COMPUTATIONAL METHOD OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

最优控制计算方法

张光澄 主编

成都科技大学出版社

最优控制计算方法

张光澄　主编

成都科技大学出版社

内 容 简 介

本书综合介绍最优控制问题的计算方法，并给出若干实例，包括空间技术、工程问题、经济控制和管理信息系统模型．全书分两篇十一章，内容包括变分法、间接方法(两点边值问题，无约束及约束数值方法)、直接方法（动态规划法、多重打靶法）．

本书可作为应用数学、运筹控制专业以及工科其它专业高年级学生和工科研究生教材，也可供科技人员自学参考．

最优控制计算方法

张光澄 主编

成都科技大学出版社出版、发行

四川省新华书店经销

成都科技大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张：6.875

1991年2月第1版 1991年2月第1次印刷

印数：1—1500 字数：149千字

ISBN 7-5616-0591-9/O·50

定价：1.58元

前　言

最优控制问题源于古典的变分问题，空间技术的发展及工程、生产问题的需要，促进了控制工程理论的突破，产生了现代控制理论，并形成它的一个重要分支——最优控制理论。本世纪60年代随着空间计划的实施，人们开始感到对最优控制算法的需要。自此以后，最优控制算法也被用来求解很多航空航天问题、经济计划问题和外形设计问题以及大型空间结构问题。

最优控制是最为困难的优化问题之一，决策变量是一个可测函数，等式约束由常微分方程或偏微分方程以及各种边界条件表示，而不等式约束则可能涉及到边界条件、全部状态轨线和控制作用。本书给出最优控制问题的一般提法，着重于由常微分方程描述的系统。在相当长的时间内，庞特里雅金(Pontryagin)的极大值原理和贝尔曼(Bellman)的动态规划方法为人们求解最优控制问题提供了依据和方法。本世纪70年代以来，非线性系统开环控制的最优控制算法有了新的发展。一方面非线性规划算法被推广到最优控制中，从而形成无约束和约束最优控制的数值方法。另一方面通过参数化的手段，无穷维的最优控制问题被直接化为有穷维的非线性规划问题，这就是当今引人注目的多重打靶算法和多重参数化算法。以上传统方法和现代方法的有机结合形成本书的主要特色。

本书分两篇十一章，内容包括变分方法、间接方法（两

点边值问题、无约束及约束数值方法）、直接方法（动态规划法、多重打靶法）．书中结合算法给出最优控制问题的大量实例，包括空间技术、工程问题、经济计划和管理信息系统的实际模型．按照由浅入深的原则分别将它们安排在开头和结尾．本书可作为应用数学、运筹、控制专业以及工科其它专业高年级学生和工科研究生的教材，也可供科技人员自学参考．

参加本书编写的是成都科技大学应用数学系张光澄（第一篇第一章至第五章，第二篇第六章），张国川（第二篇第七章至第十章），徐玖平、周联刚（第二篇第十一章）．全书由张光澄副教授任主编，南京大学何旭初教授，成都科技大学王荫清教授任主审，周联刚副教授详细校阅了全书．

由于作者水平有限，缺点在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

1990年5月

目　录

第一篇　最优控制与变分方法

第五章 约束最优控制问题的变分方法

第二篇 间接方法与直接方法

第六章 两点边值问题

第七章 无约束最优控制问题的数值方法

第八章 约束最优控制问题的数值解法

第一篇　最优控制与变分方法

最优控制与变分法都是讨论积分形式泛函的极值问题，因而有其相通处．在最优控制问题的求解中，古典的变分方法以及近代的极值原理起着重要的作用．

本篇着重介绍最优控制与变分方法的一些基本概念及其联系．

限于篇幅，变分方法只介绍与最优控制问题紧密相关的一些基本内容，对于重积分形式变分问题、含高阶导数变分问题，本篇均未涉及．

第一章　最优控制问题及实例

1 控制原理简介

1.1 控制是什么？

粗略地说，控制就是"自动调节"．我国古代四大发明之一"指南针"就是一个自动调节系统，不管我们采取何种"干扰"，指南针系统会自动调节使针向保持指南．同样，人体本身也可以看作是一个体温自动调节系统，天冷加衣服，天热减衣服，使自身保持在某一温度范围内．随着工业技术的发展，简单的自控系统应用很多．如家用的冰箱、恒温器等．

进行现代化大生产必须考虑两个问题：一个是生产系统的设计；一个是生产系统的控制．

系统设计所要解决的问题是：按生产的要求，确定系统的结构，并且确定维持生产的操作条件及外部环境．如在化工生产中，需要确定维持生产的温度、压力、流量、组成等等．

系统控制所要解决的问题是：保证设计中所确定的操作条件得以正确地实现．例如，化工生产中的操作条件由于外部干扰的影响是不稳定的，温度、流量、压力、组成等经常波动，影响产品的质量，这就需要设计一个调节机构．所以引进了控制．

一个生产过程或一个系统有无控制的本质区别在于有无反馈作用于输入．

图 1.1 是一个无控制的生产过程，其特点是当其操作条件输入系统后，在外部的干扰下生产输出．由于外部干扰无法排除，将会在输出中反映出来．在这种情形下，一般无法维持给定的输入值．

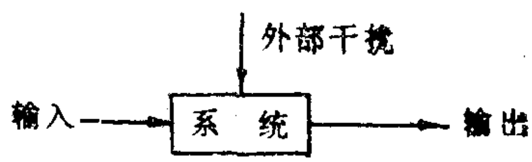

图 1.1

图 1.2 表示一个有控制的生产过程，其特点是将输出的结果进行测定、比较、判断、校正等步骤后，再将校正结果反馈至输入端，对输入加以影响，最终达到输出结果符合目标值．

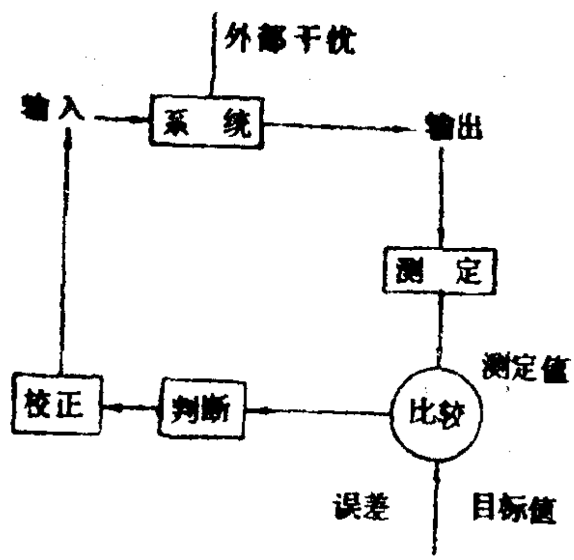

图 1.2

形成控制的手段有两类：

（1）人力控制：以人脑为比较、判断的中心，以人的双手作为执行校正的机构．如操作工控制流量时，先从流量计上读取流量的测定值，再与目标值进行比较．如果不符，便调整阀门的开度，以维持流量恒值．

（2）电脑控制，又称自动控制，即当系统在外部干扰下出现偏差时通过计算机对操作量进行调节．其控制流程（如图 1.3 所示）如下：

①检测元件对各种参数（如压力、流量、温度、组成等等）连续不断地检测，得到检测数据.

②变送器将数据检测量转换成电信号.

③多路输入切换开关将电信号送入模/数转换装置，将模拟量如电压等转换为数字量.

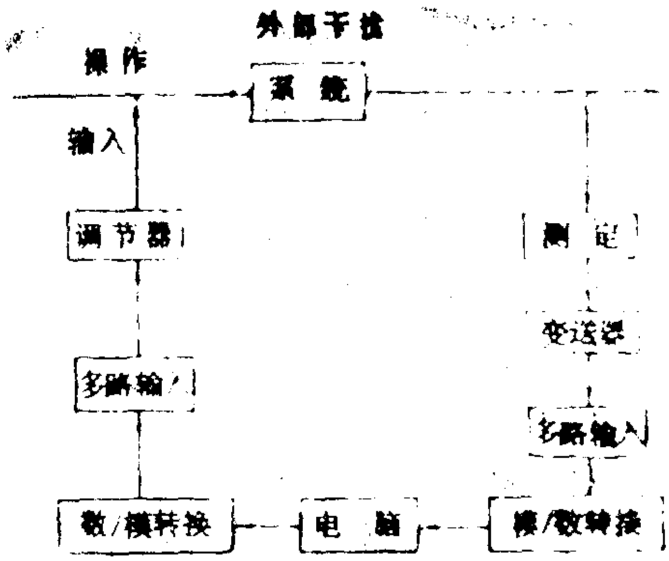

图 1.3

④数字量输入计算机后，计算机对输出参数的实时检测数据进行分析、比较、判断，并将判断结果输入数/模转换装置.

⑤数/模转换装置将数字量再恢复为模拟量（电信号）送入调节器.

⑥由调节器驱动执行机构控制操作，使生产稳定运行或保持最优工况.

空间技术的发展及工程、生产问题的需要，促进了控制工程理论的突破，产生了现代控制理论，其三个标志为：

(1) 状态空间方法的出现，能控性、能观性概念的提出；

(2) Pontryagin 极大值原理的创见及 Bellman 动态规划方法的建立；

(3) Kalman滤波器的出现.

现代控制理论采用时域方法，以最优化为准则处理多输入-多输出的复杂的被控系统，近一、二十年现代控制理论发展迅猛，许多分支学科逐渐壮大，其主要内容包括：

(1) 线性系统的一般理论；

(2) 最优控制理论；

(3) 非线性系统理论；

(4) 分布参数控制理论；

(5) 系统辨识；

(6) 状态滤波估计；

(7) 自适应控制；

(8) 微分对策；

(9) 大系统控制理论；

(10)生物控制及经济控制.

控制理论的迅速发展与各学科的相互渗透使得我们难以面面俱到. 本书仅讨论最优控制问题的计算方法. 书中给出最优控制问题的一般提法，只限于由常微分方程描述的系统.

1.2 最优控制

控制的目的是保持系统的输出为定值. 这个定值即是根据系统设计中确定的操作条件来定的，但是设计的操作条件与实际运行时的操作条件很难吻合. 例如化工过程的操作条件中：原料的组成由于物性数据、反应速度常数、装置效率等等基础数据会有不确定性，故使实际使用的原料组成与设计的假定组成往往有出入，反应条件（温度、压力等）会因为触媒的时间老化而发生变化.

由于实际运行的最佳操作条件与设计的最佳操作条件有一定差距，因此要求不断根据实际情况重新计算最优操作条件．于是出现了最优控制系统，即在满足一定的约束条件下，寻求控制的规律，使我们所定目标达到最优．

最优控制理论设计系统有许多优点，适用于复杂的时变系统，可以处理多目标多约束的情况，并可利用计算机进行计算．最优控制系统基本上分为两类：

（1）定常最优控制（离散系统的最优控制）

系统处于定常状态，通过极值化目标所确定的控制量（如操作条件）与时间无关．简单地说，控制在离散点上实施．

（2）动态最优控制（连续系统的最优控制）

系统处于非常状态，通过极值化目标所确定的控制量随时间变化．简单地说，控制在一个时间区间上实施．

最优控制理论是现代控制的核心，早在40年代的控制系统设计中就已有最优控制的应用，只是有较大的局限性，只限于单变量的线性定常系统和很简单的设计目标，但其设计思想与现代控制理论是一致的．随着现代化控制理论的发展，最优控制理论得到了相应的发展．50年代初，人们就开始发表了从工程观点研究最短时间控制问题的文章，为发展现代控制理论提供了第一批实际模型．由于最优控制理论的综合性与数学理论、工程问题、空间技术、计算机发展等的密切关系，使其具有严格的表达形式和广泛的应用性，引起了科学家们的密切注意．人们发现，最优控制理论与数学上的变分理论是一脉相通的．但是，古典变分学对具有约束的控制问题却无法解决，这就导致了人们在变分法理论的基础上寻

求一种求解最优控制问题的新方法，最为著名的两个方法是：

(1) R.E.Bellman 的动态规化法．美国数学家Bellman依据最佳原理，发展了变分法中的 Hamilton-Jacobi理论，于1953年至1957年逐渐建立起动态规划方法．它适于上机计算，处理问题范围很广．

(2) Pontryagin 的极大值原理．苏联数学家 Pontryagin 受力学中 Hamilton 原理的启发，于 1956 年至1958年逐步创立了最优控制问题的最大值原理．极大值原理是通过一个最优控制的必要条件，把较复杂的带积分的最优控制问题转换成一个相对简单的最优化问题，其应用相当广泛．

最优控制理论在空间技术等方面的广泛应用，需要解决的较复杂的系统越来越多．一方面，人们研究最优控制问题的存在性、充分必要条件，从理论进行探讨；另一方面，在最优控制问题解析解难以得到的情形下，利用高度发展的计算机这一得力工具，研究摸索最优控制问题的数值方法，出现大批研究成果．

可以说，最优控制问题的研究今后仍将是现代控制理论的重要工作，而最优控制理论的发展，需要与之相应的计算方法．因此最优控制计算方法的重要性是很清楚的．

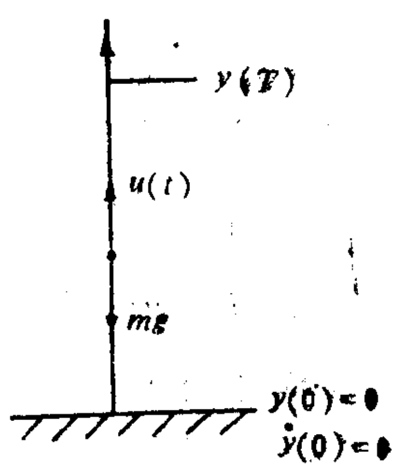

图 1.4

2 最优控制的实例

2.1 空间技术中的实例

例1.1 最小耗能问题

考虑一支火箭在时间 $[0, T]$ 内从地面上升到某一高度 $\overline{y}$，其运动规律可由微分方程描述·

$$m\ddot{y}(t)=u(t)-mg\ .$$

其中 $y(t)$ 表示时刻 t 火箭的高度，$u(t)$ 表示时刻 t 火箭在垂直方向向上发出的推力，m 为火箭的质量．如图1.4所示．火箭的推力是有限制的，即

$$|u(t)|\leqslant b\ . \tag{1.1}$$

为方便起见，改写运动规律方程：

令 $\dot{y}_1=y_2,\quad \dot{y}_2=\frac{1}{m}u(t)-g\ .$

所以有 $$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}u(t)-\begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

和 $$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

我们的目标是使火箭到达某一高度耗能最小，即满足

$$y_1(T)=\overline{y} \tag{1.4}$$

时耗能最小．根据物理学的观点，所耗能量可用 $\int_0^T|u(t)|dt$ 表示．因而本问题就是在满足 (1.1)—(1.4) 式的条件下使 $\int_0^T|u(t)|dt$ 达到极小，求出最佳推力 $u(t)$．

例1.2 登月问题

考虑一登月飞船，消耗最少的燃料在月球上以速度零安全着陆问题．设飞船质量为 m，高度为 h，垂直速度为 v，月

球的重力加速度为常数 g，u 为飞船发动机推力。u，h，v，m 皆为时间 t 的函数．又设飞船自身质量为 M，燃料质量为 F．运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{h}=v,\\&\dot{v}=-g+u/m,\\&\dot{m}=-ku(k\text{是常数})\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(1.5)$$

初始状态：

$$h(0)=h_0,\ v(0)=v_0,\ m(0)=M+F. \qquad (1.6)$$

终端状态：

$$h(t_f)=0,\ v(t_f)=0\ (t_f\ \text{为终端时间}). \qquad (1.7)$$

控制量推力 u 限制在

$$0\leqslant u\leqslant u_{max}. \qquad (1.8)$$

我们的目标是使燃料消耗最小，所以问题归结为求最佳推力 $u(t)$ 使(1.5)—(1.8)式满足，并使 $m(t_f)$ 达到极大.

例1.3 飞行器静止问题

飞行器上的控制面要在某一固定位置上保持静止，但阵风却使此面与预定位置产生偏离．可以设计一个伺服机构产生回复力矩，使控制面在最小时间内回到静止状态．运动方程满足

$$\ddot{\theta}(t)+a\dot{\theta}(t)+\omega^2\theta(t)=u(t),$$
$$\theta(0)=\theta_0,\ \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0\ .$$

其中 θ 表示离开预定位置的偏差，θ_0 是位移，$\dot{\theta}_0$ 是阵风施加给控制面的速度，$u(t)$ 为 t 时刻的回复力矩，$u(t)$ 满足 $|u(t)|\leqslant c$（c 为常数）.

显然问题就是寻求 $u(t)$，使在最小时间内达到 $\theta=0$，