高等学校教学参考书

偏微分方程选讲

姜礼尚　孙和生
陈志浩　管楚淦

高等教育出版社

高等学校教学参考书

偏微分方程选讲

姜礼尚　孙和生
陈志浩　管楚淦

高等教育出版社

(京)112号

本书是作者们在为讲授数学物理方程课的教师举办的暑期研讨班讲课的讲稿基础上写成的，其中有些内容，作者曾给研究生、高年级大学生讲过多次，全书共分六章，其主线是对数学物理方程的常见方法加以总结，并沿着应用的方向把内容从理论上深入一步.各章内容相对独立，自成体系，以此书作为教材的教师可根据需要，任选几章独立安排教学.

本书可供应用数学、计算数学专业作为选修课、理工类研究生“数学物理方程”“数学物理方法”课以及数学专业“数学物理方程”课作为参考书或教材.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程选讲/姜礼尚等编著.—北京：高等教育出版社，1997

ISBN 7－04－005910－X

Ⅰ.偏… Ⅱ.姜… Ⅲ.偏微分议程－教材 Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第01021号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京市朝阳区北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 240 000

1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

印数 0001—1 542

定价 9.30 元

序　言

数学物理方程作为一门大学基础课，无论对于数学类专业还是非数学的理工类专业都是十分重要的.它是以建立模型、求解问题、理论分析和解释现象为内容的课程，通过对典型问题的深入探讨，揭示偏微分方程的一些带有普遍性的思想方法、求解过程和理论结论.因此，我们通过多年的教学实践，深深体会到要教好这门课，一定要针对这门课的特点，联系实际，讲出从特殊到一般的结合，使内容不断更新，以适应实际的需要.但必须看到，由于这门课的教学时数(特别对于非数学类专业)是比较少的，要做到这一点并不容易.因此，以分离变量法贯串数学物理方程全课程的作法在一些非数学类专业中颇为常见.如何在原有数学物理方程课程的基础上沿着应用的方向，把大学数学物理方程课程的内容再深入一步，这是一个大家关心的问题，亦是编写本书的一个指导思想.

1986年以来，一部分在高等工科院校长期讲授数学物理方法课的教师出于提高教学质量和进一步提高自身学术水平和教学水平的需要，自发地组织了一个数学物理方法研讨会.他们每年或隔年利用暑期召开研讨会议，会上邀请一些专家作系统讲演.到1995年底，这样的研讨会已经相继举行了九次，每次都有40～50人参加，效果是比较好的.我有幸被邀请担任这个研讨会的顾问，并在前三次暑期研讨会上担任主讲工作.在青岛召开的第三次研讨会上，孙和生、管楚洤同志被邀请主讲“非线性波”.会后，很多同志希望把讲课内容编写成书，以便他们进行教学时参考.在编写过程中，陈志浩同志作出了重要的贡献，没有他的支持和协助，本书是不可能按期完成的.高等教育出版社编审郭思旭同志对本书的编写起到了直接的推动作用.本书就是在这样的背景下完成的.

本书是以应用数学、计算数学专业选修课，特别是非数学的理

工类专业等的“数理方程”研究生课和大学“数理方程”和“数理方法”基础课为对象编写的教学参考书.全书共分六章,各章内容相对独立,自成体系,主讲教师完全可以根据需要,任选几章独立安排教学.本书所用到的一些近代数学工具的概念,如Hilbert空间、Sobolev空间和嵌入定理、广义函数等都有专门的介绍,内容力求简明扼要,把基本概念交待清楚,主要着眼于它们的应用.对于非数学专业的学生,无疑是打开了一个“窗口”,展示了现代数学的意义和作用.对于本书着重介绍的几种常用求解方法:Green函数法(第一章)、变分方法(第二章)、分离变量法(第三章)以及特征线法(第五章)等,力求在理论上讲得透彻完整,在应用上讲得深入、全面,希望作到严密性与直观性的统一、科学性与可读性的统一.本书第四章讲授的连续介质力学的数学模型和第五、六章介绍的非线性波(激波与孤立波)都是从数学的角度来阐述力学的模型和概念,在弄清楚各种不同力学假设的前提下,数学的推演力求统一完整,严密清晰,尽量不涉及深奥的力学概念和专门知识,使非力学专业的学生易于接受和掌握.当然限于作者的水平,肯定还有不少不尽完善的地方,恳请读者惠予指正.

本书1～4章由姜礼尚负责编写,其中1～3章是与陈志浩合作完成的;5、6章是由管楚淦、孙和生负责编写的.本书曾多次被高等学校理科数学与力学教学指导委员会微分方程教材建设组推荐列入出版计划,在此我们对微分方程教材建设组的专家和高等教育出版社郭思旭同志的一贯支持和鼓励表示深切的谢意.

姜礼尚

1995年11月于苏州大学

目　录

第一章 Green 函数

Green函数在求解常微分方程边值问题和偏微分方程边值问题以及初边值问题中有着特殊重要的地位.Green函数法的优越性在于把具有任意非齐次项和任意边值的定解问题归结为求解一个特定的边值问题,它仅依赖于微分算子、边界条件的形式和区域的形状.一旦求得了相应的Green函数,就可以通过叠加原理给出原定解问题的解.

在本章中,我们就一维问题和多维问题分别给出Green函数的定义和物理意义,并介绍几种求Green函数的方法.

§1. 一维问题

1.1 问题的提出

我们先考虑简单的物理模型:设有一根拉紧的均匀且柔软的轻弦,长度$l=1$,两端固定,在垂直外力作用下当弦达到平衡时,讨论弦的形状.

如图1－1建立坐标系,把不受外力作用时弦的平衡位置取为Ox轴,并以$f(x)$、$y(x)$分别表示弦上横坐标为x的点处所受的外力密度(单位: N/m)和位移(单位: m).由于此时惯性力为零,在微小位移的情况下,弦的平衡方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[T(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=f(x),$$

其中$T(x)$为弦上横坐标为x的点所受张力的大小,为讨论简单起见,不妨设$T(x)=1$.于是问题简化为求解常微分方程边值问题

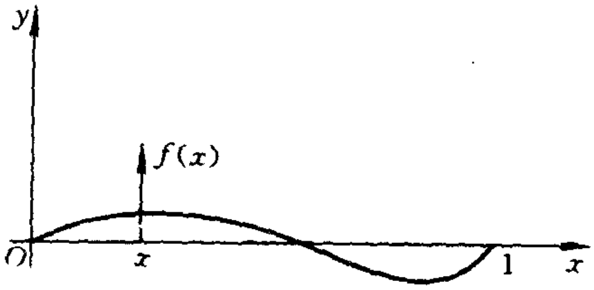

图 1－1

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x) \qquad (0<x<1), & (1.1)\\ y(0)=y(1)=0. & (1.2)\end{cases}$$

它的解可表示为

$$y(x)=x\int_0^1 d\xi\int_0^\xi f(s)ds-\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(s)ds. \tag{1.3}$$

为使此解具有较对称的形式，通过交换积分次序，得

$$y(x)=\int_0^x s(1-x)f(s)ds+\int_x^1 x(1-s)f(s)ds.$$

定义函数

$$G(x,s)=\begin{cases} s(1-x), & 0\leqslant s<x;\\ x(1-s), & x<s\leqslant 1.\end{cases} \tag{1.4}$$

则有

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds, \tag{1.5}$$

其中核函数$G(x,s)$只依赖于微分算子$L=-\dfrac{d^2}{dx^2}$、边界条件(1.2)和区间长度[0,1]，而与方程(1.1)右端的非齐次项$f(x)$无关.我们把(1.4)式定义的$G(x,s)$称为Green函数.我们将证明它是某一个特定边值问题的解.因此，所谓Green函数法，就是通过把任意的非齐次项$f(x)$的常微分方程边值问题(1.1)、(1.2)，归结为一个特殊边值问题的求解，即只要求出了Green函数(1.4)，就可以利用叠加原理

给出解的一般表达式(1.5).

1.2 Green函数的特性和物理意义

为了给Green函数下一个确切的定义，我们先就边值问题(1.1)、(1.2)的Green函数(1.4)的特性及物理意义作一些探讨.

设$x_0\in(0,1)$是一固定点，则由(1.4)式定义的Green函数$G(x_0,x)$具有下述性质:

1° $G(x_0,0)=G(x_0,1)=0$，即当$0<x_0<1$时$G(x_0,x)$满足齐次边界条件(1.2);

2° $-\dfrac{d^2G}{dx^2}=0(x\neq x_0)$，即当$x\neq x_0$时$G(x_0,x)$是相应于(1.1)的齐次方程的解;

3° $G(x_0,x_0-0)=G(x_0,x_0+0)$，即当$0<x_0<1$时$G(x_0,x)$在$x=x_0$处连续;

4° $[-G'_x(x_0,x_0+0)]-[-G'_x(x_0,x_0-0)]=1$，即当$0<x_0<1$时$G(x_0,x)$对$x$的一阶导数在点$x=x_0$处有跳跃，间断量是1;

5° $G(x_0,x)=G(x,x_0)$，即Green函数关于自变量x及参变量x_0具有对称性.

为了说明具有上述特性的Green函数的物理意义，我们考察长度为1，两端固定的弦，在$x=x_0$处受垂直的单位集中力作用下处于平衡状态时弦的形状$y(x)$. 如图1－2所示，弦在$x=x_0$处受到三个力的作用. 张力$\boldsymbol{T}_-$在y轴的投影为

$$-T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-T\sin\alpha\approx-T\tan\alpha=-T\frac{dy}{dx}\Big|_{x-0},$$

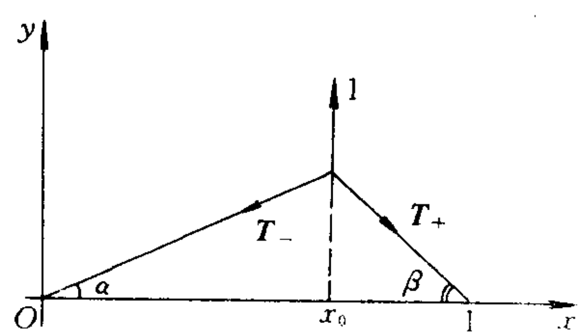

图 1－2

其中$T=|\boldsymbol{T}|$为张力$\boldsymbol{T}$的大小. 同样地，张力$\boldsymbol{T}_+$在y轴的投影为

$$-T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=-T\sin\beta\approx-T\tan\beta=T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0+0}.$$

当三个力处于平衡时，有关系式

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0+0}+\left(-T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0-0}+1=0.$$

故在集中力作用下，弦的平衡问题归结为位移$y(x)$应适合下述定解问题：

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \qquad (x\neq x_0), & (1.6)\\ y(0)=y(1)=0, & (1.7)\\ y(x_0-0)=y(x_0+0), & (1.8)\\ \left(-T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0+0}-\left(-T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0-0}=1. & (1.9)\end{cases}$$

比较$y(x)$与$G(x_0,x)$，可见Green函数$G(x_0,x)$的物理意义是：长度为1，两端固定的弦，在点$x=x_0$处由于受单位集中力的作用在点x处所产生的位移(其中张力$T=1$)．那末，对于连续分布的外力密度$f(s)$，可把弦分成若干小段，在每一小段$[s_i,s_i+\Delta s]$上作用的外力近似为$f(s_i)\Delta s$，这里假设了它作为一集中力作用在$s=s_i$点处．于是，在点x处所产生的位移近似为$G(x,s_i)f(s_i)\Delta s$．因为问题是线性的，根据叠加原理，由于外力密度$f(s)$分布在整个区间$[0,1]$上，它所产生的位移应为$\sum\limits_i G(x,s_i)f(s_i)\Delta s$．令$\Delta s\to 0$，即得

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

此即(1.5)式．

1.3 广义函数与δ函数

为了能给Green函数下一个确切的定义，我们先引进广义函数与δ函数的概念．

一、集中力的密度的描述

如何确切地来描述集中力的力密度是我们首先要解决的问

题.为简单起见，假定在包含原点的区间(a,b)上，在原点$x=0$处受到一个单位集中力的作用.实际上，集中量的分布可以通过一个极限过程来理解.我们可以认为在原点的小邻域$|x|\leqslant\varepsilon$上均匀地作用着一个分布力，力的密度为$f_\varepsilon(x)$.取

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|\leqslant\varepsilon;\\ 0, & |x|>\varepsilon,\text{且}x\in[a,b],\end{cases}\tag{1.10}$$

如图1－3所示.这样，区间$[-\varepsilon,\varepsilon]$所受的力为

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1.$$

令$\varepsilon\to 0$，从形式上得到$f_\varepsilon(x)\to f(x)$.其中

$$f(x)=\begin{cases}\infty, & x=0;\\ 0, & x\in[a,b],\text{但}x\neq 0.\end{cases}$$

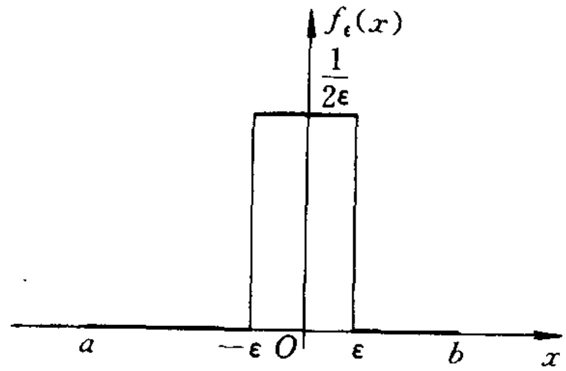

图 1－3

且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{d}x=1.$$

但是，以这种极限形式得到的$f(x)$作为描述单位集中力的力密度“函数”，与经典的数学分析中函数概念已是不相同的了.简单地认为$f(x)$是一个几乎处处等于零的函数是不正确的，因为按通常的积分意义应有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.但是从物理直观上来说，这个积分值又显然应该等于整个区间$[a,b]$上所受的力，其大小为1.由此可见，当$\varepsilon\to 0$时，$f_\varepsilon(x)$的极限函数已不能是古典意义下的极限.为此，我们需要扩充极限的概念和函数的概念.

二、广义函数

为了把通常的函数概念扩充到广义函数，并理解和掌握广义函数的严格数学理论，必须具备一定的泛函分析知识基础，这越出

了本课程的讨论范围.为了使以下的叙述更加直观和初等，我们准备仿照从有理数扩充到实数的步骤，通过引进弱收敛的概念把连续函数扩充到广义函数.限于篇幅，我们这里的叙述不可能非常严格.

定义 1 若$\{u_n(x)\}$是给定在(a,b)上$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的可积函数序列，如果对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称$\{u_n(x)\}$为弱收敛意义下的基本列.这里

$$C_0^\infty(a,b)=\{\varphi(x)|\varphi\in C^\infty(a,b)，且在a,b附近\varphi\equiv0\}.$$

有时也把$C_0^\infty(a,b)$记成$\mathscr{D}(a,b)$，称为试验函数(test function)类.

当a,b分别为$-\infty$和$+\infty$时，

$$C_0^\infty(-\infty,+\infty)=\{\varphi(x)|\varphi\in C^\infty(-\infty,+\infty)，且\mathrm{supp}\ \varphi有界\},$$

其中$\mathrm{supp}\varphi$称为函数$\varphi(x)$的支集，它是使$\varphi(x)\neq0$的点集的闭包.

例 若$u_n(x)\in C[a,b]$，且$\{u_n(x)\}$是在$[a,b]$上一致收敛意义下的基本列，则它也必是弱收敛意义下的基本列，且存在$u(x)\in C[a,b]$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b).$$

这说明弱收敛是一致收敛概念的推广，而且在一致收敛意义下，其极限值仍然表成一个积分形式.

定义 2 若函数列$\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$都是弱收敛意义下的基本列，且对于任意$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b v_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则称$\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$两个基本列等价.

按此等价关系我们可以把基本列划分为等价类.等价的基本列都有同一极限值，不妨把它记作$U(\varphi)$，即是一个只与$\varphi(x)$有关的常数.也就是说，这个极限值事实上是定义了一个由$C_0^\infty(a,b)\to\mathbf{R}$(实数)的映射，通常把这称之为泛函.也可把$U(\varphi)$记作$\langle u,\varphi\rangle$，这里$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示一种对偶关系.根据前面所述，对于一致收敛的基本列$\{u_n(x)\}$，这个对

偶关系可以用积分$\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$来表示.所以我们在形式上亦有

$$\langle u,\varphi\rangle \xlongequal{\text{记作}} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

这里的积分纯粹是一种记号,只是作为对偶关系来理解.

正像将有理数扩充为实数一样,我们把凡是弱收敛的基本列$\{u_n(x)\}$都赋予一个极限元,记为$u(x)$,并记

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle \xlongequal{\mathrm{d}} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

我们称这样的极限元为广义函数.

综合以上讨论,现在我们可对广义函数定义如下:

定义3 若在区间(a,b)上$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的可积函数列$\{u_n(x)\}$,对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$,极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在,则极限值定义了一个泛函u: $C_0^\infty(a,b)\to\mathbf{R}$,把它记作

$$\langle u,\varphi\rangle \quad 或 \quad \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle \xlongequal{\mathrm{d}} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{1.11}$$

并称$u(x)$是函数列$\{u_n(x)\}$的弱极限元素,记作

$$w-\lim_{n\to\infty} u_n(x)=u(x) \tag{1.12}$$

或

$$u_n(x) \rightharpoonup u(x) \quad (n\to\infty). \tag{1.13}$$

这样定义的"函数"(即泛函)$u(x)$称为广义函数.

请注意:我们把泛函u写成$u(x)$,这纯粹是一种记号,它绝不能理解为u是x的函数!作为泛函u,谈它在某一点$x=x_0$的值$u(x_0)$是没有意义的,它的值是通过与试验函数类$C_0^\infty(a,b)$中函数的"作用"才

得到显示.

例 所有的可积函数$u(x)$都是广义函数.

事实上，我们只需取$\{u_n(x)\}$就是$\{u(x)\}$本身，则可积函数$u(x)$就符合广义函数的定义.亦即广义函数包含了所有的可积函数.但在下面我们又可看到上述广义函数的定义又确实是扩充了可积函数以外的新的函数.

注 定义3中的函数列也可以是$\{u_\varepsilon(x)\}$，并取$\varepsilon\to 0$时的极限.即(1.11)式也可换成

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b u_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle,\ \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b). \tag{1.14}$$

三、δ函数的定义

定义 4 若在区间(a,b)上$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的可积函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$，对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在，且极限值等于$\varphi(0)$，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0),\quad\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b), \tag{1.15}$$

则把函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$当$\varepsilon\to 0$时确定的弱极限元记作$\delta(x)$，称为Dirac δ函数，简称δ函数.

由上述定义可知，δ函数是一个特殊的广义函数.根据定义3中式(1.11)的记法，δ函数也可表示成

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x&=\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle=\int_a^b\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\varphi(0),\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(a,b),\end{aligned} \tag{1.16}$$

这里等式右端的积分式也纯粹是一个形式上的数学符号，与通常的积分含义是有区别的.

现在我们回到对集中力的力密度的描述.对于由式(1.10)确定的函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$，对于任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(\theta\varepsilon)\cdot 2\varepsilon \qquad (-1<\theta<1)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\theta\varepsilon)$$

$$=\varphi(0).$$

由此可见，式(1.10)表示的函数列所确定的弱极限元正是δ函数.即

$$f_\varepsilon(x)\longrightarrow \delta(x) \qquad (\varepsilon\to 0).$$

所以，我们可以用广义函数$\delta(x)$来描述一个集中量的密度分布.而$\delta(x)$已不是通常意义下的可积函数.

事实上，按定义3定义的广义函数，我们以前在解数学物理方程定解问题时已经遇到过，不过当时未曾定义广义函数而已.例如，我们都知道无限长细杆热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0), \quad (1.17)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty) \quad (1.18)\end{cases}$$

的解可用Poisson公式表示为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{1.19}$$

其中核函数

$$K(x,t;\xi,0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{1.20}$$

容易验证函数$K(x,t;\xi,0)$具有如下性质

$$\lim_{t\to 0}K(x,t;\xi,0)=\begin{cases}\infty, & 当x=\xi;\\ 0, & 当x\neq\xi.\end{cases} \tag{1.21}$$

且若$\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$，则有

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=\varphi(x). \tag{1.22}$$

因此，按定义3当$t\to 0$时，核函数$K(x,t;\xi,0)$的弱极限元就是一个广

义函数.如果令$x=0$, $t=\dfrac{1}{n}$,记$K(0,t;\xi,0)=K_n(\xi)$,则

$$K_n(\xi)\longrightarrow\delta(\xi)\qquad(n\to\infty).$$

根据δ函数的定义4及基本列的等价性,函数列$\left\{\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\right\}$也是以$\delta(x)$为弱极限元的.这是由于对任意函数$\varphi(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,+\infty)$, $\dfrac{d\varphi}{dx}$是有界的,所以

$$|\varphi(x)-\varphi(0)|=\left|\int_0^x\frac{d\varphi}{dx}dx\right|\leqslant M|x|.$$

其中M是一个有限的正常数.于是

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-\varphi(0)]e^{-nx^2}dx\right|\leqslant 2M\int_0^{+\infty}xe^{-nx^2}dx$$

$$\leqslant\frac{M}{n}(-e^{-nx^2})\Big|_0^{+\infty}=\frac{M}{n}.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\varphi(x)dx=\varphi(0)+O\left(\frac{M}{\sqrt{n}}\right)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\varphi(x)dx=\varphi(0),\quad\forall\varphi(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,+\infty).$$

此即表明

$$\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\longrightarrow\delta(x)\qquad(n\to\infty).\qquad(1.23)$$

由于$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$,因此在$x\neq0$处任意改变试验函数$\varphi(x)$的函数值,$\langle\delta,\varphi\rangle$的值是不变的.所以,从直观上可以理解为当$x\neq0$时$\delta(x)\equiv0$.因此对于$\delta(x)$,我们不妨把试验函数空间$C_0^{\infty}(a,b)$扩充为$C^{\infty}(a,b)$, $\langle\delta,\varphi\rangle$应该还是有意义的,而且仍然有$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$.对于$\delta(x)$的这一点说明在下文的讨论中是有用的.