庄圻泰 张南岳

复变函数

北京大学出版社

复变函数

庄圻泰　张南岳

北京大学出版社

内 容 提 要

本书包括复数、复变函数、Cauchy定理与Cauchy公式、解析函数的级数展开、留数定理及其应用、整函数与亚纯函数、解析开拓和共形映照等。内容精炼，叙述简明扼要。对于多值函数、积分计算、共形映照等内容作了较好的处理。各节配有足够数量的习题。

本书可作为综合大学和高等师范院校数学系及有关专业的教科书或教学参考书。

复 变 函 数

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

新华书店北京发行所发行

1 2 0 2 工厂印刷

850×1168毫米 32开本 11.5印张 280千字

1984年4月第一版 1984年4月第一次印刷

印数：1—35,000册

统一书号：13209·73 定价：1.55元

序　言

复变函数论发展到今天已成为一个内容非常丰富、应用极为广泛的数学分支。作为大学必修课程的复变函数主要讲述解析函数的基本理论和有关方法，通常它包括以下三方面内容：Cauchy积分理论、Weierstrass级数理论和Riemann共形映照理论。

本书是以我们在北京大学数学系多年讲授复变函数课程的讲义为基础改写成的。力图做到取材精炼、安排紧凑、简明扼要地叙述解析函数的基本内容。这门课程的研究对象除单值解析函数外，还不可避免地要涉及到初等多值函数，而这往往是教师难以讲授、学生难以掌握的一部分内容。为此我们着重在第二章第三节分析产生多值性的原因，说明如何找出支点以及在什么样的域内多值函数可以分出单值解析分支，在什么样的域内则不能，并列举了若干例子。几年来的教学实践表明，这样做的效果是良好的。留数定理的一个重要应用是计算积分，书中对常见的积分计算作了比较系统的分类，使学生学完这部分内容后有所遵循。共形映照是解决实际问题的一个有力工具，书中专门安排了一节（第八章第三节）列举若干共形映照的实例，目的在于使学生能应用初等函数实现常见图形的共形映照。

选做一定数量的习题是掌握基本理论与方法的重要环节，本书除第八章第一节外，每节都配有足够数量的习题，少数较难的习题都有提示。

书中的缺点和错误在所难免，希望大家批评指正。

庄圻泰　张南岳

1982年11月于北京大学

目　录

第一章　复　　数

在中学代数课程里，由解一元二次方程引进了复数的概念，并且阐明了它的若干基本性质．在这里，为了今后的方便，我们来叙述有关复数的一些内容．

§1　复数的几何表示

大家知道，所谓复数，即形如$z=x+iy$的数，其中i是纯虚数单位$\sqrt{-1}$，x与y都是实数，分别称为复数z的实部和虚部，记作$\mathrm{Re}z$和$\mathrm{Im}z$．

在平面上取正交坐标系Oxy．我们用坐标为(x,y)的点P表示复数$z=x+iy$．这样复数就与平面上的点一一对应．实数与x轴上的点一一对应，x轴称为实轴；虚数iy与y轴上的点一一对应，y轴称为虚轴．与复数建立了这种对应关系的平面就称为复平面．今后，复数与复平面上的点就不再区别了．全体复数或复平面记作$\mathbf{C}$．

有时我们也用向量$\overrightarrow{OP}$来表示复数$z=x+iy$，x与y分别是$\overrightarrow{OP}$在x轴和y轴上的投影．$\overrightarrow{OP}$的长度r称为复数z的模，记作$|z|$．显然（图1-1）

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

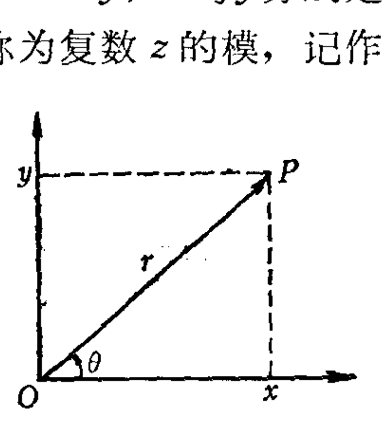

图　1-1

容易看出

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|, \qquad (2)$$
$$|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|.$$

假如P点不是原点（即$z\neq0$），则称

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与x轴正向之间的夹角 θ 为 z 的幅角，记作 $\operatorname{Arg} z$. 幅角的方向规定为：反时针方向为正，顺时针方向为负. 显然，一个复数有无穷多个幅角. 若θ_1是复数z的一个幅角，那么

$$\theta = \theta_1 + 2k\pi \quad (k\text{是整数})$$

就给出了复数 z 的全部幅角. 在复数 z 的幅角中，有一个θ_0满足$0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$，$\theta_0$称为复数$z$的主要幅角，或幅角的主值，记作$\arg z$. 注意，有时为了方便起见，也取其他的主值范围，如 $-\pi \leqslant \theta_0 < \pi$. 但是不管$\arg z$的范围如何取，总有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k\text{是整数}).$$

在平面上只有原点(即复数$z = 0$)的幅角是不定的.

如果取Ox为极坐标系的极轴，那么，复数z 的模和幅角分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的极径和极角. 由直角坐标系与极坐标系的关系，我们有

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \tag{3}$$

其中r,θ分别是复数 z 的模和幅角. 所以

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{4}$$

(4)式称为复数 z 的三角形式.

(3)式表明可以用 z 的模和幅角来表示 z 的实部和虚部，反之亦然.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 I 象限}; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & z\text{在第 II, III 象限}; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + 2\pi, & z\text{在第 IV 象限}. \end{cases} \tag{5}$$

这里$0 \leqslant \arg z < 2\pi$。

复数$x-iy$称为复数$z=x+iy$的共轭复数，记作$\bar{z}$. 显然，z和$\bar{z}$关于实轴是对称的(图1-2)．根据定义，容易验证

$$|\bar{z}|=|z|, \tag{6}$$

$$\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z, \tag{7}$$

$$\overline{(\bar{z})}=z. \tag{8}$$

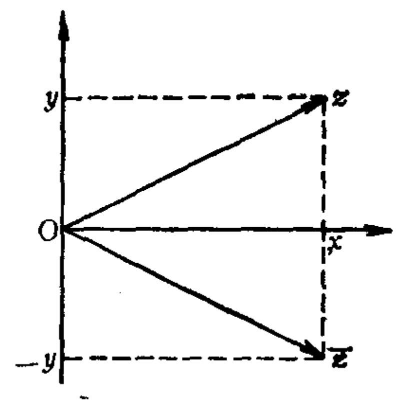

图 1-2

注意，(7)式的意义是：对于$\operatorname{Arg}\bar{z}$中的任意一个值，必有$\operatorname{Arg}z$中的一个值，使得它们仅相差一个符号，反之亦然.

习 题

1．求下列复数的模和幅角的主值

$$1+i,\ i,\ 2-3i,\ -1+i,\ -5+12i.$$

2．证明

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z)\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|.$$

§2 复数的运算

在定义运算之前，我们首先注意两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$是无大小可言的．我们称z_1，z_2是相等的，$z_1=z_2$，如果$x_1=x_2, y_1=y_2$.

复数的加法和减法定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

若用$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$分别表示复数$z_1, z_2$对应的向量，则复数的加减法与向量的加减法一致．因此按平行四边形法则，向量$\overrightarrow{OP}$表

示复数z_1+z_2（图1-3）．一般地，若有n个复数$z_k=x_k+iy_k$（$k=1,2,\cdots,n$），它们对应的向量是$\overrightarrow{OP_k}$（$k=1,2,\cdots,n$），那么

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+i(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

对应的向量（图1-4）是

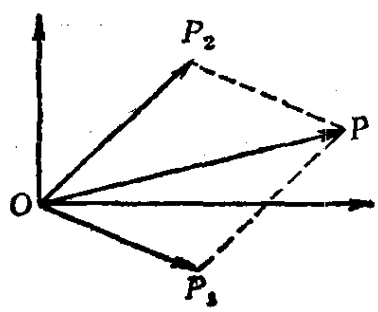

图 1-3

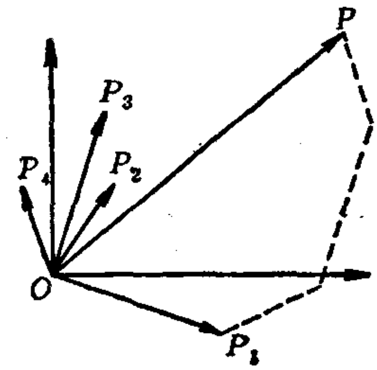

图 1-4

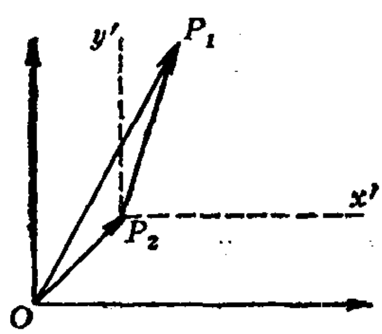

图 1-5

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}.$$

由于$\overrightarrow{P_2P_1}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_1}$（图1-5），所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_2P_1}&=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_2}\\&=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)\\&=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),\end{aligned}$$

即向量$\overrightarrow{P_2P_1}$表示复数z_1-z_2．$\overrightarrow{P_2P_1}$的长为$|z_1-z_2|$，也就是复平面上点z_1，z_2之间的距离．如果过P_2作P_2x'，P_2y'分别与Ox轴和Oy轴平行，那么$\overrightarrow{P_2P_1}$与P_2x'之间的夹角就是z_1-z_2的幅角．

在定义乘法时，如同对实数作乘法一样，我们只要注意$i^2=-1$，即

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

按照定义，

$$z\bar{z}=|z|^2. \qquad (9)$$

我们假设 $z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=x_2+iy_2=r_2\ (\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, 于是

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.\end{aligned}$$

因此得到

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|. \qquad (10)$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2. \quad (11)$$

这表明：乘积的模等于模的乘积，乘积的幅角等于幅角的和．根据这一结果，我们可以给乘法一个几何解释．在 Ox 轴上取单位线段 OI，在线段 Oz_2 上作 $\triangle Oz_2P$ 和 $\triangle OIz_1$ 相似，那么 P 点就表示乘积 z_1z_2（图1-6）．

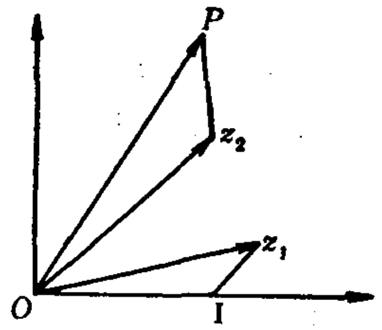

图 1-6

设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$.应用归纳法得到

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\},$$

即 $r_1r_2\cdots r_n$ 和 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$ 分别是 $z_1z_2\cdots z_n$ 的模和幅角．特别地，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \qquad (12)$$

上式称为de Moivre公式．

假设 $z_1\neq0$．由(9)式知，$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$．我们定义除法 $\frac{z_2}{z_1}$ 为 $\frac{1}{z_1}\cdot z_2$．由(10)式得到

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\left|\frac{1}{z_1}\right|\,|z_2|=\frac{|\bar{z}_1|}{|z_1|^2}|z_2|.$$

再由(6)式得到

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}. \tag{13}$$

由(11)式得到

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}\, z_2 + \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}\ z_2 + \mathrm{Arg}\,\bar{z}_1.$$

所以再由(7)式得到

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}\, z_2 - \mathrm{Arg}\, z_1. \tag{14}$$

为了说明除法的几何意义，只需说明运算 $w=1/z$ 的几何意义．为此，我们把这个运算分解为

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}, \qquad w = \bar{z}'.$$

如果$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，那么

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

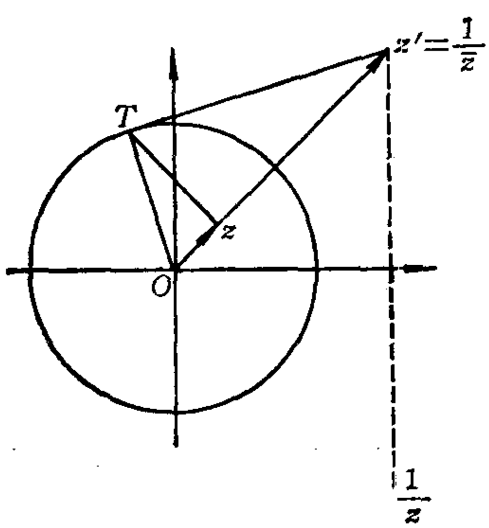

图 1-7

这表明θ也是z'的一个幅角，z'和z的模的乘积为1．因此，若$|z|<1$，过z点作射线Oz的垂线，交单位圆周于T，过T作单位圆周的切线，这条切线与Oz的交点就是z'．事实上，由直角三角形$\triangle OzT$和$\triangle OTz'$相似(图1-7)就得到

$$|z||z'| = 1, \quad \arg z' = \arg z.$$

若$|z|>1$，情形是类似的，只需先作切线再作垂线．当$|z|=1$时，$z'=z$，两点重合．

从z到z'称为关于单位圆周的对称变换．至于$w=\bar{z}'$，显然是关于实轴与z'对称．因此$w=1/z$是关于单位圆周的对称变换与

关于实轴对称的复合.

例 1　求复数$z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ ($-\pi \leqslant \theta < \pi$)的三角形式.

$$|z| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = 2\cos\frac{\theta}{2}.$$

$$\arg z = \arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\theta}{2}.$$

所以 (图1-8)

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

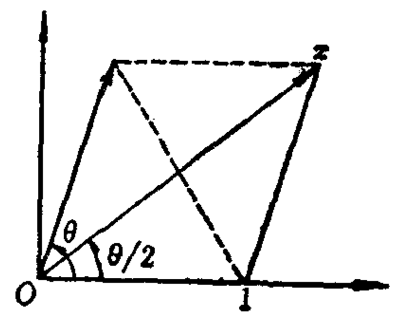

图 1-8

例 2　通过计算$(5-i)^4(1+i)$,证明 Machin公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

$$(5-i)^4(1+i) = (24-10i)^2(1+i) = (476-480i)(1+i)$$
$$= 4(239-i).$$

若取$-\pi \leqslant \arg z < \pi$, 那么

$$\arg(5-i)^4 = -4\arctan\frac{1}{5}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4},$$

$$\arg(239-i) = -\arctan\frac{1}{239}.$$

所以, 由(11)式得到

$$\frac{\pi}{4} - 4\arctan\frac{1}{5} = -\arctan\frac{1}{239},$$

即

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

习　题

1．验证$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$，$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$．

2．将下列复数表为$a+bi$的形式：

$$\frac{1}{i},\ i^n,\ \frac{1-i}{1+i},\ (1+i\sqrt{3})^3,\ (1+i)^n+(1-i)^n,$$

其中 n 是正整数．

3．设$z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 1$，求$\dfrac{1+z}{1-z}$．

4．设$|z|=r>0$，证明$\operatorname{Re}z=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{r^2}{z}\right)$，$\operatorname{Im}z=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{r^2}{z}\right)$．

5．证明：若$z=x+iy$不是负实数，则存在唯一的ζ，$\operatorname{Re}\zeta>0$，使得$\zeta^2=z$．

6．证明：以复数α，β，γ为顶点的三角形（由α到β再到γ是反时针方向），其面积为

$$\frac{1}{2}|\gamma-\beta|^2\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha).$$

7．求复数$z_0\neq 0$关于直线（1）$x-y=0$；（2）$x+y=0$的对称点．

8．求：（1）$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$；

（2）$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$．

9．（1）若$z=\cos\theta+i\sin\theta\neq 0$，则$\dfrac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$；

（2）若$z\neq 0$，定义$z^{-n}=1/z^n$．证明de Moivre公式对于所有的整数 n 成立．

10．证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\ (|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义．

11．证明：（1）$|1+z_1\overline{z}_2|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_2|^2)(1+|z_1|^2)$；

（2）$|1-\overline{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$；

(3) $|z_1(1+|z_2|^2)-z_2(1+|z_1|^2)|^2=|z_1-z_2|^2|1-z_1\bar{z}_2|^2-(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)^2$.

12. 证明当$|z_1|=1$或$|z_2|=1$之一成立时，$\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|=1$.若$|z_1|=|z_2|=1$，上式在什么条件下成立？

13. 证明复数α,β,γ共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\alpha & \bar{\alpha} & 1\\ \beta & \bar{\beta} & 1\\ \gamma & \bar{\gamma} & 1\end{vmatrix}=0.$$

14. 证明：以z_1,z_2,z_3为顶点的三角形与以w_1,w_2,w_3为顶点的三角形相似，其充要条件是

$$\begin{vmatrix}z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

15. 证明圆周的方程是$z\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+c=0$，其中$c$是实常数，$|\beta|^2-c>0$. 求其圆心和半径.

16. 求过不共线三点z_1,z_2,z_3的圆周的方程.

17. 设$z_1\neq0,1$，且$0,z_1,z_2$三点不共线，证明：过点$z_1,z_2,1/\bar{z}_1$的圆周的圆心和半径分别为

$$\frac{z_1(1+|z_2|^2)-z_2(1+|z_1|^2)}{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2},\qquad \frac{|z_1-z_2||1-\bar{z}_1z_2|}{|z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2|},$$

且点$1/\bar{z}_2$位于这个圆周上.

18. 若$|z_1|=\lambda|z_2|$，$\lambda>0$，则 $|z_1-\lambda^2z_2|=\lambda|z_1-z_2|$.

19. 设$z_1\neq z_2$，λ是不为1的正实数，证明$\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$是一圆周，并求其圆心和半径.

20. 设点z在图1-9所示的角内$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$|z-1|<\cos\alpha$.

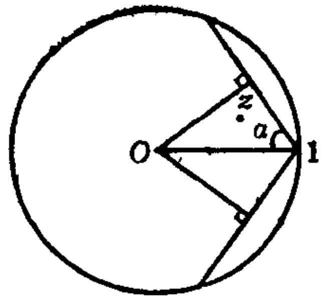

图 1-9

证明$\dfrac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

21. 证明$\sqrt[n]{z}$（复数z的n次方根）的n个值是正n边形的各顶点.

22. 设$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且$z_1+z_2+z_3=0$，证明z_1，z_2,z_3是内接于单位圆周的三角形的顶点.

23. 证明：复数α,β,γ为一个正三角形顶点的充要条件是$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

24. 证明：复平面上三个不同点α,β,γ作成以γ为顶点的等腰三角形，当且仅当存在正实数k，使得

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=k.$$

25. 设$|z_k|=1(k=1,2,3,4)$，证明z_k是矩形顶点的充要条件是$\sum\limits_{k=1}^{4}z_k=0$.

26. 证明恒等式

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

提示：考虑$(z+1)^n-1$不为零的$n-1$个根的乘积.

27. 利用de Moivre公式，证明：

(1) 当$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$时，

$$\sin(2m+1)\theta=\sin^{2m+1}\theta P_m(\cot^2\theta),$$

其中　$P_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m+1}^{2k+1}x^{m-k}$.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{m}\cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}=\dfrac{m(2m-1)}{3}$.