

# 非线性光学

费浩生



高等教育出版社

# 非线性光学

费浩生

JY1181/03

高等教育出版社

## 内 容 简 介

本书主要讨论非线性光学的基础理论，介绍由二阶和三阶非线性极化引起的各种非线性光学现象和这一领域的最新进展，描述了光学瞬态相干现象。

全书共13章，1—2章为非线性光学的理论基础，3—6章介绍非线性介质中光波间耦合问题，7—9章为光场作用下介质折射率改变所产生的现象，10—12章介绍在介质波导、光折变材料和半导体材料中非线性光学的最新发展，第13章描述共振介质中光学瞬态相干现象。

本书可作为理科光学专业和工科光电子技术、光通信等有关专业研究生和高年级大学生的教学参考书，也可供有关科学工作者和工程技术人员参考。

本书责任编辑 曹建庭

## 非线性光学

费浩生

\*

高等教育出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
北京印刷一厂印装

\*

开本850×1168 1/32 印张11.25 字数280000  
1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

印数0001—900

ISBN7-04-002857-3/O·916

定价2.90元

## 前 言

激光是本世纪科学史上最重大的发明之一，它的出现开创了許多新的研究领域，非线性光学正是激光出现后发展起来的一门崭新的学科。自从1961年P. A. Franken及其同事首先在实验上证实了倍频效应，继后N. Bloembergen进行了理论阐述后，非线性光学作为一门新的科学分支飞速地发展起来。现在，它的很多重要成果已广泛地应用于许多科学和生产领域，而另一些新的现象至今仍是人们十分瞩目的研究课题。

众所周知，在激光出现以前，描述电磁辐射场在介质中传播规律的麦克斯韦方程仅与场强的一次项有关，这属于线性光学范畴。而激光是强度高、单色性和相干性好的光源，介质在这种强激光场作用下产生的极化强度与入射辐射场强之间不再是简单的线性关系，而是与场强的二次、三次以至更高次项有关，因而出现了各种非线性光学现象。非线性光学现象基本上可以分为三类，一是非线性介质中传播的各光波间相互耦合而呈现的倍频、和频、差频及四波混频等现象；二是介质在光场作用下由于折射率的变化，而引起光束的自聚焦、光束自陷及光学双稳和感生光栅效应等现象；此外，当共振介质在窄激光脉冲作用下，将产生类似于磁共振中的光子回波、光学章动、自由感应衰减等瞬态相干现象。

本书是作者给研究生讲授非线性光学课程讲义的基础上，适当增加近年来非线性光学最新研究成果编写而成的。全书共分十三章，第一、二章主要讨论非线性光学理论，阐明了非线性极化率理论和光波在非线性介质中传播的耦合波方程，这是全书的理论基础。第三章至第六章讨论光波在非线性介质内传播过程中的

相互耦合问题，考虑到二阶非线性光学现象在其他的书籍中已有较详细的讨论，本书仅在第三章中介绍了二阶非线性光学的重要结果，这一部分的重点是介绍由介质的三阶非线性极化引起的四波相互耦合产生的各种现象。第七章至第九章描述在光场作用下介质折射率改变而引起的各种现象。第十三章讨论了超短激光脉冲作用于共振介质而产生的各种光学瞬态相干现象，这是另一类非线性光学现象，它将为研究物质中原子和分子中的瞬态行为提供重要的手段。在第十至十二章中重点介绍了近几年来在介质波导、光折变材料和半导体中的非线性光学的最新研究成果，这是非线性光学中较活跃的领域，而在以往有关非线性光学的书籍中介绍得较少。另外，本书收集了有关的常数、数据和图表作为附录列于书后，为读者查找提供方便。

非线性光学是内容十分广泛的一个领域，而且其发展速度是前所未有的，所以，本书不可能包括非线性光学的全部内容。本书除讨论非线性光学的重要理论基础外，主要介绍在非线性介质中产生的各类非线性光学现象，重点是三阶非线性光学现象及其应用，并注意介绍在这一领域中的最新进展，它可作为有关专业研究生课程的教学参考书，也可供科技工作者和工程技术人员参考。

作者水平有限，疏漏及错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

作者

1989. 7

# 目 录

<b>第一章 非线性光学极化率理论</b> .....	1
§ 1-1 介质中的麦克斯韦方程 .....	1
§ 1-2 介质的极化率响应函数 .....	3
§ 1-3 极化率张量及特性 .....	6
§ 1-4 单色波场产生的极化场 .....	9
§ 1-5 一维振子响应的经典理论 .....	14
§ 1-6 密度算符的运动方程及密度算符的微扰级数 .....	18
§ 1-7 极化率张量表示法 .....	22
§ 1-8 独立分子体系的电极化率张量 .....	29
§ 1-9 电极化率的共振增强作用 .....	37
§ 1-10 非线性极化率张量的图解表示——费曼 (Feynman) 图 .....	41
§ 1-11 局域场对 $\chi^{(r)}$ 的修正 .....	46
§ 1-12 $\chi^{(r)}$ 的时间反演对称特性 .....	48
参考文献 .....	49
<b>第二章 平面波在非线性介质中的传播</b> .....	50
§ 2-1 波动方程 .....	50
§ 2-2 电磁场中功率的输运、储存和耗散 .....	52
§ 2-3 电磁波在各向异性晶体中的传播 .....	56
§ 2-4 非线性介质中的耦合波 .....	61
参考文献 .....	64
<b>第三章 二阶非线性光学效应</b> .....	65
§ 3-1 非线性极化率和非线性系数 .....	65
§ 3-2 有效非线性系数 .....	68
§ 3-3 三波相互作用的耦合波方程 .....	72
§ 3-4 光学二次谐波 .....	73
§ 3-5 非线性相互作用中的相位匹配 .....	80
§ 3-6 光学参量放大和振荡 .....	85

§ 3-7 线性电光效应.....	91
参考文献.....	98
<b>第四章 金属蒸气中的非线性光学效应</b> .....	99
§ 4-1 金属蒸气中的非线性光学理论.....	99
§ 4-2 原子自电离对三阶非线性光学效应的贡献.....	104
§ 4-3 三次谐波的产生.....	107
§ 4-4 实验上的考虑.....	110
§ 4-5 双光子吸收.....	113
参考文献.....	115
<b>第五章 受激散射效应</b> .....	116
§ 5-1 光散射现象的一般描述.....	116
§ 5-2 受激拉曼散射.....	118
§ 5-3 受激拉曼散射——一种波长可调谐的激光源.....	124
§ 5-4 受激布里渊散射.....	128
参考文献.....	136
<b>第六章 四波混频</b> .....	137
§ 6-1 概述.....	137
§ 6-2 简并四波混频.....	138
§ 6-3 四波混频中的相位共轭.....	141
§ 6-4 相干反斯托克斯拉曼散射 (CARS) .....	147
参考文献.....	152
<b>第七章 激光感生动态光栅</b> .....	153
§ 7-1 两束光波的干涉和干涉光栅.....	153
§ 7-2 振幅光栅和相位光栅.....	159
§ 7-3 动态光栅的形成机制.....	161
§ 7-4 动态光栅的衍射.....	168
§ 7-5 运动光栅.....	173
参考文献.....	178
<b>第八章 光场感生双折射效应</b> .....	179
§ 8-1 光致折射率效应的物理机制.....	179
§ 8-2 光克尔效应和椭圆偏振光.....	185
§ 8-3 光学双稳态.....	189

<b>第九章 自聚焦现象</b> .....	192
§ 9-1 概述.....	192
§ 9-2 自聚焦的稳态理论.....	194
§ 9-3 动态自聚焦效应.....	201
参考文献.....	204
<b>第十章 光波导内的非线性光学</b> .....	205
§10-1 波导模.....	205
§10-2 平面波导的模式特性.....	209
§10-3 波导模之间的耦合.....	213
§10-4 周期性波导.....	216
§10-5 耦合模方程的解.....	221
§10-6 电介质波导中的电光调制和模式耦合.....	226
§10-7 导波中的非线性效应.....	230
§10-8 脉冲光在光纤内的传播.....	235
参考文献.....	239
<b>第十一章 光折变效应</b> .....	240
§11-1 概述.....	240
§11-2 光场作用下载流子输运方程.....	241
§11-3 晶体中光感生电场和光折变效应.....	246
§11-4 感生光栅反射率.....	251
§11-5 光折变晶体中的两波耦合.....	255
§11-6 应用.....	258
参考文献.....	263
<b>第十二章 半导体中的非线性光学效应</b> .....	264
§12-1 引言.....	264
§12-2 在光场作用下半导体中载流子的非线性运动.....	266
§12-3 能级间跃迁的非线性.....	269
§12-4 其他非线性机理.....	278
§12-5 半导体量子阱中的饱和吸收.....	282
§12-6 复合材料中的非线性光学效应.....	286
参考文献.....	288
<b>第十三章 光学瞬态相干效应</b> .....	289



§13-1 二能级体系中的磁共振 .....	290
§13-2 光学布洛赫 (Bloch) 方程.....	297
§13-3 自感应透明.....	304
§13-4 光学章动和自由感应衰减效应.....	313
§13-5 光子回波.....	316
参考文献.....	320
<b>附录</b> .....	<b>321</b>
一、重要的物理常数.....	321
二、非线性极化率的单位.....	321
三、非线性极化系数 $d_{ijk}$ 的张量形式.....	322
四、三阶极化系数.....	325
五、有效非线性系数 $d_{eff}$ .....	325
六、四波混频中的费曼图和传播因子.....	327
<b>索引</b> .....	<b>343</b>

# 第一章 非线性光学极化率理论

非线性光学现象的产生是由于电磁场与物质体系中带电粒子相互作用的结果。在光波场作用下，介质中粒子的电荷分布将发生畸变，以至电偶极矩不仅与光波场的线性项有关，而且与光波场的二次及高次项有关，这种非线性极化场将辐射出与入射场频率不同的电磁辐射。对介质而言，尽管所加外场频率可以相同，但由于介质的非线性性质不同，表现出来的非线性效应可以各异。一般用非线性极化率这一物理量来描述介质的光学非线性特征。

本章将讨论光学非线性极化率的一般特征，进而讨论独立分子体系的非线性极化率的表达形式。

## §1 介质中的麦克斯韦方程

光波场是电磁波，它应服从电磁场运动的一般规律——麦克斯韦方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \vec{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \quad (1-1)$$

物质方程：

$$\begin{cases} D = \varepsilon_0 E + P, \\ B = \mu_0 H + \mu_0 M, \\ J = \sigma E, \end{cases} \quad (1-2)$$

上两式中  $J$  和  $\rho$  分别为介质中的自由电流密度和自由电荷密度,  $M$  为磁化强度,  $\varepsilon_0$  为真空电容率,  $\mu_0$  为真空磁导率,  $\sigma$  为介质的电导率。  $P$  是介质的极化强度。我们所感兴趣的是感生极化, 因此可以假定介质是非磁性的, 而且无自由电荷存在, 即  $M = 0$ ,  $J = 0$ ,  $\rho = 0$ 。于是上列方程可化为:

$$\begin{cases} \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}, \\ \nabla \cdot D = 0, \\ \nabla \cdot B = 0. \end{cases} \quad (1-3)$$

$$\begin{cases} B = \mu_0 H, \\ D = \varepsilon E. \end{cases} \quad (1-4)$$

电位移矢量  $D$  为

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E + P. \quad (1-5)$$

式中  $\varepsilon$  为介电常数。上述方程采用的是国际单位制。在以后的叙述中如果我们不特别声明, 均采用国际单位制。

在电场  $E$  作用下, 如果考虑了介质的非线性作用, 则极化强度应由线性项和非线性项组成, 即

$$P = P_L + P_{NL}. \quad (1-6)$$

当场强较低时, 可以忽略非线性项  $P_{NL}$  而保留线性项  $P_L$ , 这正是通常线性光学问题。当电场强度比较高时, 可以将非线性极化强度写成级数形式,

$$P_{NL} = P^{(2)} + P^{(3)} + \dots + P^{(n)} + \dots. \quad (1-7)$$

其中  $P^{(n)}$  表示和电场  $E$  的  $n$  次方有关的极化强度, 可以称作  $n$

阶极化强度。这里只考虑偶极矩近似，完全忽略电四极矩及多极矩的影响。以后如果未加说明，都取偶极矩近似。

场强  $E(\mathbf{r}, t)$  和极化强度  $P(\mathbf{r}, t)$  采用通常复数表示法。

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [ E(\omega) e^{-i\omega t} + E^*(\omega) e^{i\omega t} ], \quad (1-8)$$

$$E(\omega) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})}。 \quad (1-9)$$

$\mathcal{E}(\mathbf{r})$  为实振幅，若取单频平面波，则  $E(\omega)$  可写成

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi(\mathbf{r}))} \\ &= E(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1-10)$$

$$E^*(\omega) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\varphi(\mathbf{r})} = E(-\omega)。 \quad (1-11)$$

对于极化强度，可以采用同样的表示方式，

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [ P(\omega) e^{-i\omega t} + P^*(\omega) e^{i\omega t} ]。 \quad (1-12)$$

## §2 介质的极化率响应函数

现设场强  $E(t)$  在时刻  $t$  作用于介质，这将引起介质极化，其极化强度可以写成如下级数形式：

$$P(t) = P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots + P^{(r)}(t) \quad (1-13)$$

式中  $P^{(r)}(t)$  表示与作用场  $r$  次方有关。下面我们在时间域考虑  $E(t)$  和  $P(t)$  之间关系。

若一随时间变化的场  $E(\tau)$  作用于介质，则在时刻  $t$  得到极化强度为：

$$P^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \bar{Q}^{(1)}(t, \tau) E(\tau), \quad (1-14)$$

$$P^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \bar{Q}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) \cdot E(\tau_1) E(\tau_2). \quad (1-15)$$

式中  $\bar{Q}^{(1)}(t, \tau)$  和  $\bar{Q}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$  是将场强与介质极化强度联系起来表明介质对外加电场的响应特性的量。  $P(t)$  和  $E(\tau)$  是矢量。所以  $\bar{Q}^{(1)}(t, \tau)$  和  $\bar{Q}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$  分别为二阶张量和三阶张量，写成标量形式为

$$P_{\mu}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau Q_{\mu\alpha}^{(1)}(t, \tau) E_{\alpha}(\tau). \quad (1-16)$$

其中，

$$Q_{\mu\alpha}(t, \tau) E_{\alpha}(\tau) = \sum_{\alpha}^{1,2,3} Q_{\mu\alpha}(t, \tau) E_{\alpha}(\tau), \quad (1-17)$$

或

$$Q^{(1)}(t, \tau) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t, \tau) & Q_{12}(t, \tau) & Q_{13}(t, \tau) \\ Q_{21}(t, \tau) & Q_{22}(t, \tau) & Q_{23}(t, \tau) \\ Q_{31}(t, \tau) & Q_{32}(t, \tau) & Q_{33}(t, \tau) \end{pmatrix}. \quad (1-18)$$

现在我们来研究(1-14)和(1-15)式中  $Q^{(1)}(t, \tau)$  和  $Q^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$  的性质。首先，它们的一般形式将受到时间不变性原理的限制。所谓时间不变性原理是指介质的动力学性质与时间原点无关，即驱动电场的的时间位移只是使感生极化存在同样的时间位移。如果电场  $E(\tau)$  感生一极化强度  $P(t)$ ，则电场  $E(\tau + T)$  必定感生出极化强度  $P(t + T)$ ，其中  $T$  为任意的时间位移。根据(1-14)式有

$$P(t+T) = \int_{-\infty}^{t+T} \vec{Q}^{(1)}(t+T, \tau) E(\tau) d\tau, \quad (1-19)$$

而根据时间不变性原理, 场  $E(\tau+T)$  作用于介质所产生的极化强度为

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \int_{-\infty}^t d\tau \vec{Q}^{(1)}(t, \tau) E(\tau+T) \\ &= \int_{-\infty}^{t+T} d\tau \vec{Q}^{(1)}(t, \tau-T) E(\tau). \end{aligned} \quad (1-20)$$

比较 (1-19) 和 (1-20) 式可知, 对所有  $t, \tau$  和  $T$  必有

$$\vec{Q}^{(1)}(t+T, \tau) = \vec{Q}^{(1)}(t, \tau-T). \quad (1-21)$$

令  $t=0$ , 并以  $t$  代替式中  $T$ , 则有

$$\vec{Q}^{(1)}(t, \tau) = \vec{Q}^{(1)}(0, \tau-t). \quad (1-22)$$

由此可见  $\vec{Q}^{(1)}(t, \tau)$  只和时间  $\tau, t$  的差有关, 而和各自的值无关, 因而可以表示成

$$\vec{R}^{(1)}(\tau-t) = \vec{Q}^{(1)}(t, \tau) = \vec{R}^{(1)}(T). \quad (1-23)$$

我们称  $\vec{R}(\tau-t)$  为介质的极化响应函数。与三阶张量  $\vec{Q}(t, \tau_1, \tau_2)$  相应的极化响应函数为  $\vec{R}(\tau_1-t, \tau_2-t)$ 。对于三阶和高阶张量  $Q_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$  和  $Q_{\mu\alpha\beta}^{(r)}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ , 可以证明它们是对称张量, 即

$$\begin{aligned} Q_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) &= Q_{\mu\beta\alpha}^{(2)}(t, \tau_2, \tau_1) \\ &= S_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (1-24)$$

$S_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$  称作对称张量。

同样可以证明, 对  $r$  阶有

$$\begin{aligned} P^{(r)}(t) &= \int_{-\infty}^t d\tau_1 \cdots \int_{-\infty}^t d\tau_r \vec{R}^{(r)}(T_1, \dots, T_r) \\ &\cdot E(\tau_1-t) \cdots E(\tau_r-t). \end{aligned} \quad (1-25)$$

其中  $\vec{R}^{(r)}(T_1, \dots, T_r)$  为  $r+1$  阶张量, 称为  $r$  阶响应函数。

### §3 极化率张量及特性

在上一节中, 我们讨论了介质的极化强度与响应函数的关系。如果响应函数已知, 原则上可以对介质的光学性质给出完整的描述。但通常并不是使用响应函数, 而是用极化率张量来描述介质特性。这是因为响应函数是在时间域讨论场与介质极化的关系, 而我们所加的场有特定频率, 为了在频率域讨论上述问题, 我们引进了所谓极化率张量这一物理量。为此只需将在时域的场和极化强度作傅氏变换。

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1-26)$$

将上式代入 (1-14) 式,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(1)}(t) &= \int_{-\infty}^t d\tau \vec{Q}^{(1)}(t, \tau) \mathbf{E}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dT \vec{R}^{(1)}(T) \mathbf{E}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}^{(1)}(T) e^{-i\omega T} dT \\ &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\chi}^{(1)}(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1-27)$$

其中

$$\epsilon_0 \vec{\chi}^{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{R}(T) e^{-i\omega T} dT \quad (1-28)$$

称极化率张量。对  $P^{(1)}(t)$  进行傅氏变换得

$$P^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1-29)$$

比较 (1-29) 与 (1-27) 二式得

$$P^{(1)}(\omega) = \epsilon_0 \vec{\chi}^{(1)}(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (1-30)$$

这是通常应用在频域中的场强与极化强度的关系。同理，对二阶极化则有

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \vec{\chi}^{(2)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2) \\ &\cdot \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \\ \text{而} \\ &\cdot \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dT_1 \int_{-\infty}^{\infty} dT_2 \vec{R}^{(2)}(T_1, T_2) e^{-i(T_1\omega_1 + T_2\omega_2)}, \\ &\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \end{aligned} \quad (1-31)$$

现在简述一下极化率张量的性质。

(1) 复数共轭特性

$$\begin{aligned} \chi^{(1)*}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [R^{(1)}(\tau) \exp(-i\omega\tau)]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R^{(1)*}(\tau) \exp(i\omega^*\tau) \\ &= \chi^{(1)}(-\omega^*) \end{aligned} \quad (1-32)$$

上式中  $R^{(1)}(\tau)$  为一实数。  $R^{(1)}(\tau) = R^{(1)*}(\tau)$ 。

同理可证：

$$[\chi^{(r)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r)]^*$$



$$= \chi^{(1)}(-\omega_1^*, -\omega_2^*, \dots, -\omega_r^*)。 \quad (1-33)$$

### (2) 本征置换特性

由响应函数定义可知,  $R_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = R_{\mu\beta\alpha}(\tau_2, \tau_1)$ 。因此可以得到下列置换特性:

$$\chi_{\mu\alpha\beta}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \chi_{\mu\beta\alpha}^{(2)}(\omega_2, \omega_1)。 \quad (1-34)$$

上述特性称本征置换特性。对于  $r$  阶非线性极化  $\chi_{\mu\alpha\beta \dots r}^{(1)}$  ( $\omega_1, \dots, \omega_r$ ) 应有  $r!$  置换。

### (三) 空间对称特性

我们知道, 若空间一矢量在  $\{x\}$  坐标系中的坐标为  $x_\alpha$ , 在另一坐标系  $\{x'\}$  中的坐标为  $x'_\alpha$ , 其中  $\alpha = 1, 2, 3$ 。则这一矢量在两坐标系中的关系可与一张量联系起来。

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= T_{\alpha\mu} x_\mu, \\ \alpha, \mu &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1-35)$$

式中  $T_{\alpha\beta}$  为一坐标变换张量。而一张量在两坐标系中的变换形式也可用坐标变换张量联系起来。现设坐标系  $\{x\}$  和  $\{x'\}$  之间的变换张量为  $a_{ij}$ , 一张量在  $\{x\}$  坐标系中的张量元为  $T_{kl}$ , 在  $\{x'\}$  坐标系中的张量元为  $T'_{ij}$ , 则有

$$\begin{aligned} x'_i &= a_{ij} x_j, \\ T'_{ij} &= a_{ik} a_{jl} T_{kl}。 \end{aligned} \quad (1-36)$$

极化率张量是表征介质的非线性光学特性的一个量, 所以与所选择的坐标系无关。而由于介质的对称特性的要求, 我们可以证明, 具有某种对称特性的材料, 其极化率的某些张量元可以为零, 或具有某种对称特性。作为一个例子我们可以证明, 具有中心对称的介质无偶次极化。

选  $\{x\}$  坐标系和与  $\{x\}$  坐标系具有中心对称特性的坐标系  $\{x'\}$ , 显然, 这两坐标系间的坐标变换矩阵为