立体几何题解

科学技术文献出版社

立体几何题解

张克　孙隽　编译

科学技术文献出版社

1981

内容简介

《立体几何题解》为一本供广大知识青年、青年工人、青年技术人员和高中毕业生学习立体几何和供中学数学教师在教学中作参考而编译的一本习题集。这些习题都是根据编译者多年经验精心选出的。对高中毕业生复习考试尤为需要。

本题解共收入习题334例，包括五章：第一章直线和平面；第二章二面角、多面角；第三章棱锥、棱柱和多面体；第四章旋转体的表面积和体积；第五章曲面体。

立体几何题解

张竞　孙雋　编译

科学技术文献出版社出版

重庆印制第一厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.125　字数：174.4千字

1981年9月北京第一版第一次印刷

印数：1—118150册

科技新书目：9—60

统一书号：13176·125　定价：0.75 元

前　　言

《立体几何题解》是为了帮助具有高中文化程度的广大青年学生、知识青年和青年工人、青年技术人员掌握现代科学技术所必需的数学基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，有助于他们巩固概念和掌握解题技巧；并根据《全日制十年制学校中学数学大纲》、高考复习大纲及国内外的一些有关材料而编译的一本习题集，共收入习题 334 例。

本《题解》内容包括立体几何中各方面的习题，内容丰富，题型种类齐全，是广大知识青年和高中毕业学生复习高考必读的参考用书。也可供中学数学教师教学参考。

该集在深度和广度方面都较现行教材有不同程度的提高，如第五章的曲面体部分，这些对于有兴趣进一步钻研的同志是有益的。

由于我们的水平所限，一定有不少错误和缺点，请广大读者提出批评和指正。

孙　隽　　张　竞

1981年5月

目　录

前　言

第一章　直线和平面……………………………………（ 1 ）

　一、直线和平面(Ⅰ)…………………………………（ 1 ）

　二、直线和平面(Ⅱ)…………………………………（ 26 ）

第二章　二面角　多面角………………………………（ 40 ）

第三章　棱锥　棱柱　多面体…………………………（ 56 ）

第四章　旋转体的表面积和体积………………………（ 104 ）

　一、圆柱………………………………………………（ 104 ）

　二、圆锥　圆台………………………………………（ 108 ）

　三、球…………………………………………………（ 128 ）

　四、杂题………………………………………………（ 153 ）

第五章　曲面体…………………………………………（ 177 ）

　一、圆柱　圆锥………………………………………（ 177 ）

　二、球　球面三角形…………………………………（ 193 ）

　　（Ⅰ）　球…………………………………………（ 193 ）

　　（Ⅱ）　球面三角形………………………………（ 236 ）

第一章　直线和平面

一、直线和平面（Ⅰ）

1. 试述关于直线、平面的公理和确定平面的条件.

解：（1）经过不同的两个点，有且只有一条直线.

（2）经过不在一条直线上的任何三个点，有且只有一个平面.

（3）如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

（4）两个平面不能只相交于一点，而是相交于过这个点的一条直线.

又在下列情况下只有一个平面：

（1）经过不在一条直线上的三个点；

（2）经过一条直线和不在这条直线上的一个点；

（3）经过两条相交的直线；

（4）经过两条平行的直线.

2. 试述下列各项的定义.

（1）空间的两条平行线；

（2）直线和平面平行；

（3）空间的两条直线互相垂直；

（4）直线和平面垂直.

解：（1）在同一个平面内没有公共点的两条直线叫做空

间的两条平行线.

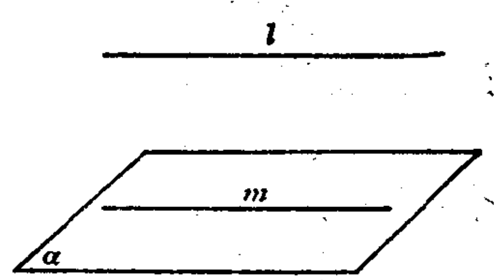
(2)如果一条直线和一个平面没有公共点，那么就叫做直线和平面平行.

(3)过空间任意一点所作的空间的两条直线的平行线如果互相垂直，那么就叫做空间的两条直线互相垂直.

(4)如果一条直线和一个平面相交，并且和平面内过交点的所有的直线都垂直，那么就叫做直线和平面垂直.

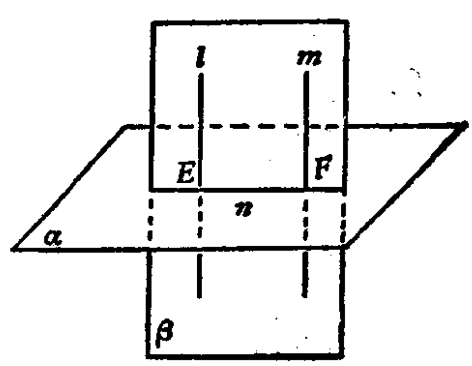
3. 过两条平行线之一而不过另一条直线的平面平行于另一条直线.

解：设 l，m 是两条平行线，α 是过 m 而不过 l 的一个平面，要求证明 $\alpha \parallel l$.



假定平面 α 不平行于 l，那么 l 和 α 相交. 可是因为 $l \parallel m$，这两条直线在同一个平面内，所以假定 α 和 l 相交，交点必在 m 上. 然而因为 $l \parallel m$，所以 l 和 m 不能相交，因而 l 和 α 也不能相交，也就是 $l \parallel \alpha$.

4. 和两条平行线之一相交的平面，也必和另一条直线相交.

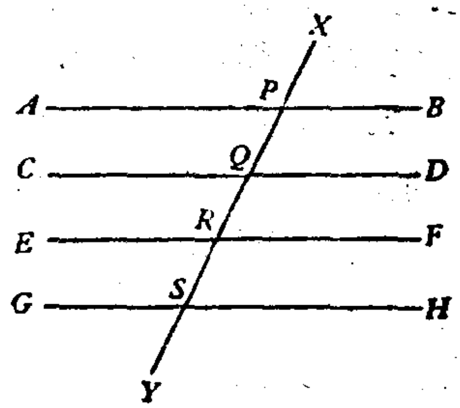


解：设直线 $l \parallel$ 直线 m，平面 α 和 l 相交于点 E. 又因为平面 (l, m) 和平面 α 有公共点 E，所以相交于过点 E 的一条直线 n，在平面 (l,m) 内和平行线 l、m 之一 l 相交的直线 n 也必和 m 相交，设交点为 F，F 是平面 α 内的点，也是直线

m上的点，所以平面 α 和直线 m 相交.

5. 如果互相平行的各直线和另一条直线都相交，那么这些直线都在同一个平面内.

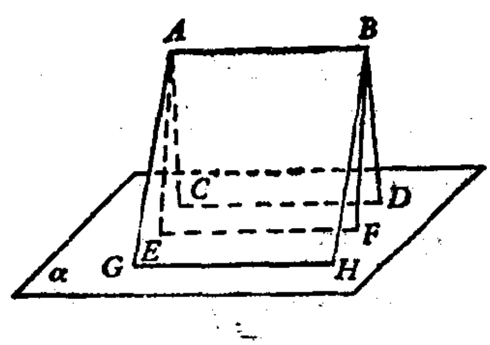
解：设 AB、CD、EF、GH…… 各直线相互平行，并且和直线 XY 分别相交于 P、Q、R、S、…….



这时平面 (AB, CD) 和平面 (AB, PQ) 也就是平面 (AB, XY) 是同一个平面，平面 (AB, EF) 和平面 (AB, PR) 也就是平面 (AB, XY) 是同一个平面，平面 (AB, GH) 和平面 (AB, PS) 也就是平面 (AB, XY) 是同一个平面，所以 AB、CD、EF、GH……和 XY 都在平面 (AB, XY) 内.

6. 已知一条直线和一个平面平行，求证：过已知直线的各平面和已知平面的交线与已知直线平行，并且各交线也互相平行.

解：设直线 $AB \parallel$ 平面 α，经过 AB 的各平面和平面 α 的交线分别为 CD、EF、GH，这时各交线平行于 AB，并且互相平行.

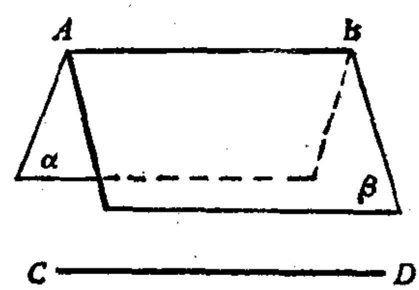


因为 $AB \parallel \alpha$，所以 AB 必不与平面 α 相交，又因为 CD 在平面 α 内，所以 AB 和 CD 也不能相交，而 AB、CD 又在同一平面内，所以 AB 平行于 CD，同理 EF、GH 也和 AB 平行.

其次这些交线中任意两条，比如CD、EF也不能相交，因为假若CD、EF相交，这时就出现了过它们的交点和AB有两个平面了，这是和定理矛盾的，所以CD、EF不能相交．又因为它们在同一个平面内，所以$CD /\!/ EF$，同理其它各交线也都互相平行．

7．　如果两个平面同时平行于一条直线，那么这两个平面的交线和这条直线平行．

解：平面α、β同时和直线CD平行，这两个平面的交线是AB，现在证明$CD /\!/ AB$．

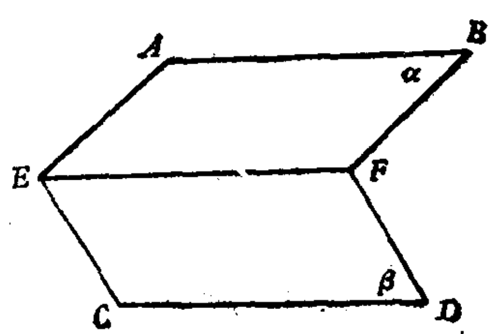


过AB上任意一点A引CD的平行线，这条直线必在平面α内，也必在平面β内，所以这条直线就是两个平面的交线AB，

$\therefore$　$AB /\!/ CD$．

8．　分别过两条平行线的两个平面的交线，和原来的两条平行线平行．

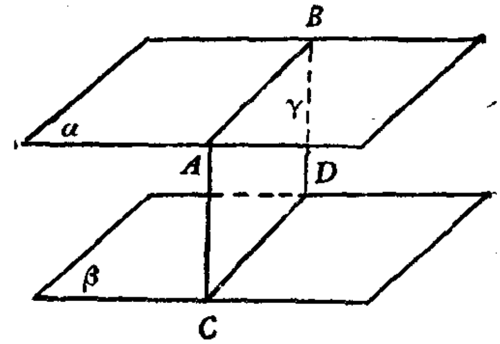
解：设直线$AB /\!/$直线CD，α、β是分别过AB、CD的两个平面，EF是两个平面的交线，现在证明EF和AB、CD平行．



因为平面β过和AB平行的直线CD，所以$AB /\!/ \beta$．其次平面α过平行于平面β的直线AB，所以α和β的交线

$EF \parallel AB$. 同理$EF \parallel CD$.

9. 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

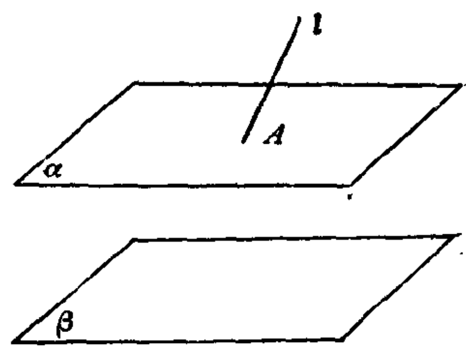


解：设平面$\alpha \parallel$平面β，平面γ和α，β的交线分别是AB，CD，证明$AB \parallel CD$.

因为$\alpha \parallel \beta$，所以AB和CD不能相交，又AB和CD在同一个平面γ内，所以$AB \parallel CD$.

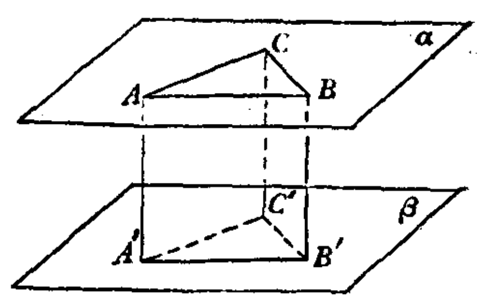
10. 和两个平行平面之一相交的直线，也必和另一个平面相交.

解：如果直线l和平行平面α，β之一α相交于点A，那么l也必和β相交.



理由是：假定l不和β相交，那么必然$l \parallel \beta$，但是因为$\alpha \parallel \beta$，那么过α内点A平行于β的直线l必在α内，这与已知l和α相交矛盾，因而l不能平行于β，所以l和β相交.

11. 如果不在同一个平面内的三条平行线段长度相等，那么过三条线段端点的两个平面平行.

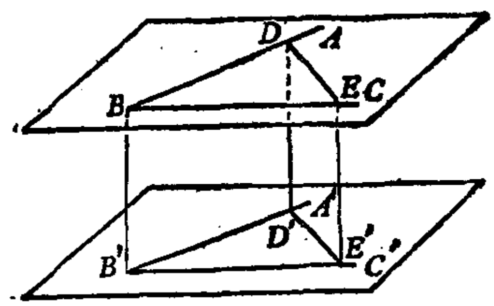


解：因为AA'、BB'、CC'平行且相等，所以$AA'B'B$是平行四边形，所以$AB \parallel A'B'$，同理$BC \parallel B'C'$. 现在

平面α过相交的两条直线AB、BC，平面β过相交的两条直线$A'B'$、$B'C'$，而且$AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$，所以平面$\alpha \parallel$平面β，也就是过三条线段一端A、B、C的平面α和过另一端A'、B'、C'的平面β平行.

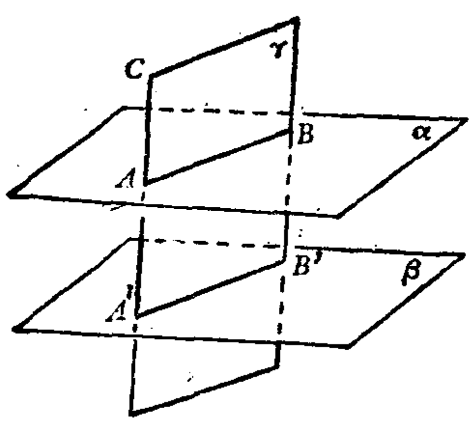
12．如果一个平面内的一个角的两边分别平行于另一个平面内一个角的两边并且方向相同，那么这两个角相等.

解：在BA、$B'A'$上分别截取$BD=B'D'$，在BC、$B'C'$上分别截取$BE=B'E'$，联结BB'、DD'、EE'、DE、$D'E'$，因为$BD \perp\!\!\!\!\!= B'D'$，所以$BB'D'D$是平行四边形，所以$BB' \perp\!\!\!\!\!= DD'$，同理$BB' \perp\!\!\!\!\!= EE'$，所以$DD' \perp\!\!\!\!\!= EE'$，因此$DEE'D'$是平行四边形，



所以$DE=D'E'$．因而$\triangle BDE \cong \triangle B'D'E'$，所以$\angle ABC = \angle A'B'C'$.

13．和两个平行平面之一相交的平面，也必和另一个平面相交.

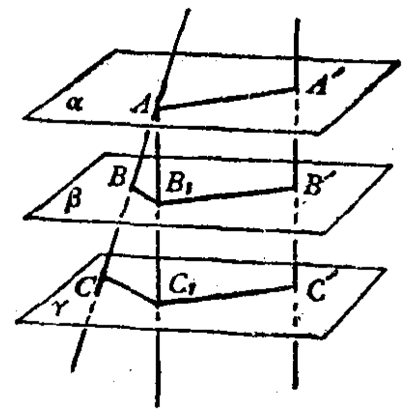


解：α、β是互相平行的两个平面，第三个平面γ和α相交于AB，求证γ也和β相交.

在γ内作直线CA交α于A，因为$\alpha \parallel \beta$，CA既然和α相交于点A，那么CA也必和β相交（10题），设它们的交点是A'，过A'作$A'B' \parallel AB$，

那么 $A'B'$ 必在 β 内，并且平面（CA', $A'B'$）和 γ 是同一个平面，所以平面 γ 和平面 β 相交于 $A'B'$.

14. 两条直线分别和三个平行平面 α、β、γ 相交于 A、B、C；A'、B'、C'. 求证：$AB:BC=A'B':B'C'$.



解：过点 A 作 $A'B'C'$ 的平行线和平面 β、γ 的交点分别为 B_1、C_1，这时 AA'、B_1B'、C_1C' 是平面（$A'C'$, AC_1）和平面 α、β、γ 的交线.

$\therefore$ $AA' \parallel B_1B' \parallel C_1C'$，

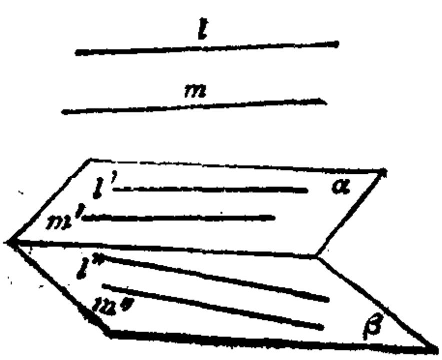
又 $AB_1C_1 \parallel A'B'C'$

$\therefore$ $AB_1=A'B'$，$B_1C_1=B'C'$，又 BB_1、CC_1 是平面（AC, AC_1）和平面 β、γ 的交线，$\therefore$ $BB_1 \parallel CC_1$，

$\therefore$ $AB:BC=AB_1:B_1C_1=A'B':B'C'$.

15. 如果两条直线在两个相交平面内的正射影分别互相平行，那么这两条直线平行.

解：两条直线 l、m 在相交的两个平面 α、β 内的正射影分别是 l'、m' 和 l''、m''，并且 $l' \parallel m'$，$l'' \parallel m''$，求证：$l \parallel m$.



l 和 l' 在一个垂直于 α 的平面内，m 和 m' 也在一个垂直于 α 的平面内，l' 和 m' 就成为这两个平面和 α 的交线了. 现在 $l' \parallel m'$，所以平面（l, l'）$\parallel$ 平面（m, m'），因而直线 $l \parallel$ 平面（m, m'），

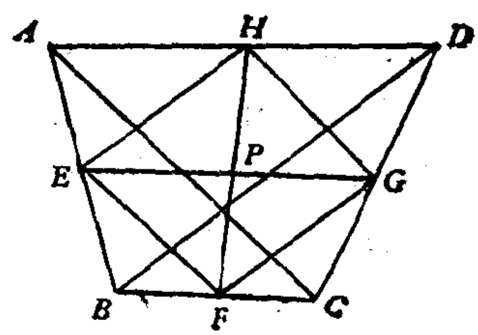
同理直线 $l\parallel$ 平面（m, m''），这样 l 和两个平面（m, m'）和平面（m, m''）的交线 m 平行.

注：如果 l、m 垂直于 α、β 的交线时，就不一定 $l\parallel m$ 了.

16．A、B、C、D 是空间四点，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点．求证：（1）EG 和 FH 相交．（2）设 EG 和 FH 相交于 P，那么 P 是到 A、B、C、D 的距离的平方和最小的点.

解：（1）$EF \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AC$，$HG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AC$，$\therefore$ $EF \perp\!\!\!\!= HG$，因此 $EFGH$ 是平行四边形，所以对角线 EG，FH 相交于它们各自的中点，设为 P.

（2）在 P 以外任意取一点 P'，这时 $AP'^2+BP'^2=2(AE^2+EP'^2)$ $CP'^2+DP'^2=2\ (CG^2+G^2P'^2)$



$\therefore AP'^2+BP'^2+CP'^2+DP'^2$

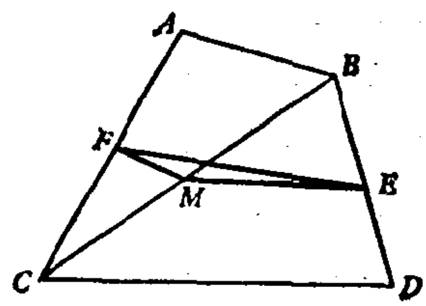
$=2\ (AE^2+CG)+2\ (EP'^2+GP'^2)$

$=\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)+2\{2(EP^2+PP'^2)\}$

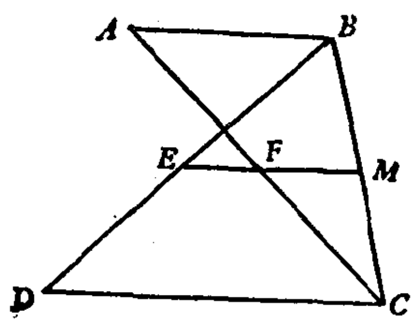
$=\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)+EG^2+4PP'^2$

但 AB^2，CD^2，EG^2 是一定的，所以只有 $PP'=0$，也就是 P' 重合于 P 时到 A、B、C、D 的距离的平方和最小，也就是 P 到 A、B、C、D 的距离的平方和最小.

17．有空间线段 AB、CD，线段 BD、AC 的中点分别为 E、F，（1）如果 E 和 F 重合，那么 AB 和 CD 有什么关系？（2）$AB+CD\geqq 2EF\geqq AB\sim CD$，如果等号成立时，$AB$、$CD$ 的位置关系怎样？（3）P 是 AB 上任意一点，Q 是 CD 上任意一点，线段 PQ 的中点作出什么图形？



解：（1）如果 E、F 重合时，那么 AB、CD 在同一个平面内，这时四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，所以是平行四边形，$\therefore AB\parallel CD$.



（2）设 M 是 BC 的中点，则 $MF=\frac{1}{2}AB$，$ME=\frac{1}{2}CD$、又在 $\triangle MEF$ 中.

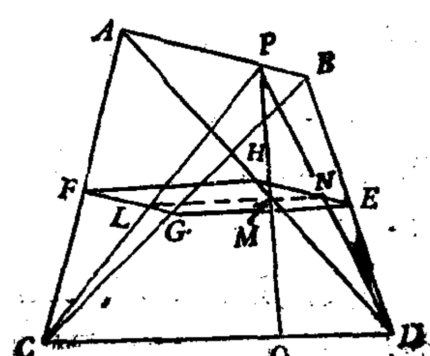
$ME+MF>EF>ME\sim MF$，也就是 $AB+CD>2EF>AB\sim CD$.

又如等号成立时，FME 成一条直线，这时 $AB\parallel CD$.

注：如果等于 AB、CD 的差时，AB、CD 的位置关系如左图.

（3）如图，设 E、F、G、H 分别是 DB、CA、CB、AD 的中点，那么

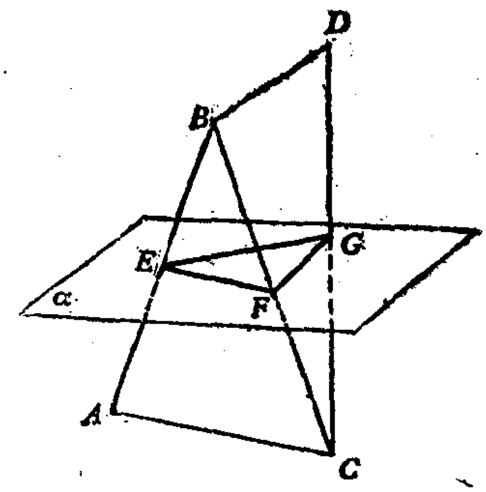
$GE=FH=\frac{1}{2}DC$，$GF=EH=\frac{1}{2}AB$，所以 $FGEH$



是平行四边形.

现在设 CP、DP 分别交 FG、EH 于 L、N，因为 L、N 是 PC、PD 的中点，所以 PQ 的中点 M 在 LN 上，因而 M 在平行四边形 $FGEH$ 内，所以 M 作出平行四边形 $FGEH$.

18．AB、BC、CD 是不在同一个平面内的三条线段，过这三条线段的中点的平面和 AC、BD 平行.



解：E、F、G 是不在同一个平面内的三条线段 AB、BC、CD 的中点，那么：$EF \parallel AC$，$FG \parallel BD$.

设过 EF、FG 的平面是 α，那么 $\alpha \parallel AC$ ……①

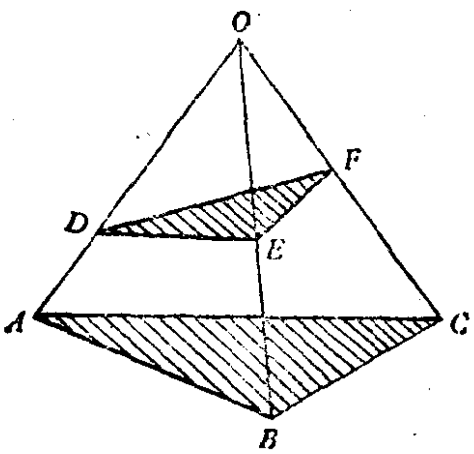
$\alpha \parallel BD$ ……②

由①，②可以知道 α 既平行于 AC 也平行于 BD.

19． 不在同一个平面内的两个三角形 ABC、DEF，联结它们的对应顶点 A 和 D，B 和 E，C 和 F 的三条直线相交于一点 O，对应边 AB 和 DE，BC 和 EF，CA 和 FD 的交点分别是 X、Y、Z，那么 X、Y、Z 在一条直线上，又逆定理也成立（台札尔古定理）.

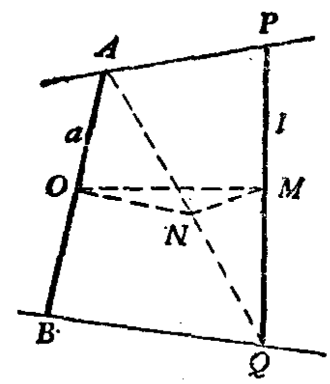
解：设平面 ABC、DEF 的交线是 l，那么 AB 和 DE 的交点 X 在 l 上，同理 Y、Z 也在 l 上，所以 X、Y、Z 在同一条直线上.

又反过来 DE、AB 既相交于 X，那么 $DABE$ 确定一个平面，同理可知 $EBCF$、$FCAD$ 也各确定一个平面.并且



很明显因为不平行，所以有一公共点O.

20．有公垂线的长是a的两条互相垂直的异面直线．又两端分别在这两条异面直线上的定长为l的动线段PQ的中点是M，证明下面两种情况，但$l>a$，（1）M在定平面内，（2）M在定曲线上．



解：（1）设AB是二异面直线的公垂线，O、N是AB、AQ的中点，由于$ON \parallel BQ$，$NM \parallel AP$，所以$AO \perp ON$，$AO \perp NM$，$\therefore AO \perp$平面ONM，所以M在过O而垂直于AO的定平面π内．

（2）由于$AP \perp AB$，$AP \perp BQ$，所以$AP \perp$平面ABQ，

$\therefore \angle PAQ = \angle R$，因而$AM = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} l$，

又由于$AO \perp$平面ONM，$\therefore AO \perp OM$，

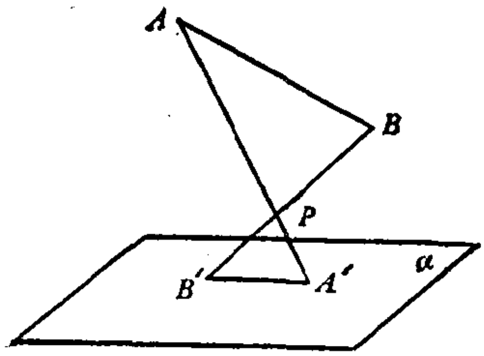
$$\therefore \quad OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{2}.$$

所以M是在以平面π内的点O为圆心，半径为$\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{2}$的定圆周上．

21．线段AB和平面α不平行，P为任意一点，AP、

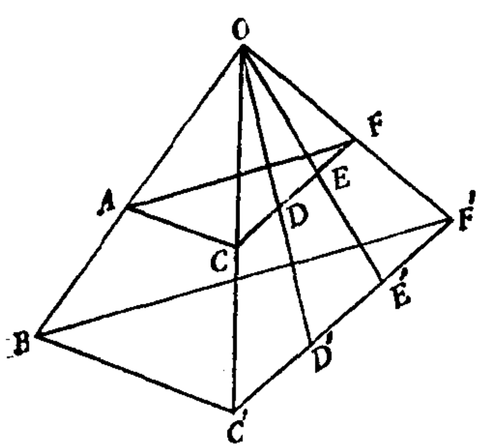
BP的延长线和α相交于A'、B'，不论点P的位置如何，$A'B'$恒通过一定点.

解：因为APA'、BPB'交于点P，所以它们确定一个平面，又AB不平行于平面α，所以AB不平行于$A'B'$而相交，设它们的交点是S，那么S是直线AB和α的交点，因而是一个定点，所以不论P的位置如何，$A'B'$恒通过这个定点S.



22．一个平面和经过一条直线的若干个平面都相交，它们的交线就全都经过这条直线和这个平面的交点．如果这条直线和这个平面不相交时，那么这些交线就和这条直线平行．

解：经过直线AB的若干个平面AC'（平面$ABC'C$）、AD'、AE'、AF'、……，现在有一个平面CF'（平面$CC'F'F$）和这些平面相交，它们的交线是CC'、DD'、EE'、FF'、…….



（1）如果AB和平面CF'相交于点O时，那么交线CC'、DD'、EE'、……经过点O.

（2）如果AB和平面CF'平行时，那么交线CC'、DD'、EE'、……全都和AB平行．它们的理由是：