近世实分析基础

朱成熹 著　　南开大学出版社

[津]新登字 011 号

近世实分析基础

朱成熹 著

南开大学出版社出版
(天津八里台南开大学校内)
邮政编码:300071 电话:349318
新华书店天津发行所发行
半导体杂志社印刷厂印刷

1993 年 7 月第 1 版　1993 年7 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32　印张:14.75
字数:366 千　印数:1—1500
ISBN7-310-00559-7/O·73　定价:9.40 元

前　言

综合性大学数学系的课程设置和教材，大都是根据50年代苏联模式，以数学专业为主体而编排的. 在实分析领域，除了数学分析课外，还有实变函数论，泛函分析，测度论等课程. 十年动乱以后形势发生了很大变化，纯数学专业的主体地位，被适应社会需要而蓬勃发展起来的各色各样的应用数学，如数理统计、计算数学、经济数学、信息科学、运筹学，控制论、管理数学等专业所代替. 许多工科院校的应用数学也如雨后春笋一样生长起来. 由于各新专业的特殊需要，很多新的专业知识，必须作为主要课程列入教学计划. 因此，一方面这些新专业的学生们不可能用那么多时间去分门别类地学习实分析中的各门课程；另一方面，由于专业的研究对象不是纯数学，所以也不要求他们掌握实分析领域中更深的内容. 但作为近代实分析的基础，有些基础内容和方法又是必不可少的，它对扩大学生的知识面，适应现代数学的发展又很有必要. 为满足上述需要有些院校把实变函数论与泛函分析或把实变函数论与测度论合二为一.

本书以测度论中的基本内容和方法为主体，既讲清测度与积分在一般空间的共性，又讲清它具体到实直线上勒贝格测度与积分等的特性(即在实变函数论中的特有性质). 再相应地穿插拓扑学与泛函分析等的一些基本思想和概念，力图把上述各方面的基础知识有机地联系在一起，尽可能地用统一的思想和方法去证明和解决各类相关的理论和问题. 特别着重介绍50年代末苏联数学家 E. Б. 邓肯提出、而后被我们所完善的最小类方法与 $\mathscr{L}$-$\mathscr{H}$ 系

方法.

数学分析的主要内容都是上世纪以前的成果，它是实分析领域的基础.而实变函数论、测度论、泛函分析等都是这个世纪以来实分析领域的新发展.因此，本书取名为《近世实分析基础》.

本书只要有高等数学的基础就可以顺利地阅读下去.为便于教学每章后面都有一定数量的习题.标“*”的章节及定理可放在后面再学.

本书适用于普通高校及师范院校数学系的非数学专业、工科院校应用数学系的本科生，以及其他需要数学知识较多的专业的研究生.

本书的内容已为南开大学数学系历届二年级学生讲过多次，内容曾反复修订.由于本人水平有限，不足之处敬请读者批评指正.

本书的习题是于晓江和张丽宏等同志编选的.我的研究生金哲振、许永龙、高利仁等同志都为本书的出版作了大量事务性的工作.在此一并致以谢意.

朱成熹

1993.3

目 次

1 集和集类

1.1 集，点和类的概念

集(或集合)是一个不能精确定义的数学概念，我们只能给予一种描述性的说明. 所谓**集**(或**集合**)是指具有某种特性，并可以互相区别的事物或元素所汇集成的总体，常以英文大写字母 A,B,C，$\cdots$；A'，B'，C'，$\cdots$ 或 $A_1,A_2,\cdots$ 等表之.

个别事物或元素，我们称之为**点**或**元素**. 常以希腊文小写字母 ω,ω'，$\omega_1,\omega_2,\cdots$ 等表之.

所有点汇集成的总体，我们称之为**空间**. 常以希腊文大写字母 Ω,Ω'，$\Omega_1,\Omega_2,\cdots$ 等表之.

不含有任何点的集称为**空集**. 常以$\varnothing$表示.

显然，空间 Ω 是含点最多的集，空集$\varnothing$是含点最少的集，集是空间的一部分，亦即空间的子集. 只含一个点 ω 的集(记为$\{\omega\}$)，成为**单点集**.(注意：单点集 $\{\omega\}$ 是一个集，而不是点 ω.)

空间 Ω 是根据我们具体研究的对象总体来确定的. 例如，我们要研究天津市的人口分布情况，这时的空间 Ω 取为天津市的全体市民；天津市的每一个人，就是 Ω 中的一个点；南开大学的全体学生与全体教师都是这个空间内的两个集. 如果我们要研究全国的人口分布，则全国所有的人就是空间 Ω，而天津市的全体市民只是这个空间内的一个集.

为方便计，我们以$\{\omega:\pi(\omega)\}$表示满足关系$\pi(\cdot)$的所有 Ω 中

点 ω 的全体所成之集.

例 1 设 $\Omega = R \triangleq (-\infty,\infty)$①,则 $\{\omega: 0 \leqslant \omega \leqslant 1\} = [0,1]$ 是由端点 0 和 1 构成的闭区间. 关系 $\pi(\omega)$ 就是"$0\leqslant\omega\leqslant1$". 其中符号"$\triangleq$"表示两者是一个意思,读作"相当于". □

例 2 设 $\Omega = R^2 \triangleq$ 实平面,则 $\{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 是以原点为圆心,1 为半径的圆(如图 1). 关系 $\pi(x,y)$ 为"$x^2+y^2\leqslant 1$". □

例 3 对一个均匀骰子的六个面分别标以"⚀","⚁","⚂","⚃","⚄","⚅"(能互相区别). 将它掷一次可能结果有以下六种:

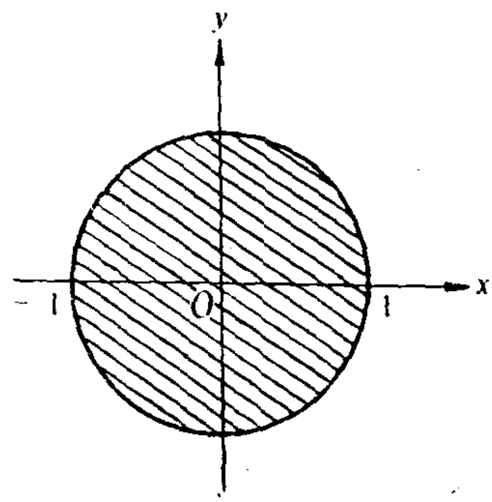

图 1

$\omega_1 \triangleq$ 出现"⚀",$\omega_2 \triangleq$ 出现"⚁",$\cdots$,$\omega_6 \triangleq$ 出现"⚅";

空间 $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$ 共六个点;

集 $A_i \triangleq \{\omega_i\}$ 是单点集($i = 1,2,\cdots,6$);

集 $A \triangleq$ {出现奇数点} $= \{\omega_k: k = 1,3,5\}$;

集 $B \triangleq$ {出现偶数点} $= \{\omega_k: k = 2,4,6\}$.

由上可见,固定空间 Ω,它的点可以组成各式各样的集,这些集又常称为 Ω 的子集. 在例 3 中 $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$ 由六个点所组成,而它的所有子集计有:$\varnothing$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\cdots$, $\{\omega_6\}$; $\{\omega_1,\omega_2\}$, $\cdots$, $\{\omega_1,\omega_6\}$, $\{\omega_2,\omega_3\}$, $\cdots$, $\{\omega_2,\omega_6\}$, $\cdots$, $\{\omega_5,\omega_6\}$; $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $\cdots$, $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, $\cdots$, $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$, $\cdots$, Ω 等,总个数为 $C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + \cdots + C_6^6 = 2^6 = 64$ 个. □

今后,若不另加申明,我们都在一个给定的空间 Ω 上讨论问题. 所谓"集"都是指同一给定空间 Ω 的子集.

---

① 本书将 $+\infty$ 常简记为 ∞,将 R^1 常简记为 R.

我们把由集所构成的集合，称为**集类**或简称**类**. 不含任何集的类称为**空类**. 仍以$\varnothing$表之.

以 $\{A:\pi(A)\}$ 表示满足某种关系 $\pi(\cdot)$的所有集所构成的集合(即集类).

例 4 设 $\Omega = R \triangleq (-\infty,\infty)$, $A \triangleq \{\omega: 0 \leqslant \omega \leqslant 1\} = [0,1]$, $B \triangleq \{\omega:\omega$是有理数$\}$——$R$中有理数集，$\mathscr{A} = \{(a,b]: -\infty < a \leqslant b < \infty\}$ 是 R 中一切左开右闭的半开区间全体及空集 $\varnothing$(因 $\varnothing = (a,a]$). 它是 $\Omega = R$ 上的一个集类. □

例 5 令$\varnothing(\Omega) = \{\varnothing,\Omega\}$, $S(\Omega) = \{A: A$是Ω的子集$\}$是Ω的一切子集所构成的集类. □

显然，$\varnothing(\Omega)$ 与 $S(\Omega)$ 都是 Ω 空间的集类，并且它们分别是含有空间Ω及空集$\varnothing$的最小(个数最少)与最大(个数最多)的集类.

1.2 点、集和类的逻辑关系

我们知道，集类是由集为元素构成的集合，而集是由点所构成集合. 在固定空间 Ω 上考虑点、集、类三者的逻辑关系.

若点 ω 在集 A 中，则称 ω 属于 A，以 $\omega \in A$ 记之. 反之，若 ω 不在集 A 中，则称 ω 不属于 A，记以 $\omega \overline{\in} A$(或 $\omega \notin A$).

类似地，若集 A 在类 $\mathscr{A}$ 中，则称 $A \in \mathscr{A}$，若 A 不在类 $\mathscr{A}$ 中，则称 $A \overline{\in} \mathscr{A}$(或 $A \notin \mathscr{A}$).

点与集或集与类，只有“属于”与“不属于”的逻辑关系，并且二者必居其一，即不是“属于”就是“不属于”，不能有别的选择. 这是康脱(Cantor)集论的基本点之一. 而近代模糊数学[10]的理论基础正是在否定了“二者必居其一”的前提，把它推广到更一般的情形下而奠定的.

对于 Ω 空间的两个集 A 与 B，如果对任意 $\omega \in A$ 都有 $\omega \in B$，

则称集 A 包含在集 B 中(或 B 包含 A). 以 $A \subset B$ 记之，即

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{若 } \omega \in A, \text{则 } \omega \in B.$$

同样对于 Ω 空间的两个集类 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$. 如果对任意集 $A \in \mathscr{A}$，都有 $A \in \mathscr{B}$，则称类 $\mathscr{A}$ 包含在类 $\mathscr{B}$ 中(或 $\mathscr{B}$ 包含 $\mathscr{A}$). 记为 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$，即

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \Leftrightarrow \text{若 } A \in \mathscr{A}, \text{则 } A \in \mathscr{B}.$$

如果 Ω 上集 A 与 B 有 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$，则称 A 与 B 两集相等，记为 $A = B$，即

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

同样，若 Ω 上类 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ 同时 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 两类相等. 记为 $\mathscr{A} = \mathscr{B}$. 即

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A} \subset \mathscr{B} \text{ 且 } \mathscr{B} \subset \mathscr{A}.$$

由上述定义可见，点、集、类三者的逻辑关系可以总结为如下三点：

1)点与集(或集与类)之间只存在“属于”与“不属于”的逻辑关系. 并且二者必居其一. 不存在“包含”及“相等”与否的逻辑关系；

2)集与集(或类与类)之间只存在“包含”、“相等”与“不包含”、“不相等”的逻辑关系. 不存在“属于”与否的逻辑关系. 但这时要注意下面两点：

a)区别点与单点集. 点与集之间无“包含”、“相等”与否的逻辑关系，但单点集与集就有“包含”或“相等”与否的逻辑关系，而无“属于”与否的逻辑关系. 因此，写法“$\omega \subset A$”，“$\{\omega\} \in A$”，“$B \subset \mathscr{A}$”等都是一些概念性的错误. 正确的写法应是：“$\omega \in A$”，“$\{\omega\} \subset A$”，“$B \in \mathscr{A}$”等. 希读者充分注意，不要犯类似的错误.

b) $A \subset B$ 不成立(即 B“不包含”A) 有下面图 2 所示的三种情况发生.

3)点与类无“属于”及“包含”，“相等”等任何逻辑关系. 但注意

单点集 $\{\omega\}$ 与点 ω 的区别. 单点集$\{\omega\}$ 与类有"属于"与否的逻辑关系.

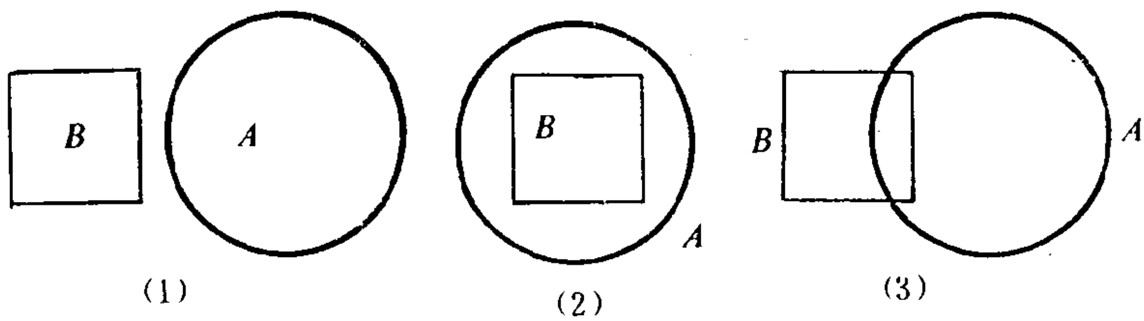

图 2

1.3 集的基本运算

固定空间 Ω,考虑它的子集之间的一些"集运算". 设 T 是任意参数集,可以是有限的,如 $T=\{1,2,\cdots,n\}$;也可以是无限的,如 $T=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 或 $T=[a,b)(-\infty<a<b<\infty)$. 常用的有如下五种基本的"集运算",其定义如下:

1)**交** 我们把新的集

$$A\cap B\triangleq\{\omega;\omega\in A\text{ 且 }\omega\in B\}$$

称为 A 与 B 两个集的交,以 $A\cap B$ 或 AB 记之. 图 3 中阴影部分表示 A 与 B 之交.

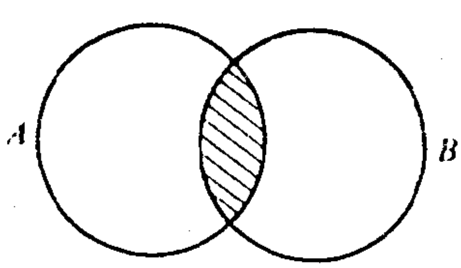

图 3

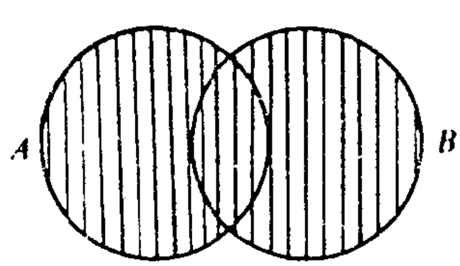

图 4

一般情形对任意参数集 T 我们定义

$$\bigcap_{t\in T} A_t \triangleq \{\omega: 对\ \forall\ t \in T, \omega \in A_t\}$$

为集族 $\{A_t: t \in T\}$ 的交集.

2)**和与直和** 我们把新的集

$$A \cup B \triangleq \{\omega: \omega \in A 或 \omega \in B\}$$

称为 A 与 B 两个集的**和集**(或称为**并集**). 如图 4 中的阴影部分所示

特别, 若 $A \cap B = \varnothing$ 时, 则称 $A \cup B$ 为 A 与 B 的**直和**. 并以 $A + B$ 记 $A \cup B$.

一般情况, 我们称

$$\bigcup_{t\in T} A_t \triangleq \{\omega: \exists\ t \in T, 使\ \omega \in A_t\}$$

为集族 $\{A_t: t \in T\}$ 的**和集**(也称**并集**).

特别, 若对任意 $s, t \in T$ 且 $s \neq t$ 都有 $A_t \cap A_s = \varnothing$, 这时我们记 $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ 为 $\sum\limits_{t\in T} A_t$ 称为 $\{A_t: t \in T\}$ 的**直和**.

3)**差和余** 我们把新的集

$$A \backslash B \triangleq \{\omega: \omega \in A 且\ \omega \overline{\in} B\}$$

称为集 A 与 B 的**差集**. 如图 5 中阴影部分所示.

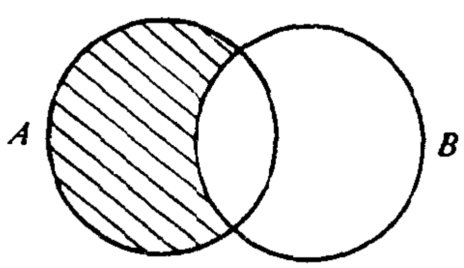

图 5

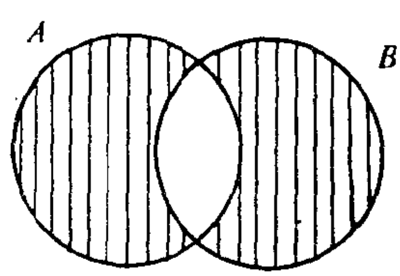

图 6

特别, 若 $A = \Omega$ 时, 则称 $\Omega \backslash B$ 为 B 的**余集**. 并以 B^c 表之, 即

$$B^c \triangleq \Omega \backslash B \triangleq \{\omega: \omega \in \Omega 且\ \omega \overline{\in} B\} = \{\omega: \omega \overline{\in} B\}.$$

最后一式是因为在 Ω 空间上考虑点 ω, 所以 $\omega \in \Omega$ 是必然的, 可以不写出来.

显然, 对于一个集族的"**交**"与"**和**"(或"**直和**")运算满足交换

律与结合律.但是对于“**差**”或“**余**”运算而言,交换律与结合律、分配律等都未必成立.其反例如下:

例 6 设

$$\Omega = \{1,2,\cdots,10\}, A = \{1,2,3,4,5\},$$
$$B = \{4,5,6,7\}, C = \{6,7,8,9,10\}.$$

则

$$A \backslash B = \{1,2,3\}, \text{而 } B \backslash A = \{6,7\},$$
$$A \backslash (B \cup C) = \{1,2,3\}, \text{而 } A \backslash C = A = \{1,2,3,4,5\}.$$

故

$$(A \backslash B) \cup C \neq A \backslash (B \cup C),$$
$$A \backslash B \neq B \backslash A, A \backslash (B \cup C) \neq (A \backslash B) \cup (A \backslash C).$$ □

为了保证交换律和结合律成立,我们引进一种所谓“**对称差**”运算.其定义为

$$A \triangle B \triangleq (A \backslash B) + (B \backslash A)$$

称 $A \triangle B$ 为 A 与 B 二集的 **对称差**.如图 6 的阴影部分所示.

4) **上极限** 我们把新的集

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangleq \{\omega: \omega \in A_n \text{ 对无穷多个 } n \geqslant 1 \text{ 成立}\}$$

称为集列$\{A_n : n \geqslant 1\}$ 的上极限集.

5) **下极限** 我们把新的集

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangleq \{\omega: \omega \overline{\in} A_n \text{ 至多只对有限个 } n \geqslant 1 \text{ 成立}\}$$

称为集列$\{A_n : n \geqslant 1\}$ 的下极限集.

6) **极限** 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

则称集列 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 的**极限**集存在.并以$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示此**极限集**.

根据上述集运算的定义,易证下述关系成立:

$$(A^C)^C = A, \tag{1.1}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A^C \supset B^C, \tag{1.2}$$

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)^c = \bigcap_{t\in T} A_t^c, \tag{1.3}$$

$$(\bigcap_{t\in T} A_t)^c = \bigcup_{t\in T} A_t^c, \tag{1.4}$$

只证式(1.3),其余读者自己证.事实上,

$$\begin{aligned}\omega \in (\bigcup_{t\in T} A_t)^c &\Leftrightarrow \omega \,\overline{\in}\, \bigcup_{t\in T} A_t,\\ &\Leftrightarrow \omega \,\overline{\in}\, A_t, \forall\, t \in T\\ &\Leftrightarrow \omega \in A_t^c, \forall\, t \in T\\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{t\in T} A_t^c.\end{aligned}$$

由上式可得

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)^c \subset \bigcap_{t\in T} A_t^c \text{ 及 } \bigcap_{t\in T} A_t^c \subset (\bigcup_{t\in T} A_t)^c,$$

从而

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)^c = \bigcap_{t\in T} A_t^c.$$

即(1.3)成立 □

根据(1.1)—(1.4)我们可以概述为如下**笛摩根**(De. Morgan)**对偶原则**:

1)若一个由"∪","∩","^{c}",("和","交","余")三种集运算组成的等式"="(或包含式"⊂")成立,则在此等式"="(或包含式"⊂")中分别对应以"∩","∪","^{cc}"代替,所得新的等式"="(对应地,反包含式"⊃")仍然成立.即

$$\begin{array}{ccc} \text{式}\quad\text{子} & =(\subset) & \text{式}\quad\text{子}\\ (\cup,\ \cap,\ ^c\ ) & & (\cup,\ \cap,\ ^c\ )\\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow & & \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\\ (\cap,\ \cup,\ ^{cc}) & & (\cap,\ \cup,\ ^{cc})\\ \text{新}\quad\text{式}\quad\text{子} & =(\supset) & \text{新}\quad\text{式}\quad\text{子}\end{array}$$

2)若一个由"∪","∩"二种集运算组成的集的式子中,我们将此式中的集以它的余"^{c}"代替,"∪"以"∩"代替,"∩"以"∪"代替所得新的式子,则必与原式相等.

其中“^{cc}”表示“余”运算的“余”，即

$$A^{cc}=(A^c)^c=A$$

De. Morgan 原则提供了一个很有效的方法，使我们能将已经证明的关于某种集运算的性质转移到它的余运算上去.

在以后各章里，常需要将一般的可数相交“和”运算化为可数“不相交和”，即“直和”运算，易证它们有：

$$A\backslash B=A\cap B^c, \tag{1.5}$$

$$A\cup B=A+(B\backslash A)=A+A^cB.$$

一般情形，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n. \tag{1.6}$$

其中

$$\begin{aligned}A_0=\varnothing,B_n&=A_0^cA_1^c\cdots A_{n-1}^cA_n\\&=A_n\backslash(A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})(n\geqslant 1).\end{aligned}$$

集列$\{B_n;n\geqslant 1\}$的互不相交性，即对任意正整数$m,n\geqslant 1$且$m\neq n$（不妨设$m>n$），恒有$B_m\cap B_n=\varnothing$是因为

$$\begin{aligned}B_m\cap B_n&=A_0^cA_1^c\cdots A_{n-1}^cA_n^c\cdots A_{m-1}^cA_m\cap A_0^cA_1^c\cdots A_{n-1}^cA_n\\&=A_0^cA_1^c\cdots A_{n-1}^cA_n^c\cdots A_{m-1}^cA_m\cap(A_n^c\cap A_n)\\&\subset A_n^c\cap A_n=\varnothing.\end{aligned}$$

显然，对任意正整数$n\geqslant 1$，反复利用$A\cup B=A^cB+A$及(1.3)可得

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{n}A_k&=(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k)\cup A_n=(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k)^cA_n+\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\\&=B_n+[\bigcup_{k=1}^{n-2}A_k\cup A_{n-1}]=B_n+B_{n-1}+\bigcup_{k=1}^{n-2}A_k\\&=\cdots=\sum_{k=1}^{n}B_k,\end{aligned}$$

故