HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

机电一体化系列

现代设计方法

XIANDAI SHEJI FANGFA

陈继平　李元科

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据
现代设计方法/陈继平等
武汉:华中理工大学出版社,1997 年 8 月
ISBN 7-5609-1576-0
Ⅰ. 现…
Ⅱ. ①陈… ②李…
Ⅲ. 设计方法-优化设计-可靠性设计
Ⅳ. TH122

机电一体化系列
现代设计方法
陈继平 李元科
责任编辑:钟小珉
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社印刷厂印刷
开本:787×1092 1/16 印张:12.25 字数:287 000
1997 年 8 月第 1 版 1997 年 8 月第 1 次印刷
印数:1-3 000
ISBN 7-5609-1576-0/TH・86
定价:11.00 元

内 容 提 要

优化设计和可靠性设计是两种主要的现代设计方法，可以应用于各种工程设计领域，对于提高设计质量和效率具有重要的意义。

本书系统地介绍了优化设计和可靠性设计的基本概念与理论、基本方法与应用。其中，优化设计部分主要叙述最优化方法中的一维搜索法、无约束优化方法、线性规划方法和约束优化方法；可靠性设计部分主要叙述可靠性分析与设计、预测与评估的基本方法。

本书根据高等工科院校机电一体化专业的教学要求编写，主要用作机电一体化专业本科必修教材，也可用作机电一体化专业和其它相关专业的函授及专科教材，还可作为有关专业研究生和工程设计人员的学习参考书。

代 序

机械工业是重要的基础工业，是国民经济发展的先导部门。历史的实践已一再证明：先进的技术装备与先进的制造技术在国民经济发展中，起着何等重要的作用；而先进的装备与先进的制造技术则正是由先进的机械工业来提供的。马克思讲得何等的深刻："大工业必须掌握它特有的生产资料，即机器的本身，必须用机器生产机器，这样，大工业才建立起与自己适应的技术基础，才得以自立。"过去是这样，现在是这样，将来也还是这样。

当然，由于现代科学技术的迅猛发展，特别是由于微电子技术、电子计算机技术的迅猛发展，机械工业已发生了而且还在继续发生极为深刻的变化：机械技术与微电子技术的紧密结合，特别是与微计算机技术的紧密结合，现代机械技术所拥有的技术较以往远为高，远为新，远为广，远为复杂而先进；机电一体化技术与产品是十分突出的表现之一。这一深刻的变化是一股强大的潮流与一个严重的挑战，而且这一股潮流与这一个挑战是不应抗拒的，也是不可抗拒的。"顺之者昌，逆之者亡"，这是无法改变的现实。

这一深刻的变化反映在：机械工程、机械工业的面貌与内容发生了根本性的变化。过去，理论上主要以力学作为基础，实践上主要以经验作为基础，现在，作为基础的理论远不限于力学，还有系统论、控制论、信息论、传感理论、信号处理理论、电子学、计算机学等等，作为实践的基础远不限于经验，而且还涉及各有关的学科，同时，本身也在形成自己的学科体系——制造理论、工艺理论。机械产品的性质也在发生重大的变化，新的机械产品在不同程度上都同微电子技术、微计算机技术相结合，取代、延伸、加强与扩大人脑的部分作用。机械产品的种类与品种正日新月异，老的正在脱胎换骨，新的不断问世，几乎"无所不包"、"无孔不入"，大有令人瞠目结舌之势。与此相适应，机械制造技术正在彻底改造，广泛采用各种高新技术，特别是微电子技术与电子计算机技术，从数控化走向柔性化、集成化、智能化，成为现代科技前沿热点之一。与此相适应，企业的管理也在发生根本性的变化，从以产品为主的管理发展到以面向市场的信息为主的管理。

在这一深刻变化与严重挑战面前，谁胜谁负，谁兴谁衰，人才是关键。中共中央负责同志今年4月24日同部分学部委员座谈时就强调指出：要振兴经济，首先要振兴科技；要振兴科技，首先是培养人才。要发展机电一体化技术与产品，要实现机械工业的根本改造，没有高层次的科技人才是不行的。为了培养机械技术与电子技术紧密结合的高层次科技人才，有关各国都在探索其最优道路。我国采取果断措施，在大量减少专业种类的情况下，设立了"机电控制与自动化专业"，为进一步高质量地快速地培养这方面的人才创造更好的条件。事实上，我国不少高等院校已在这一工作上作了多年的探索，试办了诸如机电一体化试点班，试点专业

之类，华中理工大学也是其中的一员。创办这一方面的专业，也是一项改革，也是一项艰难的事业。鲁迅先生讲得好："愈艰难，就愈要做。改革，是向来没有一帆风顺的。"正因为如此，我们必须继续迎着艰难去探索。

众所周知，教材，是人才培养中的重要一环，教材建设是一个学校最基本的建设之一。为此，华中理工大学有关教师在以往试点工作的基础上，总结了自己的经验，学习了兄弟学校的经验，有组织有计划地编写了这一方面的成套教材。这样，一方面可以适应目前形势发展的急需，另一方面是为了进一步地继续探索。

《诗经》讲得好："嘤其鸣矣，求其友声。"由于编者业务水平的有限，探索经验的不足，编写时间的紧迫，这套教材中的错误、不妥与缺陷在所难免，敬希专家与读者拨冗指教，我们将不胜感谢。

教授、中国科学院学部委员

杨叔子

1992.4.30

前　言

工程设计和机电产品设计都需要经过调查分析、方案拟定、技术设计、结构设计、试制与试验后的修改完善等设计环节。在传统设计中,这些环节的工作都是由设计者手工完成的,所用的设计方法大都是基于经验公式和经验数据的类比设计和经验设计。显然,这种设计方法不可能使设计质量有较大提高,而且设计周期一般较长。

现代商品经济的迅速发展,对于工程和产品的性能和质量的要求日益提高。一方面,工程和产品的结构日趋复杂和精密,功能日趋完备和通用;另一方面,工程和产品的更新周期日益缩短,工作可靠性要求日益提高。显然,上述传统的设计方法已经完全不能满足这一发展的需要。

随着以微电子技术为代表的现代科学技术的迅速发展,近 30 年来出现了一批新的设计学科和一系列新的设计理论与设计方法,诸如优化设计、可靠性设计、动态设计、计算机辅助设计,以及设计方法学和有限元分析等。这些方法的发展和应用,使得各个工程领域的设计工作从形式到效果都发生了根本性的变化,产生了巨大的经济效益和社会效益。本书介绍其中的优化设计和可靠性设计。

优化设计是指,将工程设计问题转化为最优化问题,利用数学规划方法,借助电子计算机高速度、高精度和大储存量的运算处理能力,从满足设计要求的一切可行方案中自动寻求最佳设计方案的设计方法。它能够综合处理并最大限度地满足各种不同性质的、甚至相互矛盾的设计要求,迅速而准确地得到最满意的设计结果,且可用于各种工程项目和产品的方案设计和技术设计。这里主要介绍优化设计的基本概念和理论、基本方法及其应用,重点内容为最优化方法中的一维搜索法、无约束优化方法、线性规划方法和约束优化方法。

可靠性设计是指,一项工程或产品在规定的时间内、在规定的条件下完成规定功能的能力。可靠性设计是与常规设计不同的设计方法,它是将设计变量看作随机变量,将可靠度作为设计目标之一,应用可靠性理论对零部件、系统或工程进行的设计。这里主要介绍可靠性评价、分配与设计等方面的内容。

本书的编写注重简明性和适用性,重点介绍有关的基本概念和基本方法,力求使读者能够融会贯通,学以致用。

本书的优化设计部分由李元科编写,可靠性设计部分由陈继平编写。本书经杨荣柏教授审阅,并提出了许多修改意见,在此表示衷心的感谢。

编　者

1996年12月

目　　录

第一部分　优化设计

第二部分 可靠性设计

第一部分　优化设计

第一章　优化设计的数学模型

人们做任何事情都希望用最少的付出得到最佳的效果，这就是最优化问题。工程设计中，设计者更是力求寻求一组合理的设计参数，以使得由这组设计参数确定的设计方案既满足各种设计要求，又使其技术经济指标达到最佳，即实现最优化设计。但是常规的工程设计，由于设计手段和设计方法的限制，设计者不可能在一次设计中得到多个方案，也不可能进行多方案的分析比较，更不可能得到最佳的设计方案。因此，人们只能在漫长的设计生产过程中，通过不断地摸索与改进，逐步使设计方案趋于完善。

现代电子计算机的发展和普及，以计算机为基础的数值计算方法的成熟和应用，为工程问题的优化设计提供了先进的手段和方法，这就是最优化设计方法。

所谓最优化设计，就是借助最优化数值计算方法和计算机技术，求取工程问题的最优设计方案。进行最优化设计时，首先必须将实际问题加以数学描述，形成一组由数学表达式组成的数学模型，然后选择一种最优化数值计算方法和计算机程序，在计算机上运算求解，得到一组最佳的设计参数。这组设计参数就是设计的最优解。

数学模型是对实际问题的数学描述和概括，是进行优化设计的基础。因此，根据设计问题的具体要求和条件建立完备的数学模型是关系优化设计成败的关键。这是因为优化问题的计算求解完全是围绕数学模型进行的。也就是说，优化计算所得的最优解实际上只是数学模型的最优解。此解是否满足实际问题的要求，是否就是实际问题的最优解，完全取决于数学模型与实际问题的符合程度。

工程设计问题通常是相当复杂的，欲建立便于求解的数学模型，必须对实际问题加以适当的抽象和简化。不同的简化方法，得到不同的数学模型和计算结果。不恰当的数学处理可能导致计算结果偏离实际要求，得出与实际问题不一致甚至相矛盾的结果。而且一个完善的数学模型，往往需要在计算求解过程中进行反复地修改和补充才能最后得到。由此可见，建立数学模型是一项重要而复杂的工作：一方面希望建立一个尽可能完善的数学模型，以求精确地表达实际问题，得到满意的结果；另一方面又力求使所建立的数学模型尽可能简单，以方便计算求解。要想正确地协调这两方面的要求，就必须对实际问题及其相关理论和知识有深入的了解，并且善于将一个复杂的设计问题分解为多个子问题，抓住主要矛盾逐个加以解决。

本章通过几个简单的优化设计实例，说明数学模型的一般形式和结构及其有关的基本概念。

§1-1　优化设计实例

下面的三个设计实例，可以看作是几个复杂工程设计问题中的子问题。它们虽然简单，但都具有一定的代表性。

例 1-1 有一块边长为 6m 的正方形铝板，四角各裁去一个小的方块，做成一个无盖的盒子。试确定裁去的四个小方块的边长，以使做成的盒子具有最大的容积。

设裁去的四个小方块的边长为 x，则盒子的容积可表示成 x 的函数 $f(x)=x(6-2x)^2$。于是，上述问题可描述为

求变量　　x

使函数　　$f(x)=x(6-2x)^2$　极大化

这就是此问题的数学模型。其中，x 称为设计变量；$f(x)$ 称为目标函数。由于目标函数是设计变量的一元三次函数，且没有附加的约束条件，故此问题属一元非线性无约束优化设计问题。根据一元函数的极值条件，令 $f'(x)=0$，解得极值点和极值分别为 $x=1, f(x)=16$。记作 $x^*=1, f^*=16$，称为该设计问题的最优解。

例 1-2 某工厂生产甲、乙两种产品。生产每种产品所需的材料、工时、电力和可获得的利润，以及能够提供的材料、工时和电力见表 1-1。试确定两种产品每天的产量，以使每天可能获得的利润最大。

表 1-1 生产条件与供给数据

产品	材料/kg	工时/h	电力/(kW·h)	利润/元
甲	9	3	4	60
乙	4	10	5	120
供应量	360	300	200	

这是一个生产计划问题，可归结为既满足各项生产条件，又使每天所能获得的利润达到最大的优化设计问题。

设每天生产甲产品 x_1 件，乙产品 x_2 件，每天获得的利润可用函数 $f(x_1,x_2)$ 表示，即

$$f(x_1,x_2) = 60x_1 + 120x_2$$

每天实际消耗的材料、工时和电力可分别用函数 $g_1(x_1,x_2)$、$g_2(x_1,x_2)$ 和 $g_3(x_1,x_2)$ 表示，即

$$g_1(x_1,x_2) = 9x_1 + 4x_2$$
$$g_2(x_1,x_2) = 3x_1 + 10x_2$$
$$g_3(x_1,x_2) = 4x_1 + 5x_2$$

于是上述生产计划问题可归结为

求变量　　x_1, x_2

使函数　　$f(x_1,x_2)=60x_1+120x_2$　极大化

满足条件　$g_1(x_1,x_2)=9x_1+4x_2\leqslant 360$

$g_2(x_1,x_2)=3x_1+10x_2\leqslant 300$

$g_3(x_1,x_2)=4x_1+5x_2\leqslant 200$

$g_4(x_1,x_2)=x_1\geqslant 0$

$g_5(x_1,x_2)=x_2\geqslant 0$

这就是该设计问题的数学模型，其中 $f(x_1,x_2)$ 代表设计目标，称为目标函数。$g_u(x_1,x_2)(u=1,2,\cdots,5)$ 代表 5 个已知的生产指标，称为约束函数。5 个不等式代表 5 个生产条件，称为约束条件。由于目标函数和所有约束函数均为设计变量的线性函数，故此问题属线性约束优化问题。显然，这样的问题无法直接利用极值条件求解。

例 1-3 一种承受纯扭矩的空心传动轴，已知传递的转矩为 T，见图 1-1。试确定此传动轴的内、外径，以使其用料最省。

当传动轴的长度一定时，轴的体积与截面积成正比。因此，该传动轴的设计可归结为在满足强度和刚度条件的前提下，合理确定轴的内、外径，以使其截面积最小的优化设计问题。

由机械设计资料知：

空心传动轴的截面积 $s=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$

扭转强度条件 $\tau_{\max}=\frac{16DT}{\pi(D^4-d^4)}\leqslant[\tau]$

扭转刚度条件 $\theta=\frac{32T}{\pi G(D^4-d^4)}\leqslant[\theta]$

式中，$\tau_{\max}$和$[\tau]$分别为最大扭剪应力和许用扭剪应力；θ和$[\theta]$分别为扭转角和许用扭转角；G为剪切弹性模量。

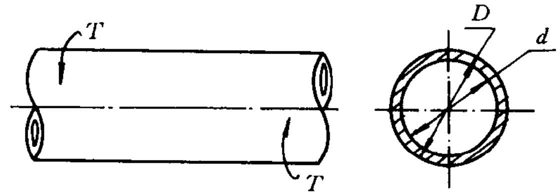

图 1-1 空心传动轴简图

分别用x_1、x_2代表外径D和内径d，则上述设计问题可归结为如下数学模型：

求设计变量 x_1,x_2

使函数 $f(x_1,x_2)=\frac{\pi}{4}(x_1^2-x_2^2)$ 极大化

满足条件

$$g_1(x_1,x_2)=\frac{16T}{\pi}\cdot\frac{x_1}{x_1^4-x_2^4}-[\tau]\leqslant 0$$

$$g_2(x_1,x_2)=\frac{32T}{\pi G}\cdot\frac{1}{x_1^4-x_2^4}-[\theta]\leqslant 0$$

$$g_3(x_1,x_2)=x_1\geqslant 0$$

$$g_4(x_1,x_2)=x_2\geqslant 0$$

这是一个含有 4 个约束条件的二元非线性约束优化问题，同样无法直接用极值条件求解。

§1-2 数学模型的一般形式

从以上三个实例可以看出，优化设计的数学模型由设计变量、目标函数和约束条件三部分组成，可写成以下统一形式：

求变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$

使极小化函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

满足约束条件

$$\begin{aligned}&g_u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0 \quad (u=1,2,\cdots,m)\\&h_v(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (v=1,2,\cdots,p)\\&\cdots\cdots\end{aligned} \tag{1-1}$$

其中，$g_u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0$称不等式约束条件；$h_v(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$称等式约束条件。

用向量$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$表示设计变量，$X\in R^n$表示向量X属于n维实欧氏空间；用min、max 表示极小化和极大化，s.t.(subject to)表示“满足于”，m、p分别表示不等式约束和等式约束的个数。数学模型可写成以下向量形式：

$$\begin{aligned}\min\quad & f(X)\quad X\in R^n\\ \text{s.t.}\quad & g_u(X)\leqslant 0 \quad (u=1,2,\cdots,m)\\ & h_v(x)=0 \quad (v=1,2,\cdots,p)\end{aligned} \tag{1-2}$$

由于工程设计的解一般都是实数解，故可省略$X\in R^n$，将优化设计的数学模型简记为

$$\min\quad f(X)$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & g_u(X) \leqslant 0 \qquad (u = 1,2,\cdots,m) \\
& h_v(x) = 0 \qquad (v = 1,2,\cdots,p)
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

当设计问题要求极大化目标函数 $f(X)$时，只要将目标函数改写为$-f(X)$即可。因为 $\min f(X)$和 $\max[-f(X)]$具有相同的解。同样，当不等式约束条件中的不等号为"$\geqslant 0$"时，只要将不等式两端同乘以"-1"，即可得到"$\leqslant 0$"的一般形式。

最优化问题也称为数学规划问题。最优化问题根据数学模型中是否包含约束条件而分为无约束优化问题和约束优化问题；根据设计变量的多少可分为单变量优化和多变量优化问题；根据目标函数和约束函数的性质可分为线性规化和非线性规划问题。

当数学模型中的目标函数和约束函数均为设计变量的线性函数时，称此设计问题为线性优化问题或线性规划问题。当目标函数和约束函数中至少有一个为非线性函数时，称此设计问题为非线性优化问题或非线性规划问题。

线性规划和非线性规划是数学规划的两个重要分支。生产计划和经济管理方面的问题一般属于线性规划问题，而工程设计问题则属于非线性规划问题。

§1-3 设计变量与设计空间

工程问题的一个设计方案通常是用特征参数表示的，一组特征参数值代表一个具体的设计方案。这种代表设计方案的特征参数一般应选作该问题优化设计的设计变量。

一个工程问题的设计参数一般是相当多的，其中包括常量、独立变量和因变量三类。优化设计时，为了使建立的数学模型尽量简单易解，只能选择其中的独立变量作为设计变量。但是，一个设计问题中，独立变量和因变量的划分并不是一成不变的。如例 1-3 中的空心传动轴，当选定内、外径 d 和 D 作为独立变量时，壁厚 δ 就是因变量，因为 $\delta=0.5(D-d)$。当选择外径和壁厚 δ 为独立变量时，内径 $d=D-2\delta$ 就是因变量。因此，这种空心传动轴的设计变量只有两个。

同一设计问题，当设计条件或要求发生变化时，设计变量也应随之变化。上面的空心传动轴，如改成空心转轴，则不仅受扭矩作用，而且受弯矩作用。这时长度也是决定轴的强度和刚度的参数，因此也应选作设计变量。

综上所述，设计变量应该选择那些与目标函数和约束函数密切相关的、能够表达设计对象特征的独立参数和尺寸。同时，还要兼顾求解的精度和复杂性方面的要求。一般说来，设计变量的个数越多，数学模型越复杂，求解越困难。

对于复杂的设计问题，可以先把那些较次要的参数，或者变化范围较窄的参数作为常量，以减少设计变量的数目，加快求解的速度。当确定这种简化的模型计算无误时，再逐渐增加设计变量的个数，逐步提高解的准确性和完整性。

设计变量有连续变量和离散变量之分。可以在实数范围内连续取值的变量称为连续变量，只能在给定数列或集合中取值的变量称为离散变量。含离散变量的优化问题称离散规划问题。

几乎所有的优化理论和方法都是针对连续变量提出来的。而实际问题往往包含有各种各样的离散变量，如整数变量、标准序列变量等。目前，关于离散变量优化问题的理论和方法还很不完善。因此，对于各种包含离散变量的优化问题，一般先将离散变量当作连续变量，求出连续最优解后，再作适当的离散化处理。

由线性代数可知，若 n 个设计变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相互独立，则由它们形成的向量 $X=[x_1,$

$x_2, \cdots, x_n]^T$ 的全体集合构成一个 n 维实欧氏空间，称设计空间，记作 R^n。于是，一组设计变量可看作设计空间中的一个点，称设计点。反之，所有设计点的集合构成一个设计空间。其中，设计变量的个数 n 称设计空间的维数。当 $n=2$ 时，设计空间为二维平面；当 $n=3$ 时，设计空间为三维空间；当 $n>3$ 时，设计空间为 n 维空间。

设计空间中的一个设计点 X 构成一个以坐标原点为起点，以 X 为终点的向量。两个设计点 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 则构成三个向量，其中 $X^{(1)}-X^{(2)}$ 代表以 $X^{(2)}$ 为起点，以 $X^{(1)}$ 为终点的向量，如图 1-2 和图 1-3 所示。

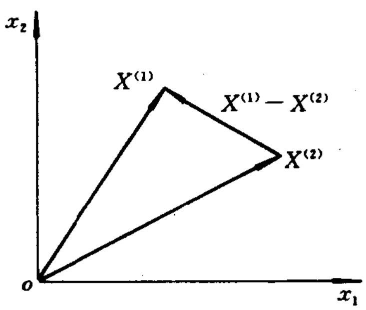

图 1-2　二维设计平面

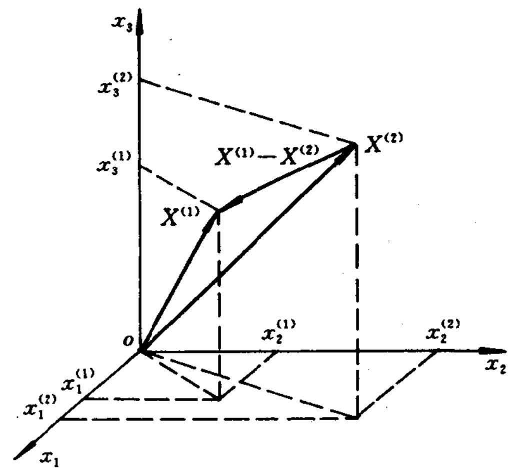

图 1-3　三维设计空间

§1-4　约束条件与可行域

对任何设计都有若干不同的要求和限制，将这些要求和限制表示成设计变量的函数并写成一系列不等式和等式表达式，就构成了设计的约束条件，简称约束。约束条件的作用是对设计变量的取值加以限制。约束条件根据形式不同可分为不等式约束和等式约束，根据性质可分为边界约束和性能约束。

边界约束是对设计变量本身所加的直接限制，如

$$a_i - x_i \leqslant 0$$
$$x_i - b_i \leqslant 0$$
$$- x_j \leqslant 0$$

其中，第一个和第二个约束条件表示 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$，第三个约束条件表示 $x_j \geqslant 0$，它们都属于边界约束条件。

性能约束在形式上是对某些技术性能指标或参数所加的限制，实际上同样是对设计变量所加的间接限制。如例 1-2 中对材料、工时和电力所加的约束，例 1-3 中对强度和刚度所加的约束，都属于性能约束。

任何一个不等式约束条件，若将不等号换成等号，即形成一个约束方程式。该方程的图形将设计空间划分为两部分：一部分满足约束，一部分不满足约束。故将该分界线或分界面称为约束边界。等式约束本身也是约束边界，不过此时只有约束边界上的点满足约束，而边界两边的所有部分都不满足约束。以二维问题为例，如图 1-4 所示，其中阴影部分表示不满足约束的区域。

每一个不等式或等式约束都将设计空间分为两个部分，满足所有约束的部分形成一个交集，该交集称为此约束问题的可行域，记作 $\mathscr{D}$。可行域也可看作满足所有约束条件的设计点的集合，因此，可用集合式表示如下：

$$\mathscr{D} = \{X \mid g_u(X) \leqslant 0, h_v(X) = 0$$
$$(u = 1,2,\cdots,m; v = 1,2,\cdots,p)\}$$

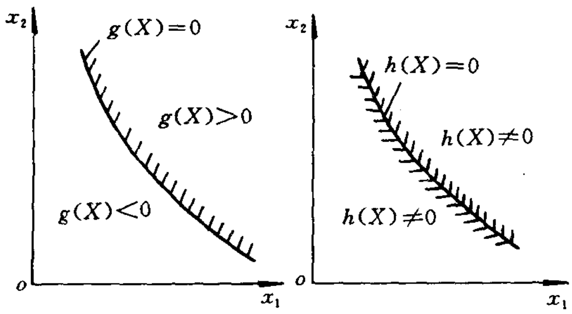

图 1-4　约束边界

例 1-2 中的 5 个约束方程分别是

$$9x_1 + 4x_2 - 360 = 0$$
$$3x_1 + 10x_2 - 300 = 0$$
$$4x_1 + 5x_2 - 200 = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

作出的 5 条约束边界及其约束可行域如图 1-5 所示，可以看出，此问题的约束可行域是由 5 条约束边界线围成的封闭五边形 $OABCD$。

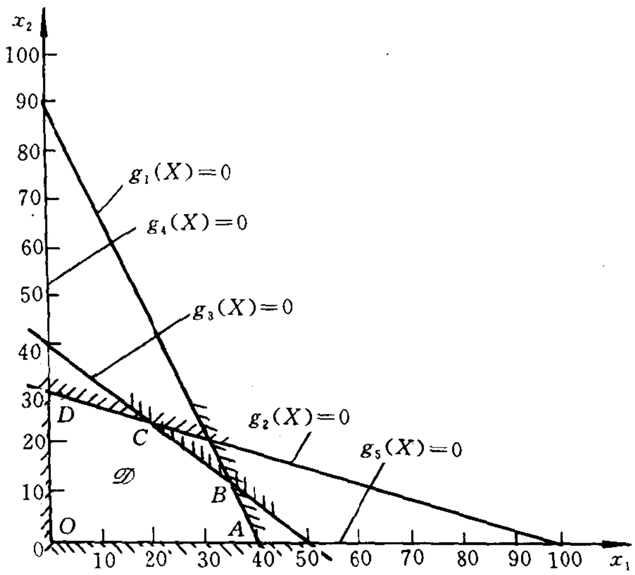

图 1-5　例 1-2 的可行域

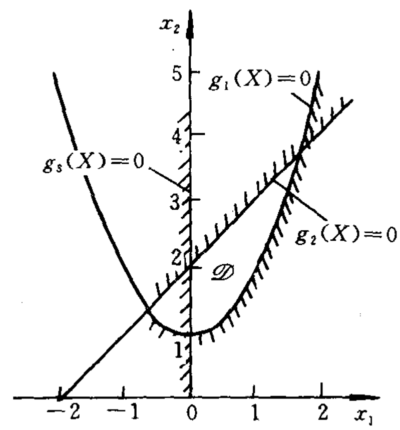

图 1-6　约束可行域

又如以下 3 个约束条件

$$g_1(X) = -x_1 + x_2 - 2 \leqslant 0$$
$$g_2(X) = x_1^2 - x_2 + 1 \leqslant 0$$
$$g_3(X) = -x_1 \leqslant 0$$

的 3 条约束边界线所围成的约束可行域如图 1-6 所示。

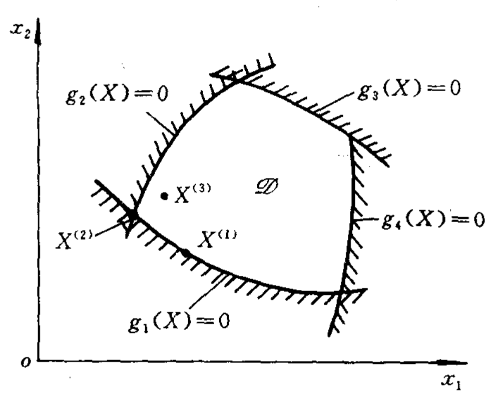

图 1-7　起作用约束

根据是否满足约束条件可以把设计点分为可行点（也称内点）和非可行点（也称外点）。根据设计点是否在约束边界上，又可将约束条件分为起作用约束和不起作用约束。所谓起作用约束就是对某个设计点特别敏感的约束，即该约束的微小

变化可能使设计点由边界点变成可行域的内点，也可能由边界点变成可行域的外点。如图 1-7 所示，其中点 $X^{(1)}$位于约束边界 $g_1(X)=0$ 上，故$g_1(X)\leqslant 0$是 $X^{(1)}$的起作用约束。点 $X^{(2)}$位于两个约束边界 $g_1(X)=0$ 和 $g_2(X)=0$ 的交点上，因此，点 $X^{(2)}$的起作用约束有两个，它们是 $g_1(X)\leqslant 0$ 和 $g_2(X)\leqslant 0$。

$X^{(k)}$点的起作用约束的个数可以用集合的形式表示如下：

$$I_k=\{u\,|\,g_u(X^{(k)})=0\quad(u=1,2,\cdots,m)\}$$

§1-5 目标函数与等值线

要寻求设计问题的最优解就必须有判别设计方案好坏的尺度。在数学模型中这个尺度就是目标函数，它是关于设计变量的函数，是用于衡量设计方案优劣的定量标准。对极小化问题来说，目标函数的值越小，对应的设计方案越好。目标函数的最小值及其对应的设计变量的取值称为设计问题的最优解。

不同的设计问题有不同的方案评价标准，甚至一个问题可能存在几个不同的评价标准。因此，必须针对具体问题，选择那些主要的技术经济指标作为设计的目标函数，如利润、体积、重量、功率等。

一般情况下，一个设计问题只能有一个目标函数，这就是单目标优化问题，它是本书讨论的重点。

要知道一个目标函数的最优点在设计空间中所处的位置，就需要了解目标函数的变化规律。对于简单的问题，等值线或等值面不仅可以直观地描绘函数的变化趋势，而且还可以直观地给出极值点的位置。

令函数 $f(X)$等于常数 c，即使 $f(X)=c$，则满足此式的点 X 在设计空间中定义了一个点集。当 $n=2$ 时，该点集是设计平面中的一条直线或曲线；当 $n\geqslant 3$ 时，该点集是设计空间中的一

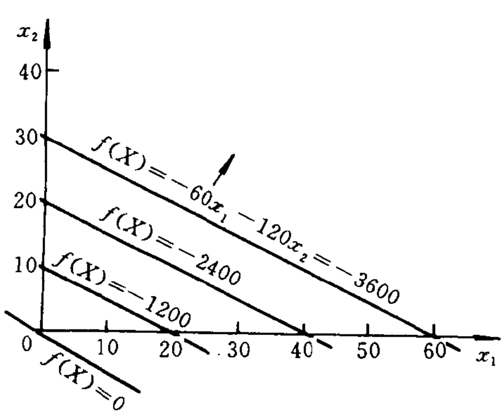

图 1-8 函数的等值线族

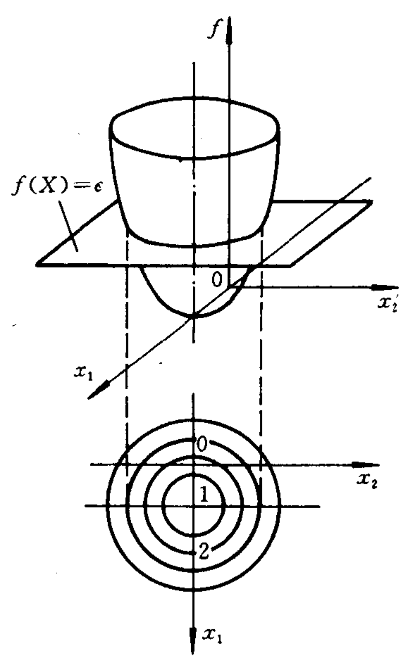

图 1-9 函数的等值面族

个平面、曲面或超曲面。在这种线或面上所有点的函数值均相等。因此，这种线或面就称为函数的等值线或等值面。

当 c 取一系列不同的常数值时，可以得到一组形态相似的等值线或等值面，称为函数的等值线族或等值面族，如图 1-8 和图 1-9 所示。

图 1-8 所示为例 1-2 中目标函数 $f(X)=-60x_1-120x_2$ 的等值线族，这是一组相互平行的直线，函数值沿箭头所指方向逐渐下降。图 1-9 所示为函数 $f(X)=x_1^2+x_2^2-4x_1+4$ 的图形（旋转抛物面），以及用平面 $f(X)=c$ 切割该抛物面所得交线在设计空间中的投影。该投影就是函数 $f(X)$ 的一簇等值线，这簇等值线是以点 $X=[2,0]^T$ 为圆心的一组同心圆，显然圆心 $X=[2,0]^T$ 就是函数的极小点。

§1-6 优化问题的图解法

对简单的二维优化问题，可以在设计平面内直观地作出约束可行域，画出目标函数的一簇等值线，并且可以根据等值线与可行域的相互关系确定出最优点的位置。这种求解优化问题的方法就是图解法。图解法的步骤一般为：确定设计空间，作出约束可行域，画出目标函数的一簇等值线，最后判断确定最优点。

例 1-2 是一个二维线性优化问题。其可行域见图 1-5，目标函数的等值线见图 1-8，将这两个图叠加在一起就形成了图 1-10。由图可知，最优点是目标函数在下降方向上的等值线与可行域的最后一个交点 $C(20,24)$，即每天生产甲产品 20 件，乙产品 24 件，可获得最大利润 4080 元。

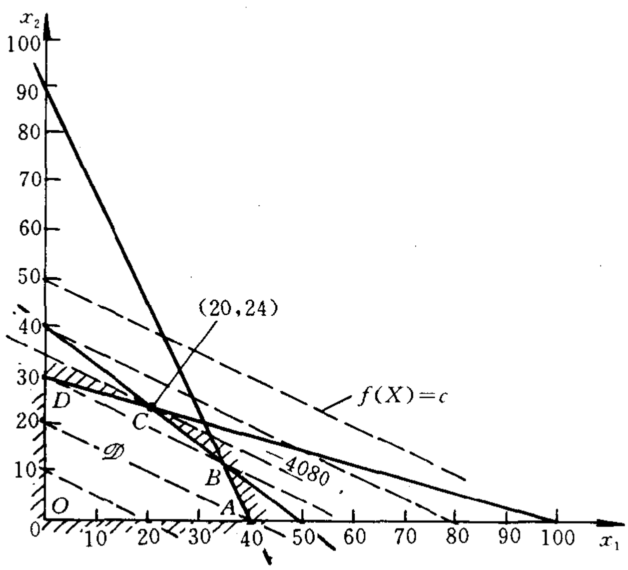

图 1-10 例 1-2 的图解法

例 1-4 用图解法求解

$$
\begin{aligned}
\min\quad & f(X)=x_1^2+x_2^2-4x_1+4\\
\text{s.t.}\quad & g_1(X)=-x_1+x_2-2\leqslant 0\\
& g_2(X)=x_1^2-x_2+1\leqslant 0\\
& g_3(X)=-x_1\leqslant 0
\end{aligned}
$$