



振动与声

[美] P. M. 莫尔斯 著

科学出版社

振 动 与 声

〔美〕 P. M. 莫尔斯 著

南京大学《振动与声》翻译组 译

科 学 出 版 社

1 9 7 4

内 容 简 介

本书主要内容是介绍振动和声的基础理论,对固体振动和声波辐射、传播等概念叙述得比较详尽清楚。本书的特点是:注重物理概念,没有停留在烦琐的数学推算上;介绍了近代物理处理问题的一些方法,如量子力学的数学方法、研究瞬态现象的阶跃函数方法等;每章都注意到从浅入深,从具体到抽象,使读者容易接受。从这些特点看来,本书是一本较好的声学基础理论书,可以作为大学声学专业和一般声学工作者的参考书。

中译本是根据1948年《振动与声》第二版原文译出,也参考了该书的俄译本,以订正其中一些排印上的错误。

P. M. MORSE

VIBRATION AND SOUND

McGraw-Hill, 1948

振 动 与 声

[美]P.M. 莫尔斯 著

南京大学《振动与声》翻译组 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1974年8月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1974年8月第一次印刷 印张:14 1/4

精0001—6,000 插页:精3 平2

印数:平0001—5,950 字数:375,000

统一书号:13031·209

本社书号:357·13—3

定价: 精装本 2.20 元
平装本 1.70 元

中 译 本 前 言

P. M. 莫尔斯的《振动与声》初版于 1936 年, 1948 年修订再版, 初版至今已三十多年, 仍然是声学方面一本经常被人们引用和参考的著作。这本书的特点是作者应用了近代物理学方法和由此而发展起来的数学工具, 比较深入地讨论了各种宏观的声学问题, 沟通了经典物理学与微观物理学之间的联系。原书特别强调物理概念和数学方法的运用要相辅相成。虽然个别地方有些烦琐, 运用于具体声学问题不一定方便, 但对开拓思路仍有一定益处。为此, 我们决定对数年前已有的译稿重新校订后出版, 以供有关方面阅读参考。

1973 年 9 月

第 二 版 序

第二次大战期间，声学以及对理论声学特别有用的数学技术有了显著的发展。超声学的研究促使人们对辐射和散射问题以及对瞬态现象发生兴趣；而与声学技术并肩前进的微波技术的迅速发展，也激起了人们研究波动普遍理论的兴趣。

为了反映这些发展，在本书的这一版中，对于辐射问题包含了比第一版更为详细的论述，并介绍了瞬态现象这一重要的内容以及运算微积方法。这些内容通常是被认为较难而避开不谈的。作者相信，虽然它们常需要相当烦琐的计算，但在概念上却不是特别困难的。本书对这些内容的讨论着重在给出基本概念，而不在于确保数学处理的严密性。

为了保持第一版的计划，本版将比较困难的一些内容都分开排在各章之末。这样，当采用本书作初级教本时，可以不必讲授这些内容。

作者衷心感谢许多朋友对本书的叙述、文法、算术以及代数方面的改进所作的有益建议。第一版中一些特别明显的错误已经改正。

P. M. 莫尔斯

1948 年 1 月于纽约州 厄普顿

第一版序

这一本关于振动和声的理論的书，主要是打算给学习物理学和通讯工程的学生作为教科书用的。作者在麻省理工学院教了几年这方面内容的初级课程后，确信需要在这方面写一本新的教科书。

当然，在声学理論方面已有不少其他书籍。作者之所以要再写一本，是因为在过去十年中原子物理学有了迅速的进展，使声学需要彻底的重新组织。电子管和电子学的其他应用，对声音的测量、记录和重发提供了非常有力的工具，这些工具已使声学技术发生了革命。另一个也许不那么明显的有用工具是新的数学技术，它是在研究量子力学时发展起来的，并且能使人明了波动理論的一切问题。本书最后一章是利用这些方法的一个例子。其中，为了研究原子的辐射而发展起来的数学方法被应用于室内声学性质的理論方面。

在声学科学近来的迅速变化过程中，其中某些部分变得重要起来，而另一些部分已失去了重要性。本书企图跟上这种着重点的变化，不仅讨论旧理論中目前仍然重要的那些部分，而且讨论新的发展。

本书准备作为教科书有两个目的。第一个目的当然是给学生关于振动和波的理論的一般介绍。这方面的引论性课程有必要偏重理論一些。物理学的其他部门都不象声学这样难以进行基本测量，而理論又是相对地比较简单；也几乎没有几个部门，其实驗方法象声学这样密切地依赖于透彻的理論知识。因此，在了解声学测量技术和开始设计声学仪器之前，首先应该给学生关于固体振动和声波传播基本理論的一个物理图象。

本书的第二个目的是给学生一系列关于理論物理方法的例

子,以及理论物理学家研究问题的方法和求解的方法。这个课题常常被忽略,特别是在工程课程中。学生通常得到的是许多用于标准化情况的公式,这些公式有时是粗略地导出的,有时甚至完全没有推导。学完这样的课程后,学生能够把公式用在标准问题上,但不能发现对特殊情况有用的新公式。

在本书中,作者试图从基本物理定律导出每一个公式(只有少数几个例外),并且详细地指出推导过程中的一些步骤及其逻辑上的必要性。这并不意味着要过分详尽地讲述数学方法,而是要给出每一步的物理推理。为了使逻辑的联系更加清楚,常常要舍弃一般性和数学上的严密性。根据作者的经验,学生一旦掌握了数学推导后面的物理图象,就能够自己将他所需的额外的一般性和严密性加上去。为了使一个概念生动或者为了提出新的观点,作者也常常对严格深奥的技术术语加以补充或代之以更通俗的词句。

作者假定读者已具有充分的微积分知识,并多少熟悉一些力学的基本定律。懂得微分方程是有帮助的,但并不是必需的,因为所遇到的微分方程在本书中都已解出。在本书最后面还给出了要用到的函数表。

虽然本书主要是用作教科书,但仍介绍了一定数量的较高深的材料。这样,作者希望本书成为声学理论中目前对声学工作者最为重要的那些部分的一本相当完整的参考书。较深的材料都安排在各章最后面的几节中。教师可以选择这些章的前面几节作为初级课程的内容,学生在需要的时候也可以参考其他几节,以了解进一步的细节。

P. M. 莫尔斯

1936年8月于马萨诸塞州 剑桥

目 录

中译本前言	i
第二版序	ii
第一版序	iii
第一章 概论	
§ 1. 定义和方法	1
单位(1). 能量(2).	
§ 2. 一些数学	3
三角函数(4). 贝塞耳函数(6). 指数函数(7). 符号的 用法(10). 其他的解(11). 围线积分(12). 无限积分(14). 傅立叶变换(16).	
习题	16
第二章 简单振子	
§ 3. 自由振动	20
普遍解(20). 初始条件(21). 振动能量(22).	
§ 4. 阻尼振动	23
普遍解(24). 能量关系(25).	
§ 5. 受迫振动	27
普遍解(27). 瞬态和稳态运动(29). 阻抗和相角(29). 能 量关系(32). 电机策动力(33). 动生阻抗(34). 压电晶 体(38).	
§ 6. 对瞬变力的响应	41
围线积分表示方法(41). 简单系统的瞬态运动(42). 复频 率(43). 瞬态运动的计算(44). 上述计算方法之例(44). 单位函数(45). 普遍的瞬态策动力(47). 一些推广(48). 拉普拉斯变换(50).	
§ 7. 耦合振动	51
一般方程(51). 简谐运动(52). 简正振动方式(53). 能量 关系(57). 耦合作用很小的情况(57). 共振的情况(58). 能 量转换(59). 受迫振动(60). 共振和简正振动方式(62). 瞬态响应(63).	

习题	65
第三章 柔顺弦	
§ 8. 弦上的波	70
波的速度(71). 波动的普遍解(72). 初始条件(73). 边界条件(74). 边界上的反射(75). 有限长的弦(77).	
§ 9. 简谐振动	80
波动方程(80). 驻波(82). 简正方式(83). 傅立叶级数(84). 初始条件(85). 级数的系数(85). 受拨弦和受敲弦(86). 振动能量(88).	
§ 10. 受迫振动	90
波阻抗和导纳(90). 一般策动力(92). 有限长的弦(93). 策动力加在任何点上(95). 交错级数形式(95). 分布的策动力(98). 瞬态策动力(100). 钢琴弦(101). 摩擦力的作用(103). 特征阻抗和导纳(105).	
§ 11. 密度和张力可变的弦	106
普遍的运动方程(106). 特征函数的正交性(108). 受迫运动(108). 不均匀分布的质量(110). 特征函数序列(111). 容许频率(112). 旋转弦的振动(113). 容许频率(116). 弦的形状(118). 旋转弦的受迫振动(119).	
§ 12. 微扰计算法	121
运动方程(121). 第一级修正项(123). 微扰方法举例(124). 特征阻抗(126). 受迫振动(129). 均匀弦, 稳态(130). 瞬态运动(131).	
§ 13. 末端支座运动的效果	132
支座的阻抗(133). 波的反射(133). 双曲线函数(135). 一端受力策动的弦(138). 弦的形状(139). 驻波比和极小位置(140). 特征函数(142). 瞬态响应(143). 总结(145).	
习题	146
第四章 棒的振动	
§ 14. 运动方程	150
棒中应力(150). 挠矩及剪力(152). 棒运动的性质(152). 无限长棒的波动(153).	
§ 15. 简谐运动	155
一端钳定的棒(156). 容许频率(157). 特征函数(158). 受到弹拨和敲击的棒(159). 两端钳定和两端自由的棒(161). 振动能量(162). 不均匀棒(163). 受迫运动(165).	

§ 16. 强劲弦的振动.....	165
线上的波动(166), 边界条件(166), 容许频率(167),	
习题	169
第五章 膜和板	
§ 17. 运动方程.....	171
膜上的力(172), 拉普拉斯算符(173), 边界条件及坐标系(174), 对集中的外加力的反作用(174),	
§ 18. 矩形膜.....	175
平行波的组合(176), 波动方程的分离(177), 简正方式(178), 容许频率(178), 简并情形(179), 特征函数(180),	
§ 19. 圆形膜.....	182
无界膜上的波动(182), 波的非永久性(183), 简谐波(185), 贝塞耳函数(186), 容许频率(187), 特征函数(188), 平行波及圆形波之间的关系(190), 定音鼓(191), 容许频率(193),	
§ 20. 受迫运动, 电容传声器.....	194
诺依曼函数(194), 任意力, 无负载的膜(195), 任意力, 局部负载(197), 均匀负载, 均匀力(198), 电容传声器(202), 电的联接(202), 传声器的瞬态响应(204),	
§ 21. 板的振动.....	206
运动方程(206), 简谐振动(207), 简正方式(207), 受迫运动(209),	
习题	211
第六章 平面声波	
§ 22. 运动方程.....	214
沿管进行的波(214), 连续性方程(215), 气体的压缩性(216), 波动方程(218), 平面波的能量(219), 强度(220), 分贝标度(222), 声强级与声压级(223), 声功率(225), 声音的频率分布(226), 元音(228),	
§ 23. 声音在管中的传播.....	229
类比电路元件(230), 颈(230), 筒(231), 例(231), 特征声阻(233), 入射波与反射波(234), 声阻抗率(235), 驻波(236), 声阻抗的测量(238), 阻尼波(239), 闭管(240), 开管(241), 小直径的开管(243), 簧乐器(244), 簧的运动(245), 在簧处的声压和速度(246), 偶次谐波(248), 其他管乐器(249), 管子当作类比传输线(250), 任何直径的开管(250), 腔共振(253), 瞬态效应, 颤动回声(256),	

§ 24. 声音在号筒中的传播·····	260
单参数波(260), 近似的波动方程(263), 可能的号筒形状(264), 锥形号筒(266), 传送系数(267), 号筒式扬声器(268), 指数号筒(273), 悬链线形号筒(275), 从开端来的反射,共振(277), 木管乐器(279), 瞬态效应(281),	
习题 ·····	282

第七章 声波的辐射和散射

§ 25. 波动方程·····	289
声波方程(289), 曲线坐标(291),	
§ 26. 圆柱体的辐射·····	292
波动方程的普遍解(293), 均匀辐射(293), 振动弦的辐射(294), 圆柱面上一条母线的辐射(295), 长波和短波极限(297), 一般圆柱形源的辐射(299), 声波在圆柱内部的传送(300), 波速和特征阻抗(302), 由活塞来发生声波(304),	
§ 27. 球体的辐射·····	307
均匀辐射(307), 单源(308), 一般形式的球形波(309), 勒让德函数(310), 球坐标中的贝塞耳函数(312), 偶极声源(314), 一般球形声源的辐射(315), 球面上点源的辐射(317), 球面上活塞的辐射(319),	
§ 28. 平面墙上活塞的辐射·····	322
声压的计算(323), 声强分布(324), 活塞的弯曲对方向性的影响(326), 辐射阻抗,刚性活塞(328), 活塞上声压的分布(329), 活塞的不均匀运动(331), 圆形管向外的辐射(332), 电动式扬声器的传送系数(334), 电动式扬声器的设计问题(335), 扬声器的性能(337), 活塞的瞬态辐射(340),	
§ 29. 声波的散射·····	342
圆柱对声波的散射(343), 短波极限(346), 总散射功率(347), 圆柱受到的作用力(348), 圆球的散射(350), 圆球受到的作用力(351), 电容传声器的设计(353), 传声器的性能(354),	
§ 30. 表面对声音的吸收·····	356
表面阻抗(356), 没有支架的薄板(356), 有支架的薄板(358), 多孔材料(358), 薄结构的等效电路(359), 厚板的公式(361), 吸声墙对平面波的反射(361),	
§ 31. 声波沿导管的传送·····	364
边界条件(364), 近似解(365), 主波(367), 瞬态波(368), 精确解(369), 例(370),	

习题	372
第八章 声的驻波	
§ 32. 简正振动方式	377
房屋共振(377). 高频的统计分析(378). 均匀分布的极限情况(380). 吸声系数(381). 混响(381). 混响时间(382). 吸声系数和声阻抗(383). 矩形房间里的驻波(385). 简正振动频率的分布(386). 轴向波、切向波和斜向波(387). 容许频率数目的平均公式(389). 在频带里的平均数目(390). 房间对称性的影响(391). 非矩形的房间(392). 圆柱形房间的频率分布(395).	
§ 33. 阻尼振动和混响	397
矩形房间, 近似解(398). 墙系数和墙的吸收(399). 斜向波, 切向波和轴向波的混响时间(401). 矩形房间的衰减曲线(402). 圆柱形的房间(403). 二级近似(405). 吸声碎片的散射作用(407).	
§ 34. 强迫振动	408
高频的简单分析(408). 声强和声压的均方根值(409). 特征函数的级数解(410). 房间的稳态响应(411). 矩形房间(412). 传递响应(413). 高频的极限情况(415). 响应的近似公式(416). 精确解(417). 墙系数(419). 瞬态计算和脉冲激发(420). 混响的精确解(421).	
习题	424
函数表	426
I 和 II, 三角函数和双曲线函数(426). III, 复数的双曲正切函数(428). IV, 复数的逆双曲正切函数(431). V, VI 和 VII, 贝塞耳函数(432). VIII, 活塞的阻抗函数(435). IX, 勒让德函数(436). X 和 XI, 柱体和球体的辐射和散射的相角和振幅(437). XII, 活塞的阻抗函数(439). XIII, 吸收系数(440).	
附图	441
I 和 II, 双曲正切变换(441). III, $\sinh$ 和 $\cosh$ 的模和相角(443). IV, 驻波比率和位相与声阻抗的关系(444). V, 矩形导管和矩形房间内波动方式的精确解(445). VI, 吸声系数与声阻抗的关系(446).	

第一章 概 論

§ 1. 定义和方法

任何一个科学或工程问题的讨论，都可分成两个方面：在物理方面，就是使用日常语言叙述问题中的事实，以及用可由实验验证的形式来叙述它的结果；在数学方面，就是用数学演算的办法，表示出处理问题所经过的步骤。上述两方面都同样重要。在解决每个问题时，两者同时应用，并可互相验证。

对本书中所讨论到的问题，解决的方式一般分为三个步骤：问题的提出、中间各步骤的数学演算和问题答案的叙述。将所要解决的问题叙述清楚，不一定是一项研究工作中最容易的一环。因为我们必须先判定，所讨论系统的哪些性质是重要的，哪些性质是可以忽略的；哪些事实一定要定量的描述，哪些事实只要定性的描述就够了。对本书所讨论的这种类型的问题，若是所有上述这些都已判定，我们就可以叙述成：如此这般的物体系统受到如此这般一组力的作用。

然后，我们再将上述的语言叙述用一组方程表示出来，并解出这些方程（如果我们能做到的话）。

这种数学解，还必须被转换成答案的物理叙述，即我们如果对这系统如此这般作用的话，那么这系统将表现如此这般的状态。我们必须认识到，数学方程的解并不是一个物理问题的答案，必须将这种数学解的物理意义叙述出来，问题才算结束。

单位 力作用于物体上，可使物体的运动发生变化。这样一个物理概念在数学上的相应表示就是方程

$$F = \frac{d}{dt} (mv). \quad (1.1)$$

为了把这问题的上述两方面联系起来，我们必须定量地来定义有关的物理量，还必须说明每个物理量是如何量度的，以及量度时所用的标准单位是什么。距离、质量、时间这几个基本物理量可用任何单位来量度，但为了方便起见，我们还是采用科学界通用的厘米、克、秒单位制（其他一些如电学、热学等方面的单位，以后遇到时再决定）。

其他一些力学量的量度单位，都可用上述基本单位来表示。方程 $F = \frac{d}{dt}(mv)$ 不仅是物理定律的数学描述，而且也是力的量度单位的定义。这就是说，以达因为单位的力的数值等于以克厘米每秒每秒为单位的动量变化率。如果力不以达因为单位，那么上面方程就不能成立，而必须在等号的任一端另加入一个数值因子才能成立。

能量 我们常用的另一个物理概念就是功或能量。假如时钟内的齿轮不转动的话，已上好的发条可施力于齿轮组无限长的时间；只有齿轮运转时，发条中的能量才能被消耗掉。一力对一物体所作的功等于在该力作用时物体所移动的距离与力在运动方向上的分量的乘积；如果力以达因计，距离以厘米计，则功的单位为尔格。这一物理陈述的数学形式是

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.2)$$

此处力 $\mathbf{F}$ 与距离元 $d\mathbf{s}$ 均为矢量，它们的标量积的积分等于 W 。

如果力是用来增加所作用物体的速度的，那么所作的功就储藏在该物体的运动中，当这物体运动慢下来时，这些能量仍可放出。这种运动的能量叫做动能，如以尔格为单位，就等于 $mv^2/2$ 。

如果力是用来克服系统的内力（如弹簧的弹力、物体的重力、不同电荷之间的引力等），那么所作的功可以不增加物体的速度。如果我们令这个内力为 $\mathbf{F}$ （矢量），那么反抗此力所作的功是 $W = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 。一般说来，此量不仅与物体运动的起点及终点有关，并且与物体所经的路程有关。举例来说，一升降机由底层升到三

楼,再由三楼到一楼,然后再到四楼,这样消耗的功,由于摩擦的原因,要大于由底层直接到四楼所消耗的功,

在忽略摩擦的理想情况下, W 只与物体运动的起点和终点有关,在这种情况下, W 就是物体在终点相对于起点的势能 V . 如物体只在一维空间运动,而以坐标 x 来表示它的位置,则

$$V = - \int F dx \quad \text{或} \quad F = - \left(\frac{dV}{dx} \right). \quad (1.3)$$

在这种情况下,我们可用牛顿方程 $F = m \frac{dv}{dt}$ 代入上式,从而得到速度与位置的关系:

$$\begin{aligned} V &= - \int F dx = -m \int \left(\frac{dv}{dt} \right) dx = -m \int v dv \\ &= -\frac{1}{2} m v^2 + \text{常数}, \end{aligned}$$

或

$$\frac{1}{2} m v^2 + V = \text{常数}. \quad (1.4)$$

这就是当摩擦作用可以忽略不计时,孤立系统的动能与势能之和是常数这一物理事实的数学表示. 这个证明可以推广到三维空间的运动.

§ 2. 一些数学

有了以上那些定义,我们再回过头来讨论一个物理问题的两个方面. 我们来举一个例子.

设有一质量 m 固定在弹簧的一端. 我们发现,要使这质量保持在离开其平衡点的距离为 x 的位置上,需要有一个等于 Kx 达因的力. 把这质量拉得越远,弹簧拉回它的力也越大;这就是关于这个系统的物理事实. 现在我们就是要来讨论它的运动.

从物理方面来看,这种运动一定是有振动性质的,但是,要对这运动有一个定量的预计,就必须求助于第二方面——数学方法. 我们写出运动方程 $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$, 并应用关于弹簧作用力的物理知

识 $F = -Kx$, 于是

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0, \quad (2.1)$$

此处 $n^2 = K/m$.

对应于上式的物理叙述是: 该物体的加速度永远与位移方向相反, 并与位移成正比, 也就是永远向着平衡点 $x = 0$. 当物体一过了平衡点, 就开始变慢, 最后停止, 再开始返回原点. 然而, 它总是不会停在原点上的, 因为在每次来回中, 它在通过原点以前总是不会变慢下来的.

三角函数 式(2.1)是一个微分方程, 它的解是大家很熟悉的. 但是, 因为以后我们还要碰到更复杂的情况, 所以最好还是谈一谈我们得到这个解的方法, 这样就可以知道我们应该怎样处理较复杂的问题. 我们常把方程(2.1)的解写为

$$x = a_0 \cos(nt) + a_1 \sin(nt). \quad (2.2)$$

但是, 如果我们没有三角函数表, 上式也无济于事. 事实上, 我们说式(2.2)是方程(2.1)的解, 只不过是给符号 $\cos$, $\sin$ 下了个定义. 要计算任何时刻 t 的 x 值, 仅仅有这两种符号还是不够的.

我们所要作的——也是解每个微分方程时所要作的——就是试设一个解答, 然后看看这个解答是否合适. 虽然在很多情况下, 试设的解答早已有了, 并且我们对它也很熟悉, 但是总还是要试设一个解答的.

我们来试设式(2.1)的解. 我们假设一类相当普遍的试解, 即 x 是 t 的幂级数:

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots,$$

然后看看是否可以适当地选择这个幂级数的系数, 使之满足方程

(2.1). 因为这个式子是方程(2.1)的解, 所以 $\frac{d^2x}{dt^2} (= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \cdots)$ 加 $n^2x (= n^2a_0 + n^2a_1 t + n^2a_2 t^2 + n^2a_3 t^3 + \cdots)$ 必须对于任何 t 值都等于零. 这个条件只有在幂级数每一幕次的

系数的和都等于零时才能满足, 即 $a_2 = -n^2 a_0/2$, $a_3 = -n^2 a_1/6$, $a_4 = -n^2 a_2/12 = n^4 a_0/24$ 等. 于是, 适合于式(2.1)的解就是

$$x = a_0 \left(1 - \frac{n^2 t^2}{2} + \frac{n^4 t^4}{24} - \frac{n^6 t^6}{720} + \cdots \right) + a_1 \left(t - \frac{n^2 t^3}{6} + \frac{n^4 t^5}{120} - \cdots \right).$$

将此式与式(2.2)比较, 就可以看出符号 $\cos$ 与 $\sin$ 的真正意义是

$$\left. \begin{aligned} \cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots, \\ \sin(z) &= z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

(在此问题中 $z = nt$), 因此, $\cos$ 与 $\sin$ 的值就可从上式算出:

$$\cos(0) = 1 - 0 + 0 - \cdots = 1,$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 0.125 + 0.003 - \cdots = 0.878,$$

$$\cos(1) = 1 - 0.5 + 0.042 - 0.002 + \cdots = 0.540, \text{ 等等.}$$

上面的数学解中有两个任意常数 a_0 和 a_1 , 这些常数必须由所讨论问题的物理条件来决定; 这将在第 3 节中讨论.

当然, 我们通常所用的 $\cos(z)$, $\sin(z)$ 是指一斜角为 z 的直角三角形的某些边之比. 为了使我们的讨论完整起见, 必须证明这个三角函数的定义就相当于上述级数的定义. 由微积分得知, 三角函数应满足下列关系:

$$\frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z), \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z),$$

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0.$$

将上列这些关系式的前两个组合起来, 可以看出三角函数 $\cos(z)$, $\sin(z)$ 两者都满足方程 $\frac{d^2 y}{dz^2} = -y$, 也就是相当于式(2.1). 由后两关系可以看出, 相当于这两个三角函数的方程级数解必为式(2.3)中所表示的形式.

既然知道了上述的关系, 我们就可以利用三角函数 $\sin$ 与 $\cos$