奥林娜 (R. Figliolina)、格鲁格尔 (C. Grunger)、何立希 (B. Hollisi) 以及萨顿 (B. Satton) 的有力帮助下，解决了手稿出版中的许多实际问题.

F. W. 拜仑

R. W. 富勒

1969 年 1 月

目　　录

第　一　卷

第 二 卷

第一章　经典物理学中的向量

引言

本章我们将简略地回顾经典物理学中出现的向量和向量场的性质. 不过我们将用一种便于在后面各章中可以对向量作更抽象讨论的方式和符号表示法来进行回顾，其目的是在经典三维向量分析与抽象向量空间表述之间搭起桥梁，而抽象向量空间的表述正是量子物理学的数学语言. 对以后各章更抽象更充分讨论的许多概念，这里将在熟悉的三维空间中先讨论一下，以便为后面的分析提供更直观的内容. 本章还将对经典物理学作简要重述，其中有很多可用向量分析语言很好地加以说明，当然，为此目的特意作了安排. 此处，我们的意图是作一简单介绍与回顾，数学推演不如以后各章严格.

§1.1　向量的几何定义与代数定义

在初等物理课程中，特别强调向量的几何意义. 一个向量 $\mathbf{x}$，最初把它想象为一个有向线段，即一个有大小又有方向的量，例如速度或力. 因此向量与标量不同，标量只有大小，例如温度，熵，或质量. 在图1.1所示的二维空间中，画出了三个大小和方向相同的向量. 它们组成一个等价类，可以用一个起点在原点的向量 $\mathbf{V}_0$ 来表示. 向量和标量的这种初步表述法，将逐步地用更为根本的表述法来代替. 但

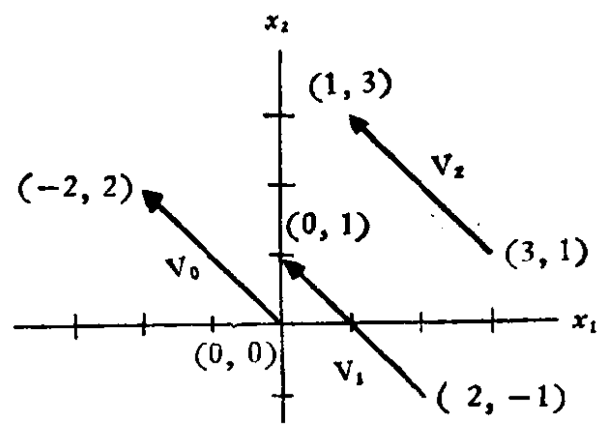

图 1.1　二维空间中的三个等效向量

在此以前，我们先要建立一种用来讨论向量的语言.

向量的代数形式，是通过代表等价类的向量（从原点出发的）和它们的终点坐标即有序实数对（x_1，x_2）之间的一一对应关系表示出来的.同样，在三维空间中，我们可以把三个有序实数（x_1，x_2，x_3）和一个几何向量联系起来，这三个数就称为这个向量的分量.我们可以更简单地将这个向量记作 x_i，此处 i 理解为从 1 到 3.在维数大于 3 的空间中，我们必须更多地依靠向量的代数概念，把它表示为一个 n 维的有序实数组（x_1，x_2，$\cdots$，x_n）. 虽然我们不再能画出一个 n 大于 3 的物理向量，但我们仍将保留向量的几何语言，以便向 n 维推广. 这种抽象向量性质的形式处理，是第三和第四章的主题，它在相对论和量子力学中是很重要的. 本章中我们把注意力只限于三维情况.

于是，已有了两个互相补充的向量概念：几何或物理的，和代数的. 它们相应于平面(或立体)几何和解析几何. 在笛卡儿发现代数几何，即解析几何之前，几何概念就已经发现，而且单独存在了好几个世纪. 任何能够用几何证明的，都能用代数加以证明，反过来也一样. 但是，证明一个给定的命题，用其中一种语言可能比用另一种语言容易得多.

因此，代数语言不仅仅是几何语言的一种简单替代，它使我们表述某些问题比采用几何语言更容易得多. 例如，曲线上某点的切线，用代数语言可以很简单地定义，由此可以促进围绕这个重要概念的整个课题的深入研究. 微积分学正是起源于切线问题的这种表述.

据说玻尔（Niels Bohr）有过一种说法：对于一个哲学概念，只有用他的本国语丹麦语和用德语、法语、英语作了思考以后，他才认为他自己真正懂得了这个概念. 同样可以说，当一个人能够从几何方面，又从代数方面考察基本定理时，这个人对几何的理解才更加深刻. 对于研究向量也是如此. 不过跳过微分算子的物理和几何解释，只依靠代数语言，也可以很容易地完成向量分析. 但我们将尝试阐述这些算子的物理意义，同时复习它们的代数运算.

在物理学中，向量分析的基本算子到处出现，所以值得对这些算子起什么作用建立一种物理图象，即它们作用在标量场和矢量场上时"量度"了这些场的哪些特性.

§1.2　向量分解为分量

向量分解为分量，是研究向量最重要的方面之一. 实际上，在第五章研究希耳伯特空间即向量空间的无限多维推广时，这仍然是一个主要特点. 在三维空间中，任何向量 $\mathbf{x}$ 可以展开成任何三个非共面向量的线性组合. 于是，$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{V}_1+\beta\mathbf{V}_2+\gamma\mathbf{V}_3$，这里 α，β 和 γ 为标量. 若把向量 $\mathbf{x}$ 的长度表示为 $|\mathbf{x}|$，则 $\alpha|\mathbf{V}_1|$，$\beta|\mathbf{V}_2|$ 及 $\gamma|\mathbf{V}_3|$ 便是 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$ 及 $\mathbf{V}_3$ 方向的分量. 这三个向量 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{V}_3$ 并不需要互相正交，任何三个非共面向量均可组成基，任何向量都可以通过基分解或展开. 但选用互相垂直的基向量往往是极其方便的. 这种基称为*正交基*，否则称为*斜交基*. 我们几乎只研究正交基向量集.

*笛卡儿基*是一种特别有用的基向量集，它由三个互相垂直的单位长度的向量组成，而这三个向量在空间各点具有相同的方向. 在本章中，我们用字母 $\mathbf{e}$ 表示单位向量，因此笛卡儿基是图 1.2 所示的集 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. 这样的基向量集称为*正交归一的*，因为其向量是互相正交且归一化的（具有单位长度）. 在这个处理中我们没有区分"基"与"坐标系统".

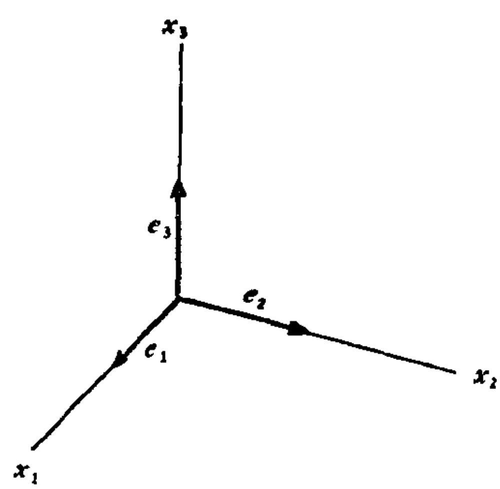

图 1.2　右手笛卡儿基或坐标系统

图 1.2 中的基（或坐标系统）是右手的，即若将右手手指沿 x_1 轴正方向伸开，然后向 x_2 轴正方向弯曲，大姆指将指向正 x_3 方向. 如果任何一个基向量倒向，则得左手正交基. "左右手性"的数学定义将在 1.5 节中给出.

任意向量可在笛卡儿基中表示为 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$. $\mathbf{x}$

对于这个基的第 i 个分量是 x_i, $i=1,2,3$. 还有其它许多正交归一的基，例如圆柱坐标系、球坐标系及其他曲线坐标系，等等，使用它们，处理具有特定对称性质的问题可以大大简化. 这些将在1.7 节中讨论.

§ 1.3 标量积

两个向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的标量积("内积"或"点积")为一实数，在几何语言中，由以下方程定义：

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|\cos\theta,$$

其中 θ 为两向量的夹角，从 $\mathbf{x}$ 向 $\mathbf{y}$ 测量. 由于 $\cos\theta$ 为偶函数，所以标量积是可交换的：

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}.$$

并且，标量积服从加法分配律：

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}.$$

这个方程的形式是熟悉的，而且是合理的，但这仅仅由于我们自动地从代数上加以解释，而在代数里我们通常认为服从分配律是理所应当的. 读者将会发现，用几何作图法证明这个方程将是有益的.

若 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$，得不出其中一个或两个向量为零. 它们可能是垂直的. 注意向量 $\mathbf{x}$ 的长度由

$$|\mathbf{x}|=x=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

给出，因为当 $\theta=0$ 时，$\cos\theta=1$. 特别是对于笛卡儿基向量有

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\delta_{ij}, \tag{1.1}$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克 (Kronecker) 符号，其定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ i=j\\ 0. & 当\ i\neq j\end{cases} \tag{1.2}$$

若将两个任意向量 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{y}$ 以笛卡儿基展开：

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+y_3\mathbf{e}_3=\sum_{i=1}^{3}y_i\mathbf{e}_i.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} y_j\mathbf{e}_j\right)\\
&= \sum_{i,j} x_iy_j\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \sum_{i,j} x_iy_j\delta_{ij}\\
&= \sum_i x_iy_i,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

这里我们已经用了标量积的分配律；$\sum_{ij}$ 代表 $\sum_i\sum_j$. 最后一个表达式可以作为标量积的代数定义.

由此得出，一向量的长度可以通过标量积表示出来：$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 这个方程提供了一种独立的方法，使任一向量同一个称为它的长度的数联系起来. 我们看到，长度的概念不必看作是向量概念中固有的，更恰当地说，而是在抽象向量空间中定义标积的结果. 所以在第三章中，我们将研究没有定义长度概念的抽象向量空间. 而在第四章里，将在抽象向量空间中加入"内积"(或向量积)，并集中讨论由此而产生的丰富内容.

现在我们引入一种符号速记法，称为*爱因斯坦求和约定*. 爱因斯坦在研究向量和张量时注意到，每当对给定的下标(或上标)求和时，这个下标在求和表达式中出现两次，反过来也成立. 因此，可以省略多余的求和号，把象 x_iy_i 这样的表达式解释为对重复的下标求和，此处下标由 1 变到 3. 如果出现二个不同的重复下标，就意味着二次求和，以此类推. 爱因斯坦曾在一封信中开玩笑地把这一结果说成"数学上的伟大发现"，如果你不相信，可以不用它来试试！(另一个传说也许不真实，说是一个为爱因斯坦一篇论文排版的印刷工人注意到符号的多余，并建议省略求和号.)

我们在本章中都将采用爱因斯坦求和约定. 据此有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x_i\mathbf{e}_i,\\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= x_iy_j\delta_{ij} = x_iy_i = x_jy_j,\\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i &= x_j\cdot\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i = x_j\delta_{ij} = x_i.
\end{aligned}
$$

最后一个方程决定了 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{e}_i$ 方向上的分量 x_i，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i$ 也叫做 $\mathbf{x}$ 在

$\mathbf{e}_i$ 轴上的投影. 数集 $\{x_i\}$ 称为向量 $\mathbf{x}$ 在基(或坐标系) $\{\mathbf{e}_i\}$ 上的表示(或坐标).

§ 1.4 坐标系的转动: 正交变换

我们现在考察一个向量在共同原点的两个不同笛卡儿基上的分量之间的关系,如图 1.3 所示.

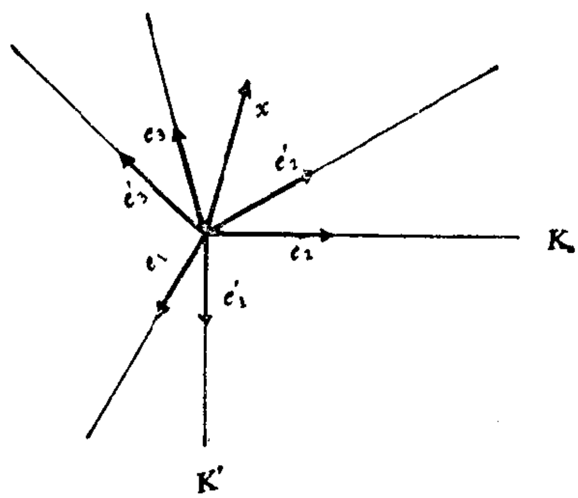

图 1.3 共同原点的两个不同笛卡儿基. 向量 $\mathbf{x}$ 可以用任何一个基表示.

任何向量 $\mathbf{x}$ 可分解为对 K 或 K' 系的分量. 例如在 K 系中有

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j = x_j\mathbf{e}_j, \tag{1.4}$$

此处已用了求和约定. 特别是如果我们取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}'_i (i = 1, 2, 3)$, 我们可以把带撇的基向量集通过不带撇的表示出来:

$$\mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j = a_{ij}\mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1.5}$$

由方程 (1.5) 所确定的九个项 a_{ij}, 是六个轴之间夹角的方向余弦. 这些数可写成方阵:

$$R \equiv a_{ij} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \tag{1.6}$$

R 称为三维转动矩阵, 因为它描写了一个基变化到另一个 (转动的)基的结果.

注意在由方程

$$a_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{1.7a}$$

确定矩阵元时，我们已采用了某种约定. 同样我们也可以用方程

$$a'_{ij} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i = a_{ji} \tag{1.7b}$$

来确定矩阵元 a'_{ij}. 几乎所有的作者都采用方程(1.7a)的约定，但这是可任意选择的；在定义(1.7b)的基础上也能够建立完全一致的理论. 实际上，在抽象空间理论中，矩阵往往用与方程(1.7b)一致的规则来定义，而不是按我们这里方程(1.7a)的规则. 然后，若在方程(1.6)中及在下面要推导的各方程式中用 a_{ji} 代替 a_{ij}——也就是行与列互换，或者说将矩阵 R 转置，我们便在这两种规则之间倒来倒去. 在第四章中我们还要在更普遍的基础上重新讨论这些问题，以便得到简易完整的系统化.

显然，旋转矩阵元不是互不相关的. 因为基向量组成一个正交集，由方程(1.5)得出

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = a_{ik}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_j) = a_{ik}a_{jk}. \tag{1.8}$$

方程(1.8)代表一组九个方程(其中只有六个是不同的)的组合，每个方程包含三个二次项之和. 留给读者自己去证明以下关系

$$a_{ki} \cdot a_{kj} = \delta_{ij} \tag{1.9}$$

(将不带撇的向量以带撇的基展开，并取标量积). 表达式(1.8)和(1.9)被称作正交性关系；其相应的变换(方程(1.5))叫做正交变换.

在 n 维空间中，旋转矩阵具有 n^2 个元，读者可以证明，其中由正交性关系可提供 $\frac{1}{2}(n^2+n)$ 个条件. 于是，在 a_{ij} 中还有

$$n^2 - \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

个元是未确定的. 在二维空间中，留下一个自由参数，可取为旋转角. 在三维空间中，有三个自由度，对应于用来描写刚体取向的三个欧拉角(Euler angle).

方程(1.5)，以及正交性关系，告诉我们怎样将一个正交基向量集用另一个转动了的正交基向量集表示出来. 现在问：一个向量在 K 系中的分量，同该向量在 K' 系中的分量之间关系如何，反