

大学数学学习指导

常微分方程

—方法导引



DA XUE SHU XUE

XUE XI ZHI DAO

151781

大学数学学习指导

常微分方程

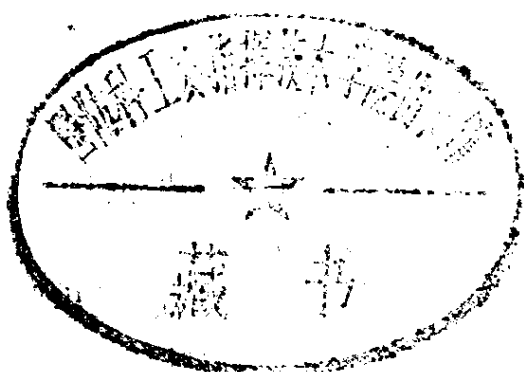
——方法导引

GF125121

阮炯 编著



科工委书号802 2 0042604 6



复旦大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了常微分方程的各种问题与处理这些问题的方法。第一部分介绍各种可求解的类型以及方法；第二部分介绍解的基本理论与定性理论及方法；第三部分介绍由实际模型归结微分方程的方法及边值问题与数值解。每章都配有例题与习题，习题都附有解答或提示。本书可作为理工科学生和常微分方程自学者学习参考书，也可作为报考研究生的读者的复习指导书。

常 微 分 方 程

——方法导引

阮 炯 编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路 579 号)

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 274,000

1991 年 8 月第 1 版 1991 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—5,000

ISBN7-309-00626-7/O·90

定价：3.10 元

序

本书系统地介绍了常微分方程的各种问题与处理这些问题的方法。编写本书的目的，一是为理工科学生和常微分方程自学者提供一本指导学习理论与解题方法的参考书；二是为报考研究生的读者提供一本复习迎考的指导书；三是为有关的教师提供教学与考试命题的参考书。

本书的内容分三部分。第一部分“常微分方程的类型与求解方法”介绍了各种可求解的类型以及方法；第二部分“常微分方程解的性质与讨论方法”介绍了解的基本理论、定性理论与方法；第三部分“常微分方程模型的归结与应用”介绍了由实际模型归结微分方程的方法及应用。本书每一章前面是理论与方法提要，后面是例题及习题。提要部分对于一般常微分方程教科书中的定理与结果作了系统的归纳与总结，并概述了各种方法的实质与要领，但对于结论的详细证明大多被略去了。为了使读者在学习的时候避免在同一水平上的过分重复，例题与习题的选取注意既有内容上的广泛性，又有一定方法难度上的阶梯性。习题均配有解答，对较难的习题还附有提示。例题配得少而精，以利于清楚地介绍各种方法的应用，使读者能举一反三。

本书主要取材于编者多年来讲授常微分方程课程以及为报考研究生开设的复习辅导课的讲稿。例题与习题主要来源于复旦大学与其他高等院校的研究生试题及历届大学本科生的试题，另外还从国内外已出版的习题集中选取了一部分习题。限于编者的水平和能力，难免有缺点和错误，殷切希望广大读者批评指教。

编 者

1990年6月于复旦

引 言

常微分方程这门课程的学习基本要求有三个方面。

第一方面,对于能求出解的一些方程类型,要掌握它们的解法。从类型来讲,线性常系数 n 阶方程及方程组是均能求解的,线性变系数 n 阶方程与方程组及非线性方程与方程组能求解的类型则很少。从方法来讲,主要用到欧拉指数法、待定系数法、常数变易法、算子法、拉普拉斯变换法、变量代换法等方法,这些方法的实质是将微分方程化为代数方程或可用积分求解的方程。

第二方面,对于一般的方程,要掌握它们解的基本性质及讨论的方法。从性质来讲,主要是初值问题解的存在唯一性、解对初值或参数的连续依赖性、解的估计、奇点的分类与判别、周期解与极限环的存在与判别、解的稳定性的判别。从方法上讲,主要是逐次逼近法、微分积分不等式法、定性分析法及李雅普诺夫函数法。这些方法实质上是利用微分方程的形式而不借助于具体求解的方法。

第三方面,对于常微分方程模型的归结,要掌握微元分析法、按规律列式法及模拟近似法三种方法。具体要掌握的模型则随所学专业而定。

目 录

序.....	1
引言.....	1

第一部分 常微分方程的类型与求解方法

第一章 线性常微分方程 (组)	2
§ 1 齐次方程 (组)	3
§ 2 非齐次方程 (组)	7
§ 3 高阶线性方程组	14
§ 4 初值问题与边值问题	15
例题.....	18
习题.....	64
第二章 非线性常微分方程 (组)	71
§ 1 导数已解出的一阶方程	71
§ 2 导数未解出的一阶方程	78
§ 3 高阶方程	82
§ 4 方程组	83
例题.....	86
习题.....	106

第二部分 常微分方程解的性质与讨论方法

第三章 常微分方程解的基本理论	109
§ 1 非线性方程初值问题解的存在唯一性与延展.....	110

§ 2 非线性方程初值问题解对初值和参数的连续依赖性 与可微性	127
§ 3 线性方程(组)初值问题解的基本理论	130
例题	132
习题	176

第四章 常微分方程解的定性分析..... 180

§ 1 奇点的类型与判别	180
§ 2 闭轨、周期解、极限环	184
§ 3 解的稳定性	186
§ 4 解的其他一些性质	192
例题	199
习题	251

第三部分 常微分方程模型的归结与应用

第五章 常微分方程模型的归结与应用..... 257

§ 1 按规律列式法	257
§ 2 微元分析法	257
§ 3 模拟近似法	257
例题	258
习题	271

习题解答..... 275

参考书目..... 289

第一部分 常微分方程的类型 与求解方法

常微分方程就是包含有单变量的未知函数及其导数的方程。通常可分为线性与非线性两大类，它是根据常微分方程中的未知函数及其导数的项是线性地还是非线性地出现来区分的。若常微分方程中出现的最高阶导数的阶数为 n ，则称该方程为 n 阶常微分方程。若常微分方程中未知函数的个数及方程的个数均为 $n(n>1)$ ，则称之为常微分方程组。

常微分方程中的解通常分为一般解（有时也称为通解）、特解、全部解、初值问题的解、边值问题的解 5 种类型。

一阶常微分方程组的一般形式为

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (0.1)$$

其中 x, f 均为 n 维向量值函数。

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (0.2)$$

其中 $x^{(i)}(i=1, 2, \dots, n)$ 为 $x(t)$ 的 i 阶导数。

“一般解”指满足常微分方程 (0.1) 或 (0.2) 的解的一般形式，通常是含有 n 个独立的任意常数的解。“特解”指满足常微分方程 (0.1) 或 (0.2) 的解，其中不含有任意常数。“全部解”指满足常微分方程 (0.1) 或 (0.2) 的所有解的全体，它通常是由一般解与不能包含在一般解中的所有特解组合而成的。“初值问题的解”指满足方程 (0.1) 与初值条件

$$x(t_0) = x_0 \quad (0.3)$$

的解，其中 x_0 为 n 维已知常向量。高阶方程 (0.2) 的初值条件将在第一章 §4 中再详述。“边值问题的解”指满足常微分方程与边值条件的解，见本章 §4。

第一章 线性常微分方程 (组)

n 阶线性常微分方程的一般形式为

$$L[x]=0, \quad (1.1)$$

$$L[x]=f, \quad (1.2)$$

其中 L 为 n 阶线性微分算子, f 为不恒为零的已知函数, x 为未知函数。(1.1) 称为**线性齐次方程**, (1.2) 称为**线性非齐次方程**。通常, 记

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t). \quad (1.3)$$

线性方程组的一般形式为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1.4)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (1.5)$$

其中 x 与 f 均为 n 维函数向量, $A(t)$ 为 $n \times n$ 矩阵。称 (1.4) 为**线性齐次方程组**, (1.5) 为**线性非齐次方程组**。

求解线性常微分方程的方法根据下述线性迭加原理。

定理 1 (迭加原理 1) 若 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 均为 (1.1) 的解, c_1, c_2 是任意常数, 则 $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ 也是 (1.1) 的解。又若 $\psi_1(t), \psi_2(t)$ 是 (1.4) 的解, c_1, c_2 是任意常数, 则 $c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)$ 也是 (1.4) 的解 (此后, 通解中的 c_1, c_2 等任意常数不再特别说明)。

定理 2 (迭加原理 2) 若 $\varphi(t)$ 是 (1.1) 的一般解, $\psi(t)$ 是 (1.2) 的特解, 则 $\varphi(t) + \psi(t)$ 是 (1.2) 的一般解。又若 $x^*(t)$ 是 (1.4) 的一般解, $\tilde{x}(t)$ 是 (1.5) 的特解, 则 $x^*(t) + \tilde{x}(t)$ 是 (1.5) 的一般解。

定理 3 (迭加原理 3) 设 $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_m, \varphi_i$ 分别满足方程

$$L[\varphi_i] = f_i \quad (i=1, 2, \cdots, m), \quad (1.6)$$

则 $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$ 满足 (1.2), 又设 $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_m$, Φ_i 分别满足方程组

$$\frac{d\Phi_i(t)}{dt} = A(t)\Phi_i(t) + f_i(t), \quad (1.7)$$

则 $\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_m$ 满足 (1.5)。

§ 1 齐次方程(组)

对于齐次方程 (1.1) 及 (1.4), 求解的主要方法是欧拉指数法。如果 (1.1) 中的系数为常数, 那么就用指数函数 $e^{\lambda t}$ 代入方程, 将其变为求解关于 λ 的代数方程的问题。如果 (1.4) 中的系数矩阵是常数矩阵, 那么就用指数函数 $e^{\lambda t}$ 代入方程组 (1.4), 将其变为求解对应的特征方程

$$\det(\lambda E - A) = 0 \quad (1.8)$$

的问题。对于一般的变系数方程, 可用分析方法求解的类型较少。具体地说, 一阶情形是均可求解的, 而二阶或二阶以上的情形, 则仅有部分类型可求解。对于变系数 n 阶线性方程常常可通过自变量或未知函数的代换, 将方程化为新的线性常系数方程。

下面分别就一些具体的齐次方程给出解的形式及求解方法。

一、 n 阶常系数齐次方程

这种类型的方程形如

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0, \quad (1.9)$$

对应的特征方程为

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (1.10)$$

由 (1.10) 的根的不同情况, 可得到 (1.9) 的解的不同形式。

求解这种类型方程的方法只有一种, 它根据下面的定理。

定理 4 若特征方程 (1.10) 有重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 的不相同的 s 个实根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 以及重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_l$ 的不相同的 l 对共轭复根 $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \cdots, \alpha_l \pm i\beta_l$, 则 (1.9) 的通解为

$$x = \sum_{i=1}^l R_i(t) e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^l [P_j(t) \cos \beta_j t + Q_j(t) \sin \beta_j t] e^{\alpha_j t},$$

其中 $R_i(t)$ 是 t 的次数不超过 n_i 的多项式, $P_j(t), Q_j(t)$ 是 t 的次数不超过 m_j 的多项式, 其系数均为任意常数, 共 n 个。

二、常系数线性齐次方程组

这种类型的方程组形如

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (1.11)$$

求解这种类型的方程组的方法有以下 4 种。

方法 1 (待定系数法) 设 (1.11) 特征方程为 (1.8)。由 (1.8) 的 n 个特征根的不同情况, 所得到 (1.11) 的每个解分量均有类似于定理 4 中的通解形式, 且在解向量的表达式中有 n^2 个任意常数, 但实际上它们均能用 n 个独立的任意常数表示。具体求解时, 只要将带有 n^2 个任意常数的解向量代入 (1.11), 找出这些任意常数之间的一些关系式, 使 n^2 个任意常数均能用 n 个独立的任意常数表示, 就可得到 (1.11) 的通解。

方法 2 (化高阶方程法) 将齐次线性方程组化为常系数高阶线性方程。要注意这种方法仅对于解不太复杂的方程组是方便的。一般可用消去未知函数的方法, 把方程组化为只含有一个未知函数的高阶方程。

方法 3 (e^{At} 解法) 定义

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots,$$

其中 E 为单位矩阵。它有如下一些性质:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = E, \quad e^{A \cdot (t+s)} = e^{At} \cdot e^{As},$$

$$S^{-1} e^{At} S = e^{(S^{-1} A S)t}, \quad e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \quad (\text{当且仅当 } AB=BA).$$

定理 5 (1.11) 的任意解为

$$x = e^{At} c, \quad (1.12)$$

其中 c 为 n 维任意常向量 (此后, 亦将不再特别说明)。

对一些特殊的矩阵 A , 易求得 e^{At} , 从而也就能求得相应的齐次方程组 (1.11) 的通解。例如, 若

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

$$J = A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} J & I & & 0 \\ & J & \ddots & \\ 0 & & \ddots & I \\ & & & J \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_s t} \end{pmatrix}, \quad e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} e^{\alpha t}, \quad e^{A_4 t} = \begin{pmatrix} e^{Jt} & te^{Jt} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{Jt} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & te^{Jt} \\ 0 & & & e^{Jt} \end{pmatrix}.$$

方法4 (基本解公式法, 有时又称为特征向量或广义特征向量法)

定义 (1.11) 的基本解矩阵为这样的矩阵, 它的每一列是 n 个线性无关的解向量中的一个。先建立两个定理。

定理6 如果矩阵 A 具有 n 个不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 其对应的 n 个线性无关的特征向量为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 则矩阵

$$\tilde{X}(t) = (e^{\lambda_1 t} \eta_1, e^{\lambda_2 t} \eta_2, \dots, e^{\lambda_n t} \eta_n) \quad (1.13)$$

是 (1.11) 的一个基本解矩阵。而 $X(t) = \tilde{X}(t) \tilde{X}^{-1}(0)$ 为标准基本解矩阵 (它满足 $X(0) = E$), 此时 (1.11) 的通解是

$$x(t) = X(t)c, \quad (1.14)$$

其中 $X(t) = e^{At}$ 。

定理 7 如果矩阵 A 具有 s 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 其重数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_s$, 那么 (1.11) 的满足初始条件 $x(0) = \eta_0$ ($\eta_0 = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_s$) 的解可表示为

$$x(t) = \sum_{j=1}^s e^{\lambda_j t} \left[\sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda_j E)^i \right] \eta_j, \quad (1.15)$$

其中 n 维向量 η_j ($j=1, 2, \dots, s$) 是线性代数方程组

$$(A - \lambda_j E)^{n_j} \eta_j = 0 \quad (1.16)$$

的解。有时称 η_j 为相应于特征根 λ_j 的**广义特征向量**。当 η_0 为任意常向量时, (1.15) 就是 (1.11) 的通解。依次令 η_0 等于 n 维单位向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$, 即求得 n 个线性无关的解, 将它们排成 n 个列, 即构成 (1.11) 的标准基本解矩阵。

显然, 定理 5 是定理 6 的特殊情况。基本解公式法就是由 A 的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 及相应的广义特征向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 及公式 (1.15), (1.16) 给出 (1.11) 通解表示的方法。

三、一阶线性变系数齐次方程

下列形式的方程

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (1.17)$$

的求解公式为

$$x = c \exp \left[\int_{t_0}^t P(s) ds \right]. \quad (1.18)$$

四、某些 n 阶线性变系数齐次方程

欧拉方程的形式为

$$a_n t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (t > 0), \quad (1.19)$$

其中 a_i ($i=0, 1, \dots, n$) 是常数, 且 $a_n \neq 0$ 。它的求解方法就是通过作自变量的变换 $\tau = \ln t$, 将 (1.19) 化为线性常系数 n 阶方程。

对于如下形式的方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t) \frac{dx}{dt} + Q(t)x = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t} a_1(t) \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t^2} a_0(t)x = 0, \quad (1.21)$$

其中 $P(t), Q(t), a_1(t), a_0(t)$ 均在 $|t| < r (r > 0)$ 内可展开为收敛的幂级数。因此, 可用幂级数法求解这些方程。

§ 2 非齐次方程(组)

由前述迭加原理知, 求线性非齐次方程(组)的一般解, 首先要求得相应的线性齐次方程(组)的一般解, 其次要求得该非齐次方程(组)的特解, 然后, 将两者加起来就得到非齐次方程(组)的一般解。因而下面着重介绍求非齐次方程(组)特解的几种方法。

方程(组)的一般形式为

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad (1.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad (1.23)$$

其中 $a_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 是常数(此后, 亦将不再特别说明), A 是 n 阶常方阵, x 与 $f(t)$ 为 n 维向量, 以及

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = f(t), \quad (1.24)$$

其中 $P(t), Q(t), f(t)$ 是给定的实函数。这种类型方程(组)求解的方法有下面三种。

方法 1 (常数变易法及常数变易公式)。

(1) n 阶线性非齐次方程 (1.22)

对 (1.22) 中右端 $f(t)$ 是一般函数的情形, 可设 $\varphi_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$ 为对应于特征方程 (1.10) 的、如定理 4 所述形式的 n 个线性无关的解。令 (1.22) 的一般解为

$$x = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \cdots + c_n \varphi_n(t),$$

其中 $c_i = c_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$ 视为 t 的待定函数, 将其代入 (1.22) 得到具有 n 个未知函数 $c_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$ 的代数方程组:

$$\begin{cases} c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + \cdots + c_n'(t)\varphi_n(t) = 0, \\ c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + \cdots + c_n'(t)\varphi_n'(t) = 0, \\ \dots \dots \\ c_1'(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)\varphi_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)\varphi_n^{(n-1)}(t) = f(t), \end{cases}$$

解出 $c_i'(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 后, 再求积分解得 $c_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 从而求出了解。

这种方法对于方程右端自由项是非拟多项式的情形 (我们称这种形式的多项式: $f(t) = [A(t)\cos \beta t + B(t)\sin \beta t]e^{\alpha t}$ 为拟多项式, 其中 $A(t), B(t)$ 是 t 的已知多项式, α, β 为实常数) 很有效, 而对于拟多项式的右端自由项, 由于需要较繁琐的运算, 所以还是用下面两种方法较好。

由上述常数变易法可以归结得一般的常数变易公式, 这是以公式形式给出的特解, 使用起来比较方便。

设 $K(t)$ 满足相应的齐次方程 (1.10) 以及如下初值条件

$$K(0)=0, K'(0)=0, \dots, K^{(n-2)}(0)=0, K^{(n-1)}(0)=1, \quad (1.25)$$

那么, (1.22) 的特解为

$$\tilde{x} = \int_0^t K(t-s)f(s)ds. \quad (1.26)$$

对 $n=2$ 的情形:

(i) 若特征方程有两个相异的实根 λ_1, λ_2 , 则 $K(t) = (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) / (\lambda_1 - \lambda_2)$;

(ii) 若特征方程有重实根 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则 $K(t) = te^{\lambda_1 t}$;

(iii) 若特征方程有一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$, 则 $K(t) = e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t / \beta$ 。

(2) 线性非齐次方程组 (1.23)

设与 (1.23) 对应的齐次方程组 (1.11) 的一般解为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i p_i(t),$$

其中 $p_1(t), \dots, p_n(t)$ 是 (1.11) 的 n 个线性无关的解向量。现将 c_i 视为 t 的函数 $c_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 令 (1.23) 的一般解为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) p_i(t),$$

其中 $c_i(t)$ 为待定函数, 将其代入 (1.23) 得到 $c'_1(t), \dots, c'_n(t)$ 所满足的方程组为

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) p_i(t) = f(t),$$

解出 $c'_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$, 再积分之就求得 $c_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$, 也就求得了 (1.23) 的一般解。

由常数变易法易得下面的常数变易公式:

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)c + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds \\ &= X(t)c + \int_{t_0}^t X(t-s)f(s)ds. \end{aligned} \quad (1.27)$$

其中 $X(t)$ 是对应的齐次方程组 (1.11) 的基本解矩阵, c 是 n 维任意向量。

我们可以通过求 e^{At} 的方法求得 $X(t)$, 若 e^{At} 易求得, 那么 (1.23) 的一般解为

$$x(t) = e^{At}c + \int e^{-At}f(t)dt.$$

求 (1.23) 的满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds \quad (1.28)$$

时, 其中的 e^{At} 一般可通过先求 (1.23) 的分别满足初值条件

$$x(0) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$$

的解向量, 再将其作为 e^{At} 的第 i 列 ($i=1, 2, \dots, n$) 来得到。

(3) 二阶变系数线性非齐次方程 (1.24)

如果已知 $x_1(t)$ 是相应的齐次方程的一个解, 那么可求得对应的齐次方程的一般解为

$$x = x_1(t) \left\{ c_1 + c_2 \int \left[e^{-\int p(t)dt} / x_1^2(t) \right] dt \right\}, \quad (1.29)$$

将其中的 c_1, c_2 视为 t 的待定函数, 用常数变易法可求出 $c_1(t)$ 与 $c_2(t)$, 于是也就得到了 (1.24) 的一般解的表示式, 即常数变易公式 (满足初始条件 $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$ 的解):

$$x = x_1(t, t_0)x_0 + x_2(t, t_0)x'_0$$

$$+\int_{t_0}^t x_2(t,s)f(s)ds, \quad (1.30)$$

其中 $x_1(t, t_0)$ 与 $x_2(t, t_0)$ 是对应于齐次方程 (1.20) 的分别满足

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0; t_0) \\ x_1'(t_0; t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t_0; t_0) \\ x_2'(t_0; t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的两个线性无关的解。

(4) 具有变系数的线性非齐次方程组

现讨论如下的方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (1.31)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1.32)$$

其中 $A(t)$ 是 n 阶函数值矩阵。又设初始条件为

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.33)$$

其中 x_0 是给定的 n 维常向量。求方程组 (1.31) 满足 (1.33) 的解即为求解初值问题 (1.31), (1.33)。关于它的求解方法将在 §4 中专门讨论, 下面着重介绍这种类型方程组的解的结构、基本解组、刘维尔公式和常数变易公式, 这类方程组中仅有少量的特殊方程组可求得解, 一般用这些概念与公式讨论解的性质是很有效的。

定义 1 假设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$ 是在 $\alpha < t < \beta$ 内连续的向量值函数, 如果存在 r 个不全为零的常数 $c_1, c_2, \dots, c_r$, 且使得

$$c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_r \varphi_r(t) \equiv 0, \quad (1.34)$$

则称 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$ 在 $\alpha < t < \beta$ 内是线性相关的。又若 (1.34) 在 $\alpha < t < \beta$ 内成立, 并能推出 $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$, 则称 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$ 是线性无关的。

定义 2 若齐次方程组 (1.32) 的 n 个解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 在 $\alpha < t < \beta$ 内是线性无关的, 则称这 n 个解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 是方程组 (1.32) 的基本解组, 称 $n \times n$ 阶方阵

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

为 (1.32) 的基本解矩阵, 又若 $\Phi(t_0) = E$ ($n \times n$ 单位阵), 则称 $\Phi(t)$ 为标准的基本解矩阵。