高等学校教学参考书

概　率　论　讲　义

沈恒范 编

人民教育出版社

本书内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律等概率论的基本知识。最后一章扼要介绍了关于处理随机变量观测结果的数理统计方法。

本书可作为高等工业学校“高等数学概率论部分”教学参考书。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

概率论讲义

沈恒范编

人民教育出版社（北京沙滩后街）

上海市印刷六厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0122　开本787×1092 1/32　印张6

字数149,000 印数64,001—114,000 定价(5)¥0.48

1966年4月第1版　1978年6月上海第3次印刷

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1　随机事件·频率与概率

概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学。

人们在自己的实践活动中,常常会遇到随机现象。例如,远距离射击较小的目标,可能击中,也可能击不中,每一次射击的结果是随机(偶然)的。自动车床加工出来的机械零件,可能是合格品,也可能是废品。进行任何实验,把得到的实验数据在坐标图纸上用点表示出来,我们可以看到,这些点(假定它们足够多)通常不是位于一条曲线上,而是散布在某一带形区域内,这就是所谓实验点的随机散布。

毛主席在《矛盾论》中指出:“和形而上学的宇宙观相反,唯物辩证法的宇宙观主张从事物的内部、从一事物对他事物的关系去研究事物的发展,即把事物的发展看做是事物内部的必然的自己的运动,而每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。”①

形而上学对于事物的联系有两种极端相反的看法,他们把一切事物的发展,或者都看做是必然的,而否认任何偶然性的作用;或者都看做是偶然的,而否认有必然的规律存在。辩证唯物论肯定了事物的发展过程中必然性和偶然性的对立的统一,即一切事物的联系和发展既包含着必然性的方面,也包含着偶然性的方面,它们是互相对立而又互相联系的。

但是,现实世界事物的联系是非常复杂的,因而在事物的发展

① 毛泽东选集第一卷,1961 年人民出版社,第 289 页。

过程中时刻都有偶然因素的存在，必然性经常通过无数的偶然性表现出来。

科学的任务就在于，要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性，即事物的客观规律性。这种客观规律性是在大量现象中发现的。

在科学研究或工程技术中，我们经常遇到，在不变的条件下重复地进行很多次实验或观测。抽去这些实验或观测的具体性质，就得到概率论中试验的概念。所谓**试验**就是一定的综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意地重复实现很多次。**大量现象**就是很多次试验的结果。

当综合条件实现时，也就是在试验的结果中，所发生的现象叫做**事件**。如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做**必然事件**；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做**不可能事件**。

在试验的结果中，可能发生，也可能不发生的事件，叫做**随机事件**或**偶然事件**。例如，任意抛掷钱币时，徽花向上是随机事件；远距离射击时，击中目标是随机事件；随机抽样检查产品质量时，发现次品是随机事件；等等。

用数字表示大量现象中的规律性时，联系到下面的概念。

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的**频率**(或**相对频率**)，记作 $W(A)$；用公式表示如下：

$$W(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

显然，任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数：

$$0\leqslant W(A)\leqslant 1. \tag{1.2}$$

如果事件 A 是必然事件，则在任何试验序列中，我们有 $m=n$，所以必然事件的频率总等于一。如果事件 A 是不可能事件，则我

们有 $m=0$, 所以不可能事件的频率总等于零。

经验证明, 当试验重复很多次时, 随机事件 A 的频率具有一定的稳定性; 就是说, 在不同的试验序列中, 当试验次数充分大时, 随机事件 A 的频率常在一个确定的数字附近摆动。

例如, 我们来看下面的实验结果, 表中 n 表示抛掷钱币的次数, m 表示徽花向上的次数, $W=\frac{m}{n}$ 表示徽花向上的频率。

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	W	m	W	m	W
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表我们可以看出, 当抛掷钱币的次数较少时, 徽花向上的频率是不稳定的; 但是, 随着抛掷钱币次数的增多, 频率愈来愈明显地呈现出稳定性。如上表最后一列所示, 我们可以说, 当抛掷钱币的次数充分多时, 徽花向上的频率大致是在 0.5 这个数的附近摆动。

由随机事件的频率的稳定性可以看出, 随机事件发生的可能性可以用一个数来表示。**这个刻划随机事件 A 在试验中发生的可能性程度的、小于一的正数叫做随机事件 A 的概率**, 记作 $P(A)$。当试验次数充分大时, 随机事件 A 的频率 $W(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动。在上面的例子中, 我们可以认为徽花向上的概

率等于 0.5。

因为必然事件的频率总等于一，所以我们说，**必然事件的概率等于一**；又因为不可能事件的频率总等于零，所以**不可能事件的概率等于零**。

这样，任何事件 A 的概率满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{1.3}$$

应该指出，随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的，而随机事件的概率却是完全客观地存在着的。在实际进行的试验中，随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现。随机事件的概率表明，试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系，它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证的统一。

还应指出，随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性，这种客观属性是与我们认识主体无关的。不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度。有时一个人说某事件“可能发生”或“很少可能发生”，这仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已。因为个别现象不是发生，就是不发生，所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的。

直接估计某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，仅在比较简单的情况下才可以直接计算随机事件的概率。通常我们把在很多次试验中随机事件 A 的频率 $W(A)$ 当作概率 $P(A)$ 的近似值。一般说来，概率 $P(A)$ 的这个单凭经验的估值，当试验次数愈多时就愈准确。相反地，如果已知事件 A 的概率，我们就能够以一定程度的可靠性来预测事件 A 在将要进行的试验中发生的频率，这种预测至少当试验次数很大时是可能的。

§2 概率的古典定义

上面我们提到，仅在比较简单的情况下才可以直接计算随机

事件的概率，这种计算是以下述概率的古典定义为基础的。

在叙述概率的古典定义以前，我们先引进一些辅助概念。

如果试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称它们是**等可能性的**。

如果试验时，若干个随机事件中任何两个事件都不可能同时发生，则称它们是**互不相容的**。

如果试验时，若干个随机事件中至少有一事件发生，则称它们构成**完备群**。

经常会遇到同时具备上述三种性质的事件群，即它们构成互不相容且等可能性的完备群。例如，从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 十个数字中任意抽取一个数字，设 A_k 是“抽到数字 $k(k=0, 1, 2, \cdots, 9)$”这一事件，则十个事件 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_9$ 构成互不相容且等可能性的完备群。构成这种完备群的事件叫做**基本事件**。

如果试验时某一基本事件的发生导致随机事件 A 的发生，则称此基本事件是**有利于**随机事件 A 的。例如，从 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 十个数字中任意抽取一个数字，设 A 是“抽到奇数数字”这一事件，则有利于事件 A 的基本事件是 A_1, A_3, A_5, A_7, A_9。

现在我们叙述**概率的古典定义**:

设试验的一切可能结果可以表为由 N 个互不相容且等可能性的事件构成的完备群，而其中 M 个事件是有利于随机事件 A 的，则随机事件 A 的概率等于有利的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值:

$$P(A)=\frac{M}{N}. \tag{1.4}$$

例 1. 从 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率。

解 基本事件的总数 $N=10$，有利的基本事件数 $M=5$；所以，所求的概率

$$P=\frac{5}{10}=0.5.$$

例 2. 袋内有 5 个白球与 3 个黑球。从其中任取两个球，求取出的两个球都是白球的概率。

解 基本事件的总数 $N=C_8^2=28$，有利的基本事件数 $M==C_5^2=10$；所以，所求的概率

$$P=\frac{10}{28}=0.357.$$

例 3. 在一批 N 个产品中有 M 个是次品。从这批产品中任取 n 个产品，求其中恰有 m 个次品的概率。

解 基本事件的总数为 C_N^n，有利的基本事件数为 $C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$；因此，所求事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{1.5}$$

因为有利于事件 A 的基本事件数不大于基本事件的总数，所以，由概率的古典定义易知不等式(1.3)成立：

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

显然，当且仅当，一切基本事件都有利于所论事件时，概率等于一；这就是说，必然事件的概率等于一。

当且仅当，任一基本事件都不是有利于所论事件时，概率等于零；这就是说，不可能事件的概率等于零。

概率的古典定义使我们可以预见到当试验重复很多次时随机事件的频率的稳定性。事实上，关于基本事件的等可能性的假设应该理解为，当试验重复很多次时，每一基本事件发生的次数差不多是相同的。因此，如果基本事件的总数为 N，则在 n 次试验中每

一基本事件发生的次数差不多等于$\frac{n}{N}$。设有利于随机事件A的基本事件数为M，则在n次试验中随机事件A发生的次数m就差不多等于$M\cdot\frac{n}{N}$，即

$$m\approx M\cdot\frac{n}{N}.$$

由此得到

$$W(A)=\frac{m}{n}\approx\frac{M}{N}=P(A). \tag{1.6}$$

我们指出，上述概率的古典定义是在一种特殊情形下给出的，这就是假定了试验的基本事件只有有限个。对于试验的基本事件为无穷多个的情形，概率的古典定义显然是不适用的。所以，这个定义的局限性在概率论开始发展以后很快地就被注意到了。因此，必须把这个定义予以必要的推广，使得概率的新定义能适用于试验的基本事件是无穷多个的情形。

例如，设在平面上有某一区域G，而区域g是它的某一部分，在区域G内任意投掷一点，求这点落在区域g内的概率。这里，“在区域G内任意投掷一点”这句话应该理解为：被投掷的点落在区域G内任一点处都是等可能的，并且落在区域G的任何部分内的概率只与这部分的面积成比例而与其位置和形状无关。于是，在区域G内任意投掷一点而落在区域g内的概率可以定义为

$$P=\frac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}。$$

一般地，假设试验的基本事件有无穷多个，但是可用某种数量特征（如长度，面积等）来表示其总和，设为S；并且其中的一部分，即有利于随机事件A的基本事件数，也可用同样的数量特征来表示，设为s；则随机事件A的概率定义如下：

$$P(A)=\frac{s}{S}. \tag{1.7}$$

例 4. 甲乙二人相约在某一段时间T内在预定地点会面。先到的人应等候另一人，经过时间 $t(t<T)$后方可离开。求甲乙二人会面的概率，假定他们在时间T内的任一时刻到达预定地点是等可能的。

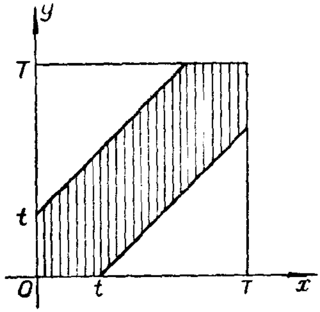


图　1

解　设甲乙二人在时间T内到达预定地点的时刻分别为x及y，则它们可以取区间$[0,T]$内的任一值，即

$$0\leqslant x\leqslant T,\quad 0\leqslant y\leqslant T.$$

而二人会面的充分必要条件是

$$|x-y|\leqslant t.$$

我们把x及y表为平面上一点的直角坐标，则所有基本事件可以用边长为T的正方形内的点表示出来，而有利的基本事件可以用这个正方形内介于二直线$x-y=\pm t$之间的区域(图1中的阴影部分)内的点表示出来。因此，所求概率等于阴影部分的面积与正方形面积的比：

$$P=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

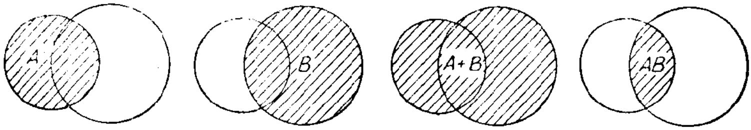
§3　随机事件的和与积·概率加法定理

这一节及下一节中，我们将叙述概率论的两个基本定理，即概率加法定理与乘法定理。

首先我们引进随机事件的和与积的概念。

随机事件A与B的**和**是一事件，它表示事件A与B中至少有一事件发生；记作$A+B$。例如，设事件A是随机点落在图2(a)中的小圆内，事件B是随机点落在图2(b)中的大圆内，则事件$A+B$

就是随机点落在任一圆内，如图 2(c)所示。



(a) (b) (c) (d)

图 2

类似地，随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**和**是一事件，它表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件发生；记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$。

随机事件 A 与 B 的**积**是一事件，它表示事件 A 与 B 都发生，记作 AB。例如，在上面的例子中，事件 AB 就是随机点落在两圆的公共部分内，如图 2(d)所示。

类似地，随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**积**是一事件，它表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生；记作 $A_1A_2\cdots A_n$。

现在我们叙述**概率加法定理**。

定理 1. 二互不相容事件的和的概率，等于这二事件的概率的和：

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.8}$$

证 我们就概率的古典定义来证明这定理。设试验的可能结果是 N 个基本事件构成的完备群，其中 M_1 个有利于事件 A，M_2 个有利于事件 B。由于事件 A 与 B 是互不相容的，因而有利于 A 的基本事件与有利于 B 的基本事件应该是完全不相同的；所以，有利于事件 $A+B$ 的基本事件共有 M_1+M_2 个。于是得到

$$P(A+B)=\frac{M_1+M_2}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}=P(A)+P(B).$$

这一定理不难推广到有限多个互不相容事件的情形，我们有

定理 2. 有限个互不相容事件的和的概率，等于这些事件的概率的和：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.9}$$

由此可得下面的推论:

推论 1.　如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成互不相容的完备群，则这些事件的概率的和等于一:

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1. \tag{1.10}$$

事实上，因为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备群，所以它们之中至少有一事件发生，即这些事件的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 是必然事件。所以,

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1.$$

由此，根据定理 2，即得等式(1.10)。

特别是，仅由两个互不相容事件构成的完备群；这时我们说，这两个事件是**对立的**。事件 A 的对立事件记作 $\bar{A}$。于是，我们得到

推论 2.　对立事件的概率的和等于一:

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \tag{1.11}$$

例　一批产品共有 50 个，其中 45 个是合格品，5 个是次品。从这批产品中任取 3 个，求其中有次品的概率。

解　取出的三个产品中有次品这一事件 A 可以看作三个互不相容事件的和:

$$A=A_1+A_2+A_3,$$

其中事件 A_i 是取出的三个产品中恰有 i 个次品($i=1,2,3$)。于是，按(1.5)得

$$P(A_1)=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=0.2525,$$

$$P(A_2)=\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}=0.0230,$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{50}^3}=0.0005.$$

所以，根据概率加法定理，得到

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.2760.$$

又解 与事件 A 对立的事件 $\bar{A}$ 就是取出的三个产品全是合格品。显然，

$$P(\bar{A})=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=0.7240.$$

于是，按(1.11)即得所求的概率

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0.2760.$$

我们强调指出，上述概率加法定理仅适用于互不相容的事件。一般地，对于任意的两个事件 A 与 B，我们有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.12)$$

事实上，事件 $A+B$ 等于以下三个互不相容事件的和：

$$A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB, \qquad (1.13)$$

其中 $A\bar{B}$ 是事件 A 发生而 B 不发生，$\bar{A}B$ 是事件 B 发生而 A 不发生，AB 是事件 A 与 B 都发生。因此，按(1.9)得

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB). \qquad (1.14)$$

但是，事件 A 等于互不相容事件 AB 与 $A\bar{B}$ 的和：

$$A=AB+A\bar{B}, \qquad (1.15)$$

所以，

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}). \qquad (1.16)$$

由此得

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB). \qquad (1.17)$$

同理可得

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB). \qquad (1.18)$$

把最后二式代入(1.14)，即得(1.12)。

显然，当事件 A 与 B 互不相容时，公式(1.12)就化为公式

(1.8), 因为 $P(AB)=0$。

利用数学归纳法可以证明, 对于有限多个随机事件, 我们有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \quad (1.19)$$

§4 条件概率 · 概率乘法定理

在叙述概率乘法定理以前, 我们先引进条件概率的概念。

如果我们在事件 B 已经发生的条件下计算事件 A 的概率, 则这种概率叫做事件 A 在事件 B 已发生的条件下的**条件概率**, 记作 $P(A|B)$。

例如, 两台车床加工同一种机械零件如下表:

	合格品数	次品数	总计
第一台车床加工的零件数	35	5	40
第二台车床加工的零件数	50	10	60
总计	85	15	100

从这 100 个零件中任取一个零件, 则取得合格品(设为事件 A)的概率

$$P(A)=\frac{85}{100}=0.85.$$

如果已知取出的零件是第一台车床加工的(设为事件 B), 则我们有条件概率

$$P(A|B)=\frac{35}{40}=0.875.$$