电动力学基础

DIAN DONG LI XUE JI CHU

梁绍荣　王雪君　编

北京师范大学出版社

11/11-106

高等学校教学参考书

电动力学基础

梁绍荣　王雪君　编

北京师范大学出版社

1 9 8 1 年

高等学校教学参考书

电动力学基础

梁绍荣　王雪君　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
解放军七二二六工厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32　印张: 10　字数: 212 千字
1982 年 4 月第一版　1982 年 4 月第一次印刷
印数: 1—18500
统一书号: 13243·15　定价: 0.98 元

编者的话

电动力学是大专院校物理系学生的必修课，也是一门较难学习的理论物理课。本书的编写目的是为电动力学的初学者和一些在职进修的中学物理教师提供一本较易读的教材，学习本书以后，可对已学过的电磁学知识有较系统、深入的理解，同时也为进一步学习理论物理打下初步而可靠的基础。

本书初稿《电动力学基础讲义》曾作为北京广播电视大学的教材在电视课上进行讲授，学员为年轻中学教师，他们是在学过中央广播电视大学的普通物理和一年级高等数学的基础上学习本课的，共用了四十学时，讲授了本书的前四章。此次公开出版，编者在原讲义的基础上进行了修改，并增写了第五章狭义相对论部分。对于非物理专业或物理专科的学员，如拟用五十学时左右学完本书，应该是不大困难的。

为了达到本书的编写目的，首先，对教材内容进行了慎重的选择和取舍；其次，在叙述、讲解方面力求作到文字简明，说理清楚，浅显易懂；第三，各章之后均配有难易程度与取材相应的一定数量的习题，并附有答案，供学习时选用。

本书初稿由梁绍荣同志编写；王雪君同志负责初稿的修改工作，任翠娥和安宝生二同志协助进行整理、文字加工；王、任、安三同志负责选配习题；全书经梁绍荣同志最后复核、定稿。

由于编者水平所限，加以时间仓促，书中错误和疏漏之处在所难免，切望广大读者批评指正。

一九八一年十月

引　言

电动力学是在电磁学基础上系统地阐述电磁场的基本理论，它的研究对象是电磁场的基本性质和运动规律以及电磁场与带电物质之间的相互作用。

在生产实践和科学技术领域内，存在着大量和电磁场有关的问题。例如，电力系统、电磁探矿、粒子加速器等，都涉及到不少宏观电磁场理论问题。电磁波是迅变电磁场，其应用更为广泛，无线电报、热辐射、光波、X射线和γ射线等都是在不同波长范围内的电磁波，它们有共同的规律。可见，电磁场是物质世界的重要组成部分之一，掌握电磁场的基本理论对解释世界和改造世界从而对我国近代化建设都有重要意义。

本书比一般《电动力学》内容要少一些，在深度方面也浅一些，故曰《电动力学基础》。但它们所研究的对象和方法都是相同的。

我们希望通过本书的学习能够达到：掌握电磁场的基本规律，了解狭义相对论的时空观；初步获得用电动力学知识分析和处理一些基本问题的方法和能力；为进一步学习理论物理打下初步而可靠的基础。

本书采用国际单位制（SI）。

目　录

第一章　数学准备知识

学习电动力学，需要一定的、必不可少的数学知识，其主要内容是矢量代数和矢量场论。对于矢量代数只作简要的复习，因为这部分内容一者比较容易，其次是学习本课程的同志可能多半学习过它。对于矢量场论，要作较详细地讲述，但从数学观点看，可能不够十分严密，而从物理方面看，已大体够用。

对于这部分内容，一定要掌握好，因为它是学习电动力学的工具。“工欲善其事，必先利其器”也！学好它对于学电动力学可收到“事半功倍”的效果，否则，在学习过程中必然困难重重，“一波未平，一波又起”。!

§1 矢量代数复习

1． 矢量 $\mathbf{a}$ 的大小以 a 表之，$a=|\mathbf{a}|$，

∴　$\mathbf{a}=a\hat{a}$，　　　$\hat{a}$ 称为单位矢量。

$$\hat{a}=\frac{\mathbf{a}}{a} \tag{1.1.1}$$

2． 矢量在直角坐标系中的表示式

图(1-1-1)中，$\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$ 分别是 x、y、z 轴的单位矢量。任一矢量 $\mathbf{a}$ 可表示为：$\mathbf{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$，其中：

$$\begin{cases} a_x=a\cos\alpha \\ a_y=a\cos\beta \\ a_z=a\cos\gamma \end{cases} \tag{1.1.2}$$

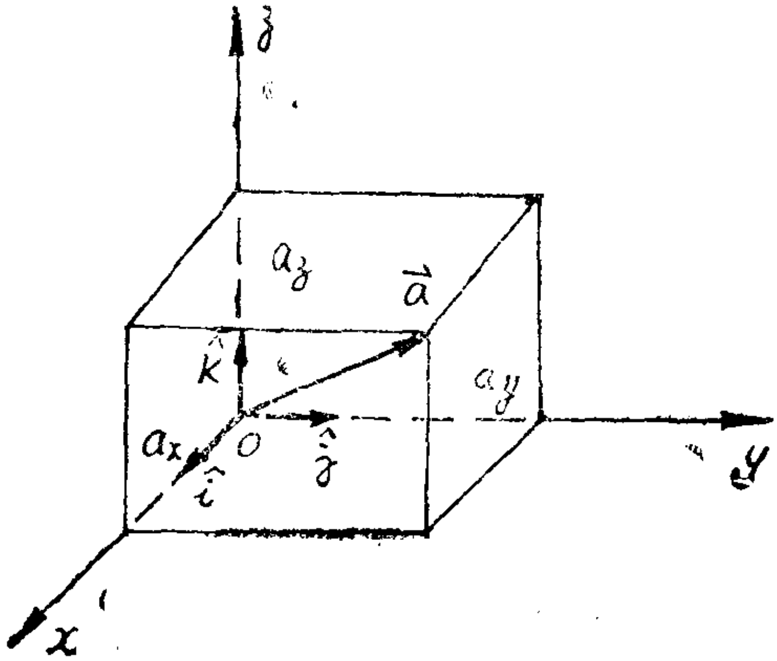

图 (1-1-1)

α、β、γ 分别为 **a** 与 x、y、z 轴的夹角。

空间任一点 P 的位置，可以用 P 点对某一固定点 O 的矢径表示，这矢径称为 P 点的位置矢量 **r**、$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$。

若有矢量 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$，那么它们对应分量一定相等，即：

$$\begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

反之，若两个矢量的全部对应分量都各自相等，那么，这两个矢量一定相等。

若 **a** 是零矢量，那么 $a_x = a_y = a_z = 0$。反之亦然。

3． 几个公式：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1.1.3)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\hat{i}(a_y b_z-a_z b_y)+\hat{j}(a_z b_x-a_x b_z)$$
$$+\hat{k}(a_x b_y-a_y b_x) \qquad (1.1.4)$$
$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \qquad (1.1.5)$$
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (1.1.6)$$

对变矢 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(t)$，$\mathbf{b}=\mathbf{b}(t)$，有：

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\hat{a}\frac{da}{dt}+a\frac{d\hat{a}}{dt} \qquad (\mathbf{a}=\hat{a}a) \qquad (1.1.7)$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} \qquad (1.1.8)$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} \qquad (1.1.9)$$

§2 标量场的方向导数和梯度

如果在全部空间或部分空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定值，就说在这空间里确定了该物理量的场。由此可知，描写场的物理量是点函数。如果这个物理量是标量，就称这个场为标量场；若是矢量，就称这个场为矢量场。如：电位场，温度场是标量场；而电场、磁场是矢量场。

1. 标量场的方向导数

在标量场 $\varphi(x、y、z)$ 中〔以下为了方便起见，我们将 $\varphi(x、y、z)$表为 $\varphi(\mathbf{x})$，$\mathbf{x}$代表 x、y、z 一组数，我们除了要了解标量场的分布情况外，还需要考察标量 $\varphi(\mathbf{x})$ 在场中各个点处的邻域内，沿每一方向的变化情况，为此，引进方向导数概念。

设 φ_0 是标量场中 P_0 点的标量值，从 P_0 点出发沿任一

方向 S 作一射线， P 点为射线上的一点， φ_P 表示标量场在该点的值。

$\Delta\varphi=\varphi_P-\varphi_0$ 是标量从 P_0 点沿 S 方向移到 P 点的增量，$\rho=\overline{P_0P}$ 是两点之间的距离，如图(1-2-1)所示。

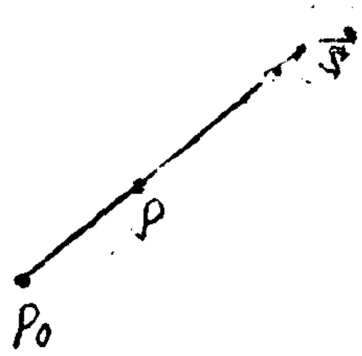

图 (1-2-1)

我们称 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta\varphi}{\rho}$ 为标量函数 φ 在点 P_0 处沿 S 方向的方向导数，记作：$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial S}\right|_{P_0}$

即，$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right|_{P_0}=\lim_{P\to P_0}\frac{\varphi_P-\varphi_{P_0}}{\overline{P_0P}}=\lim_{P\to0}\frac{\Delta\varphi}{\rho}\qquad(1.2.1)$$

由此定义可知，方向导数是函数 $\varphi(x)$ 在一个点处沿某一方向对距离的变化率。它的数值与所取 S 方向有关，但它并不是向量。

当 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial S}>0$ 时，说明在这个特定方向，$\varphi(x)$ 是增加的；

当 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial S}<0$ 时，$\varphi(x)$ 沿着这个方向是减少的。

2. 梯 度

由一个点出发，可以作无穷多个方向，所以一个点的方向导数有无穷多个。一般来说，$\varphi(x)$ 从一点出发沿着不同方向变化的快慢是不同的，也就是说在不同的方向上，$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial S}\right|_{P_0}$ 是不同的，但总存在着一个方向 $\hat{n}$，φ 沿着 $\hat{n}$ 方向增长的最

快，因此，我们可以定义一个矢量，称为梯度：它的方向是 φ 增长的最快的方向，它的大小是 φ 沿着这个方向的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，记作grad φ(grad 是英语中梯度：gradient 一词的缩写)

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n} \tag{1.2.2}$$

以下我们要求出直角坐标系中，grad φ 的表达式和场中同一点梯度大小和在其它方向的方向导数之间的关系。

一般来说，场中标量值相等的点组成一个面，称为等值面。

在点电荷或带电球体产生的电场中，电势的等值面（等势面）是以点电荷（或球心）为心的同心球面。

图(1-2-2)画出了相当于标量值 φ 的值为 φ_0，$\varphi_0\pm\Delta\varphi$，$\varphi_0+2\Delta\varphi$ 的等值面($\Delta\varphi>0$)用 $\hat{n}$ 表示等值面 φ_0 在 P_0 点的法线，$\hat{n}$ 的方向指向 φ 增长的方向。

现在我们指出，知道了沿这一法线方向的微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，就可以确定标量 $\varphi(x)$在同一点沿任一方向的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial S}$。

在图(1-2-3)中，P、P_n 为等值面 $\varphi_0+\Delta\varphi$ 上的两个点，所以，两点的 φ 值：φ_P 和 φ_n 相等，但 P 点在由 P_0 出发，在沿 $\hat{s}$ 方向的射线上，而 P_n 在沿 $\hat{n}$ 方向的射线上。

当 $\overline{P_0P}\to 0$ 时，

$$\overline{P_0P}=\frac{\overline{P_0P_n}}{\cos(\hat{s},\hat{n})}$$

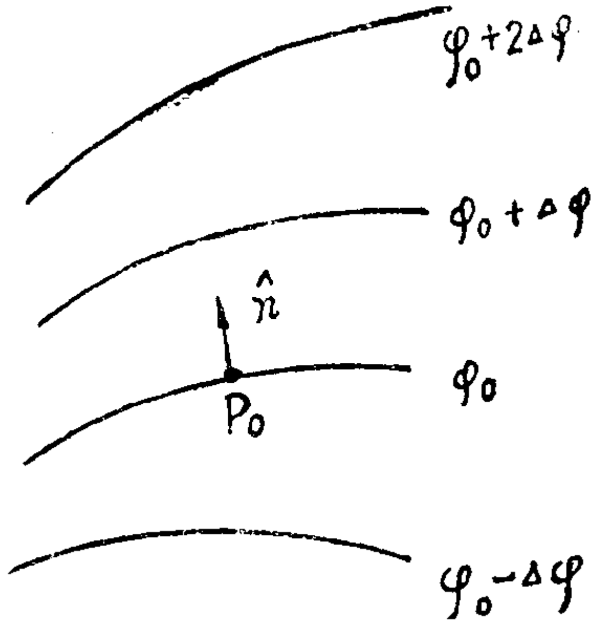

图 (1-2-2)

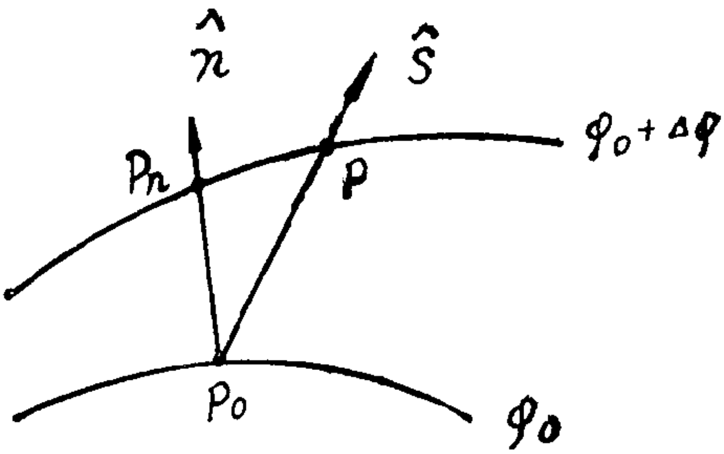

图 (1-2-3)

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right|_{P_0}=\lim_{\overline{p_0 p}\to 0}\frac{\varphi_P-\varphi_{P_0}}{\overline{P_0P}}$$

$$=\cos(\hat{s},\hat{n})\lim_{\overline{p_0 p_n}\to 0}\frac{\varphi_P-\varphi_{P_1}}{\overline{P_0P_n}}$$

$$=\cos(\hat{s},\hat{n})\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{P_0}$$

即 $$\frac{\partial\varphi}{\partial S}=\cos(\hat{s}、\hat{n})\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{1.2.3}$$

$\hat{S}$ 的方向是任取的，从（1.2.3）式看出，当 $\hat{S}\neq\hat{n}$ 时，总有$\frac{\partial\varphi}{\partial S}<\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，可见，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$是数值最大的一个方向导数，又$\hat{n}$指向 φ 增长方向，而$\frac{\partial\varphi}{\partial n}>0$，所以，$\hat{n}$是$P_0$点标量φ(x)增长得最快的方向。按梯度定义，$\hat{n}$方向就是梯度的方向，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$正是梯度的大小，所以，梯度的方向和该点的等值面垂直。

式（1.2.3）表示同一点的梯度和方向导数之间的关系，因此，可把(1.2.3)式进一步表示为：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S}=\mathrm{grad}\ \varphi\cdot\hat{s} \tag{1.2.4}$$

由（1.2.4）看出，只要把某点的梯度求出就可以用它来确定 φ(x)在该点的任意方向上的方向导数。

当我们取 $\hat{s}$ 方向分别为直角坐标系中三个单位向量 $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$ 时，有：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mathrm{grad}\ \varphi\cdot\hat{i}=\mathrm{grad}_x\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathrm{grad}\ \varphi\cdot\hat{j}=\mathrm{grad}_y\,\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mathrm{grad}\ \varphi\cdot\hat{k}=\mathrm{grad}_z\,\varphi$$

grad φ 是个矢量，上面三式恰好是它在直角坐标中的三个分量，

即：$$\operatorname{grad}\varphi=\hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.2.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\left|\operatorname{grad}\varphi\right|=\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.2.6}$$

式(1.2.5)是梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式。

由此可知，当 φ 只是矢径 r 大小的函数时，即$\varphi(r)$，用复合函数微分法则，可得：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{1.2.7}$$

$$\therefore\quad \operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\operatorname{grad}\boldsymbol{r}$$

3. ∇ 算符

为了简便，我们可以引进这样一个算符：

$$\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

它包含矢量和微分双重运算。它可以作用到一个标量场 φ 上，定义为：

$$\nabla\varphi=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$=\hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.2.8}$$

它也可以作用到一个矢量场上，作用有两种形式，分别定义为：

i) $$\nabla\cdot\mathbf{A}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$$

$$\cdot(\hat{i}A_x+\hat{j}A_y+\hat{k}A_z)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.2.9)$$

ii) $$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z)$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (1.2.10)$$

由上可知，∇ 算符具有矢量性质，它像一般的矢量一样可以作点乘，叉乘，如(1.1.3)(1.1.4)。但是它的分量，是微分算符：$\frac{\partial}{\partial x}$、$\frac{\partial}{\partial y}$、$\frac{\partial}{\partial z}$，当这些分量与一般矢量的分量（或标量）相乘时，即表示它对此分量作微分运算，所以它是不能和这个分量交换位置的。

将（1.2.5）与（1.2.8）比较：

标量场 φ 的梯度，$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$，以后我们对梯度改用 $\nabla\varphi$ 表示。

值得提出的是，$\nabla\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$，仅仅是标量场 φ 的梯度在直角坐标系中的表达式，它在曲线坐标系（如球坐标、柱坐标系）中的形式，将在以后给出。

此外，因为 φ 是点函数，是场量，所以它的梯度也是一个点函数，但是一个矢量场。

例 1. 求矢径 $\mathbf{r}$ 的数值 $|\mathbf{r}|$ 的梯度，其中 $|\mathbf{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$。

解：按梯度定义：

$$\nabla r=\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{r}$$

同理有：$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$，　　$\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$

$\therefore\quad \nabla r=\hat{i}\dfrac{x}{r}+\hat{j}\dfrac{y}{r}+\hat{k}\dfrac{z}{r}=\dfrac{\mathbf{r}}{r}=\hat{r}$

可见，在矢径起点固定时，r 值仅是矢径端点(x,y,z)的函数，在 x、y、z 点，函数r 沿着矢径 $\mathbf{r}$ 的方向变化最快，变化率为 1，在 $\mathbf{r}$ 的反方向上 r 减少得最快，变化率为 -1，而在其它方向上：

$\because\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial S}=\nabla\varphi\cdot\hat{s}$

$\therefore$　变化率都小于 1

例 2　证明：$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$

证：$\nabla(\varphi\psi)=\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)+$

$\hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)+\hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)$

$\because\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)=\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)=\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$

$\dfrac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)=\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial z}+\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

$\therefore\quad \nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$