DSH

工科大学教学用书

林华铁　李彩英　张乃一　编

线性代数

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会颁发的《数学课程教学基本要求》（线性代数部分）编写的教科书。

本书内容为n阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的相似对角形、二次型、线性空间与线性变换、欧氏空间与酉空间共七章。

本书可作为高等工科院校教材和教学参考书，也可以供广大工程技术人员阅读。

（津）新登字012号

工科大学教学用书

线 性 代 数

林华铁

李彩英　等编

张乃一

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168　毫米1/32　印张：9 1/4 字数：240千字

1994年8月第一版　　1994年8月第一次印刷

印数：1—10000

ISBN　7-5618-0646-9

O・67

定价：6.80元

前　言

我们按照国家教委“工科数学课程教学指导委员会”1987年颁发的《数学课程教学基本要求》并结合多年来在教学实践中积累的经验编写了本书。

全书共需50学时，可作为高等工科大学本科生线性代数教材，前五章共需32学时，可作为工科大学专科线性代数教材。书中带*部分仅为参考内容，不作为基本要求。每章后面附有练习题。

在编写本教材时，我们根据由浅到深、由易到难、由具体到抽象的原则安排内容，力求作到概念清楚、文字准确、条理清晰、注重基本概念及基本运算能力的培养，在教材的各章中配备了一定数量的例题，以加深学生对基本概念的理解，并帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。

本书全稿由高立仁教授审阅，提出了许多有益的意见和建议，并得到天津大学数学系及天津大学出版社的大力支持。在此表示衷心的感谢。

本书第一、二章由林华铁编写，第三章由李彩英编写，第四章由曲文萍编写，第五、七章由张乃一编写，第六章由刘九兰编写，全书由张乃一、李彩英修改并最后定稿。由于水平所限，不妥与错误之处在所难免，恳请使用本书的同志们批评指正。

编者

1994年1月

目　录

第一章　行列式

线性方程组是线性代数中的一个重要基础部分，而行列式则是研究线性方程组的一个有力工具，它在数学及其它学科中都有着广泛的应用。

第一节　排列与逆序

定义1　由n个数1，2，…，n组成的一个有序数组称为这n个数的一个n阶排列，记为$i_1i_2\cdots i_n$。

例如，由1，2，3这三个数组成的三阶排列为：123，132，213，231，312，321，共有$3!=6$个。

由n个数组成的n阶排列共有$n!$个。

按数字由小到大的自然顺序排列的n阶排列$12\cdots n$称为标准排列。

定义2　在一个n阶排列$i_1i_2\cdots i_n$中，若某个较大的数排在某个较小的数前面，则称这两个数构成一个**逆序**。在一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

例如，在四阶排列4231中，排在1前面有三个数与1构成逆序，排在2前面有一个数与2构成逆序，排在3前面有一个数与3构成逆序，4排在最前面，所以

$$\tau(4231)=3+1+1+0=5$$

同样有

$$\tau(32154)=2+1+0+1+0=4$$

$$\tau(12\cdots n)=0。$$

逆序数是奇数的排列称为**奇排列**；逆序数是偶数的排列称为**偶排列**。标准排列为偶排列。

排列具有如下性质：

性质1 对换一个排列中的任意两个数，则排列改变奇偶性。

证明 （1）对换相邻的两个数。设给定的排列为

$$\cdots \overset{A}{\frown}\ i\ j\ \overset{B}{\frown} \cdots$$

其中A与B表示若干个保持不动的数，经过i与j的对换得到

$$\cdots \overset{A}{\frown}\ j\ i\ \overset{B}{\frown} \cdots$$

显然，在对换前后的两个排列中，属于A或B的数的位置没有改变，因此这些数所构成的逆序数没有改变；同时，i，j与A或B中的数所构成的逆序数也没有改变。而当$i<j$时，对换后，i与j构成一个逆序，则对换后的排列的逆序数增加1；当$i>j$时，对换后，排列的逆序数减少1。因此，不论是哪一种情形，排列的奇偶性都有改变。

（2）对换不相邻的两个数，假定i与j之间有s个数，用k_1，k_2，…，k_s代表，这时给定的排列为

$$\cdots i k_1 k_2 \cdots k_s j \cdots \qquad (*)$$

经过i与j的对换后得到

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots \qquad (**)$$

在排列（$*$）中，先将i依次与k_1，k_2，…，k_s对换，经过s次相邻两数的对换后（$*$）变成

$$\cdots k_1 k_2 \cdots k_s i j \cdots$$

再将j依次与i，k_s，…，k_2，k_1对换，经过$s+1$次相邻两数的对换，得到

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots$$

这正是对（$*$）经过i与j对换而得到的排列（$**$），因此，对（$*$）经过i与j的对换相当于连续经过$2s+1$次相邻两数的对换。而每

一次相邻两数的对换都改变排列的奇偶性，所以奇数次相邻两数的对换也改变排列的奇偶性。

例如，45132→45312，$\tau(45132)=7$，$\tau(45312)=8$。

性质2 任一n阶排列$i_1i_2\cdots i_n$与标准排列$12\cdots n$都可经过一系列对换互变，且所做对换的次数与排列$i_1i_2\cdots i_n$具有相同的奇偶性。

证明 对排列的阶数用数学归纳法证之。

对于二阶排列，结论显然成立。

假设对$n-1$阶排列，结论成立，现在证明对n阶排列，结论也成立。

若$i_n=n$，则根据归纳假设$i_1i_2\cdots i_{n-1}$是$n-1$阶排列，可经过一系列对换变成$12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换就把$i_1i_2\cdots i_n$变成$12\cdots n$。若$i_n\neq n$，则先施行i_n与n的对换，使之变成$i_1'i_2'\cdots i_{n-1}'n$，这就归结成上面的情形。相仿地，$12\cdots n$也可经过一系列对换变成$i_1i_2\cdots i_n$。因此结论成立。

因为$12\cdots n$是偶排列，由性质1可知，当$i_1i_2\cdots i_n$是奇(偶)排列时，必须施行奇(偶)数次对换方能变成偶排列，所以，所施行对换的次数与排列$i_1i_2\cdots i_n$具有相同的奇偶性。

第二节 n阶行列式

在给出n阶行列式定义之前，先引入二、三阶行列式。

给定二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1}$$

求方程组的解。

用a_{22}乘第一个方程，用a_{12}乘第二个方程，然后两式相减，便消去x_2，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \qquad (2)$$

用a_{21}乘第一个方程，用a_{11}乘第二个方程，然后两式相减，便消去x_1，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \qquad (3)$$

为了便于记忆，我们引入符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

叫做二阶行列式，并用D表示这个二阶行列式，称之为二元线性方程组（1）的系数行列式，数a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}叫做这个行列式的元素。

同样

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

也是二阶行列式。

若$D\neq 0$，则由（2），（3）可以得到线性方程组（1）的解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

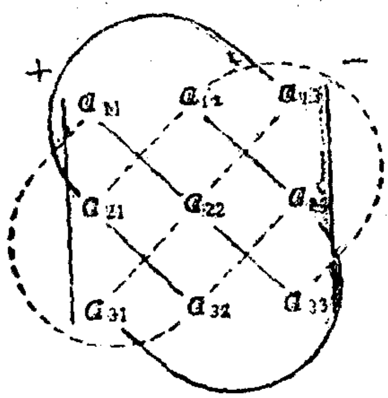
用同样的方法可以定义三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

根据上述定义，给出三阶行列式的计算法

则



在实线上的三个元素的乘积取正号，共三项：

$$+a_{11}a_{22}a_{33},\quad +a_{12}a_{23}a_{31},\quad +a_{13}a_{21}a_{32}.$$

在虚线上的三个元素的乘积取负号，共三项：

$$-a_{11}a_{23}a_{32},\quad -a_{12}a_{21}a_{33},\quad -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这六项的代数和就是三阶行列式D的值。

例1　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 2\end{vmatrix}.$$

解　$D=1\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot2+(-1)\cdot5\cdot3-3\cdot3\cdot2$

$$-2\cdot(-1)\cdot2-4\cdot5\cdot1$$

$$=6+16-15-18+4-20=-27.$$

注意，这种计算方法只适用于二、三阶行列式。

为了得到n阶行列式，下面研究三阶行列式的结构。

（1）三阶行列式是一个数，是$3!=6$项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积。

（2）每一项的各元素都带有两个下标。第一个下标表示这个元素所在的行的序数，第二个下标表示这个元素所在的列的序数。当每一项中各元素的行指标是按自然顺序排列时，其列指标都是1，2，3的一个排列，并且每一个三阶排列都对应着三阶行列式的一项。

（3）每一项的符号，当各元素的行指标按自然顺序排列时，

由列指标所组成的三阶排列的奇偶性所决定：列指标的排列为偶排列时，该项取正号；列指标的排列为奇排列时，该项取负号。

根据这个规律可定义n阶行列式。

定义3 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的n阶行列式是一个数，它是$n!$项的代数和。每一项都是取自不同行不同列的n个元素的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。其中$j_1j_2\cdots j_n$是1，2，…，$n$的任一个$n$阶排列，项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

当$n=1$时，$|a|=a$，当$n=2$，3时，就是二、三阶行列式。

例2 用行列式的定义计算上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由n阶行列式定义可知，展开式中的一般项形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由于D中许多元素为零，只需求出上述一切项中不为零的项即可。在D中，第n行元素除a_{nn}外，其余元素都是零。所以$j_n=n$；在第$n-1$行中，除$a_{n-1\,n-1}$，$a_{n-1\,n}$外，其余元素都是零，因而j_{n-1}只有

取$n-1$，n这两个可能，又由于a_{nn}，a_{n-1n}位于同一列，而$j_n=n$，所以只有$j_{n-1}=n-1$。这样逐步往上推，不难看出，在展开式中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$一项不等于零。而这项的列指标所组成的排列是一个标准排列，故取正号。因此，由行列式定义有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积。同理可求得下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别是

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n.$$

对于n阶行列式的任一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

由于乘法的可交换性，可把该项列指标组成的排列$j_1j_2\cdots j_n$经t次对换变成标准排列$12\cdots n$，与此同时，相应的行指标组成的排列$12\cdots n$经t次对换变成排列$i_1i_2\cdots i_n$。即有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

根据排列的性质 2 可知，t与$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$具有相同的奇偶性，而t与$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$具有相同的奇偶性，从而$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$与$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$具有相同的奇偶性。所以

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\cdot a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

因此得到行列式的等价定义：

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

第三节　行列式的性质

当行列式的阶数较高时，直接根据定义计算 n 阶行列式的值是困难的，本节将介绍行列式的性质，以便利用这些性质把复杂的行列式转化为较简单的行列式（如上三角形行列式等）来计算。

设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\qquad D'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

则称 D' 为 D 的**转置行列式**。

性质1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

证明　设 D 的转置行列式为

$$D_1=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}$，（i，$j=1$，2，…，n）根据行列式的等价定义有

$$D'=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= D$$

此性质说明，在行列式中行与列的位置是平等的，凡是对行成立的性质对于列也成立，反过来也是如此。所以下面的性质，只对行加以证明。

性质2 行列式中某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

证明 由行列式定义有

$$D_1 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= kD.$$

性质3 交换行列式的任意两行（列），行列式改变符号。

证明 设给定行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换D的第i行与第j行得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ = \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

按行列式定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}b_{1k_1}\cdots b_{ik_i}\cdots b_{jk_j}\cdots b_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)+1}a_{1k_1}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{nk_n} \\ &= -\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{nk_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

性质4 若行列式D中有两行（列）元素对应相等，则这个行列式等于零。

证明 设行列式D的第i行与第j行（$i \neq j$）元素对应相等，由性质3可知，交换这两行后，行列式改变符号，所以新的行列式等于$-D$，另外，把元素相同的两行交换，行列式的值不变，仍为D。因此有

$$D = -D,$$

即

$$D = 0.$$

性质5 若行列式D中有两行（列）元素对应成比例，则这个行列式等于零。

证明 设行列式D的第i行与第j行（$i \neq j$）的元素对应成比例，即

$$a_{i1} = ka_{j1}, \quad a_{i2} = ka_{j2}, \quad \cdots, \quad a_{in} = ka_{jn}$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由性质2、性质4可得到$D = 0$。

性质6 若行列式D的第i行（列）所有元素都可表示成两个元素之和，即

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

则行列式D可表示成两个行列式的和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 按行列式定义有

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质7 把行列式的某一行（列）元素乘以同一数 k 后加到另一行（列）对应元素上，行列式不变。

证明 设给定行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$