

高等工程规划教材
工科电子类

GH

电磁场 在目标识别中的应用

王保义 时振栋



电子工业出版社

**TN951
12**

32160903

高等学校工科电子类规划教材

电磁场在目标识别中的应用

王保义 时振栋

电子工业出版社

(京)新登字 055 号

内 容 简 介

本书全面、系统地阐述了电磁场在目标识别中应用的原理、特征、方法及其在各个领域的应用。全书共五章,包括自由空间中雷达目标的特征及其识别方法。瞬态电磁场在目标识别中的应用,电磁相似理论在目标模型测量和目标识别中的应用,地下目标的检测与识别等。

本书内容新颖、丰富,适合于无线电工程、雷达工程、遥感遥测、地质勘探、环境监测等专业的大学生、研究生阅读。

高等学校工科电子类规划教材

电磁场在目标识别中的应用

王保义 时振栋

*

电子工业出版社出版

北京市海淀区万寿路 173 信箱(100036)

电子工业出版社发行 各地新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

*

开本: 850×1168毫米 1/32 印张: 8 字数: 210 千字

1995年 3 月第一版 1995年 3 月北京第一次印刷

印数: 800 册 定价: 12.00 元

ISBN 7-5053-2735-6/G·214

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的规定,我部承担了全国高等学校和中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978~1990年,已编审、出版了三个轮次教材,及时供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻国家教委《高等教育“八五”期间教材建设规划纲要》的精神,“以全面提高教材质量水平为中心,保证重点教材,保持教材相对稳定,适当扩大教材品种,逐步完善教材配套”,作为“八五”期间工科电子类专业教材建设工作的指导思想,组织我部所属的八个高等学校教材编审委员会和四个中等专业学校专业教学指导委员会,在总结前三轮教材工作的基础上,根据教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1991~1995年的“八五”(第四轮)教材编审出版规划。列入规划的,以主要专业主干课程教材及其辅助教材为主的教材约300余种。这批教材的评选推荐和编审工作,由各编委会或教学指导委员会组织进行。

这批教材的书稿,其一是从通过教学实践、师生反应较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的,其二是在认真遴选主编人的条件下进行约编的,其三是经过质量调查在前几轮组织编写出版的教材中修编的。广大编审者、各编审委员会(小组)、教学指导委员会和有关出版社,为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还可能有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评和建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

绪 言

目标识别这个概念通常包含两个方面，即在空间中的各类目标识别，诸如飞机、导弹及各种飞行物体，及其基本方法，另一类是地下目标识别，即在地面下的各种目标，诸如空洞、管道，和各种异物的识别。

目标识别在军事方面有着十分重要的作用，例如在弹道导弹防御系统中，导弹与卫星的识别，运载火箭与弹头的识别，都是十分重要的。在防空系统工程中，也急需解决各种飞机的类型，编队的具体细节，如何把飞机和各种干扰物(如角反射体等)区别开来，以及如何用无源的方法解决敌我识别的问题；在轰炸雷达系统中，目标识别能有效的解决各种反伪装的设施。在民用方面，目标识别也是很有意义的，例如气象雷达对云、雨、冰雹区的有效识别，可提供更多的有用的气象资料，天文雷达则可以更好的帮助光学观测的各种结果对地球的几个邻近星体进行更深入的研究。在地形跟随雷达方面则可以使载机能在复杂的地形上空，作超低空高速的贴地飞行，这种具有目标识别的雷达能连续不断地识别出载机前方的地形，为驾驶员或自动驾驶仪输送地形指令信号，通过飞行控制系统使载机安全飞行。在合成孔径雷达方面，可用于军事侦察和环境遥感，近年来发射的几种航天飞机，都装有高分辨力的合成孔径雷达，在目标识别中，它具有全天候和全天时性能，具有很高的空间分辨力以及独特的侧视工作方式。在地下目标的探测与识别中，探地雷达也是极其重要的，它可以探测和识别地下的各种管道(水管、气管和各种电缆)，地表下的金属和塑料地雷，地面路基的结构，煤层厚度，沙漠的地下水源，冰川储量，暗河和空洞，以及河床的分布等。

在雷达目标识别中,要想直接获得目标的形状和图形,如同光学成象或电视摄象原理那样是行不通的,因为雷达的分辨能力,尤其是角分辨力,在目前的技术条件下,不可能很高,雷达所使用的波长要比光波大许多数量级,除了用合成孔径一类的全息雷达和冲激脉冲雷达外,用一般方法直接获取目标图象是十分困难的。

在目标识别的过程中,如果能直接获得该物的图象,这当然是最好的办法。如果做不到,那么根据该物的某些特征来识别也是可能的。雷达目标识别就是从目标的雷达回波中的特征信息来解决这一问题的。

根据过去若干年来,国内外学者对目标识别的研究工作,其目标识别的方法大致分为以下几类:

- (1) 根据目标的运动特征进行识别;
- (2) 根据目标回波幅度起伏的规律——即回波幅度的特征进行识别;
- (3) 根据目标回波场分布——即利用回波场的相位特征进行识别;
- (4) 根据目标的极化特征进行识别;
- (5) 根据目标的冲击响应或传递函数的具体特征进行识别。

最近 20 多年来,瞬态电磁场有了飞速的发展,由于瞬态场具有很宽的频谱,利用瞬态电磁脉冲的这一特性,研制成功了冲激脉冲雷达,为雷达目标识别(包括空间目标识别和地下目标识别)以及在反隐身方面带来了极大的希望。利用所谓“E 脉冲”(Extinctionpulse)对目标进行识别是一类很重要的方法,目前已能够在实验室中,对模型飞机进行辨别。基于冲激脉冲雷达的超宽频带技术(UWB),在识别隐身目标方面具有许多独特的优点,例如它有很高的距离分辨力和角度分辨力,具有超近程能力和低的截获概率等。

空间目标识别的许多方法,原则上可以用于地下目标识别,但是由于地下表面环境的复杂性,例如,不同土壤,不同湿度,不均匀

性以及不同的界面分层等,使得电磁波在地下传播时具有比空气中的损耗大得多,同时目标对电磁波的散射也复杂得多。因此在探地雷达的设计中,发射机,接收机,天线的设计具有许多不同的特点,在信号处理时也具有更大的复杂性。

对若干大型目标,如各型飞机,导弹等,它们的尺寸不仅远远大于雷达波的波长,而且比实验设备大得多,为了掌握这些目标的基本特性,减少设计的盲目性,避免人力、物力的浪费,所以通常要先进行模型实验,将待测的原型目标的各部份长度按比例缩小,获得一个与原目标完全相似的模型目标,对这个模型目标进行实验测量,来研究原型的基本性能,这是目标识别中的一类极重要的实际测量方法,因此,本书中专门介绍了电磁相似理论在目标模型测量和目标识别中的应用,以便使本书具有更大的实用性。

目标识别的问题是一门新型的边缘学科,它涉及到电子信息科学、物理学及大量的数学知识,目前在国内、外都缺乏一部完整的教材,主要材料散布在各种文献中,编者将尽自己的努力,将目标识别的有关知识,系统整理出来,以使读者能节约时间,提高效率,更好的为我国的经济建设和国防事业服务。

目 录

第一章 自由空间中雷达目标的基本特征	1
§ 1.1 目标信息与雷达信号	1
§ 1.2 电磁散射的线性系统理论概述	2
§ 1.3 电磁逆散射及图象重构知识简介	7
参考文献	13
第二章 自由空间雷达目标识别的基本方法	15
§ 2.1 多频雷达回波幅度用于识别目标——即利用斜升响应函数 $h_r(t)$ 作目标成象概述	17
§ 2.2 利用多频雷达回波相位进行目标识别	21
§ 2.3 回波极化特性用于目标识别	26
§ 2.4 其它一些可能的识别方法	33
§ 2.5 关于目标环境特性及测量的有关问题	36
§ 2.6 目标极点的概念及极点不变性在目标识别中的应用	44
§ 2.7 提取目标极点的各种方法简介	47
§ 2.8 根据目标极点特征进行目标识别的方法	53
§ 2.9 预估相关处理法	57
参考文献	62
第三章 瞬态电磁场在目标识别中的应用	63
§ 3.1 瞬态电磁脉冲的基本特性描述	63
§ 3.2 求解瞬态电磁场的基本方法简介	65
§ 3.3 利用 E 脉冲对目标进行识别	72
§ 3.4 超宽频带 (UWB) 在目标识别中的应用	77
§ 3.5 冲激脉冲雷达关键技术探讨	81
§ 3.6 非正弦波天线设计要点及线阵波束的形成	87
参考文献	92

第四章 电磁相似理论在目标模型测量和

目标识别中的应用.....94

§ 4.1 有耗电磁系统的相似性(方程分析法)	96
§ 4.2 相似理论及其在目标识别中的应用(因次分析法)	101
§ 4.3 有耗雷达目标的表面阻抗	105
§ 4.4 有耗雷达目标的散射缩比因子	112
§ 4.5 有耗散射体的表面阻抗对其雷达散射截面的影响	113
§ 4.6 波长和尺寸对雷达目标散射截面的影响	121
参考文献	138

第五章 地下目标的检验与识别..... 140

§ 5.1 探测地下目标的基本原理和基本方法	140
§ 5.2 非正弦电磁波在有损耗媒质中的传播及其应用	149
§ 5.3 典型的冲激脉冲探地雷达的设计和实验结果	161
§ 5.4 脉冲调制式矿井地质雷达的原理和设计要求	169
§ 5.5 地质雷达天线的设计	183
§ 5.6 埋地金属地雷和塑料地雷的探测与识别	196
§ 5.7 FMCW 雷达在探测地下目标中的应用	206
§ 5.8 SIR 型系列雷达探测仪简介.....	221
§ 5.9 用电磁法测量石油钻孔周围地层电阻率.....	233
参考文献	243

第一章 自由空间中雷达 目标的基本特征

§ 1.1 目标信息与雷达信号

大家知道,通常雷达所能提供的目标信息,绝大多数仅限于目标的距离,方位,仰角(或高度),径向速度等。要想根据这些信息来解决目标识别的问题是不够的,还应当设法知道目标自身的有关特征和信息,诸如形状、大小,以及其它可以应用的特征信息。

关于目标本身的信息,是在雷达工作过程中来获取的,雷达的发射信号遇到目标后,目标的运动和形状将对发射信号产生“调制”,实际上目标的回波信号即为“调制”后的信号,而且这种“调制”过程与一般通信系统完全不同,其规律是不能人为控制的。即就是说,目标的哪些信息对应着信号的哪些参数是不能人为控制的。但是它们的规律或对应关系确是始终存在的。我们可以简单地归纳如下: 反射信号的存在代表着目标的存在; 信号的时延代表着目标与雷达发射机有一定的距离; 信号的多普勒频移代表着目标的径向运动速度; 回波波前的法向方向代表着目标的角度信息等。但是为了能深入的解决目标识别的问题,还需要更多的这种对应关系,实际上,目标回波信号的幅度和相位是空间、时间和频率的函数。例如相位对空间的变化率可以反映出目标的角度和方位;相位对时间的变化率可以反映出目标的径相速度;相位对频率的变化率可以反映出目标的距离信息;而幅度对空间的变化率可以反映出目标的形状;幅度对时间的变化率可以反映出目标的自旋特征;而幅度对频率的变化率可以反映出目标的大小和体积。以

上的这些对应关系，能比较好的说明事物的本质。我们的任务就是要把这些最本质、最有用的特征提取出来，以便达到目标识别的目的。

§ 1.2 电磁散射的线性系统理论概述

1958 年,美国俄亥俄州立大学电气科学实验室的 E. M. Kennanagh 首次提出“电磁散射的脉冲响应概念”。1965 年又由他和 D. L. Moffatt 将这一理论更加完善,它们将线性系统理论首先应用于电磁散射问题,进一步推动了目标识别的研究工作,此后,瞬态电磁场的研究工作迅速成为了电磁领域中最引人注目的一个研究方向。

通常,人们把空间目标和目标周围的空间视为一个线性网络,

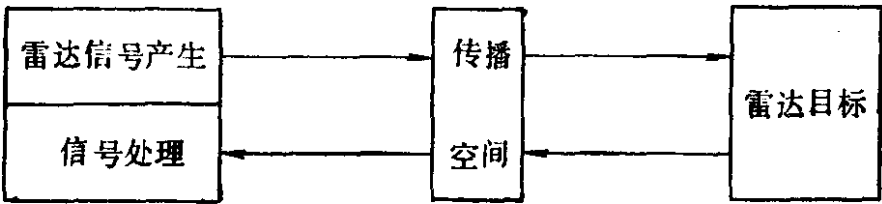


图 1-1 雷达信号传输过程

这从雷达信号的传输过程很容易看出,图 1-1 给出示意图。

对于固定或准固定目标而言,此网络不仅可视为线性的,而且可视为非时变的,最一般的情况是目标尺寸是有限的并且位于远区范围内,如果传播空间是自由空间,这个传播空间可等效于一个全通无色散衰减网络,则其群延时给出目标的距离信息,目标本身也可视为一个线性网络。现在回到 E. M. Kennanagh 对电磁目标散射的基本论点,规纳起来主要有三点:

(1) 为了获得适用于各种雷达信号的目标反射特征模型,建议在时域上采用目标冲击响应函数 $h(t)$,或者是在频域上采用相应的频谱响应函数 $H(j\omega)$ 来表示目标的散射特性,而 $h(t)$ 和

$H(j\omega)$ 互为傅里叶变换对。

由于目标可视为一个线性网络,适当定义其输入和输出,其特性可用冲击响应来描述。如果作用于目标的信号为 $u(t)$, 则二者的卷积积分给出目标的输出 $V(t)$ 。

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (1.1)$$

对于实际的物理系统来说, $u(t)$ 、 $V(t)$ 和 $h(t)$ 都应该是实数,当 $t < 0$ 时,应有 $h(t) = 0$, 所以(1.1)式的积分应变为

$$V(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (1.2)$$

由于 $u(t)$ 是输入信号,一般是已知量, $V(t)$ 是目标的输出信号,通常可以进行测量,因此冲击响应 $h(t)$ 是可以求出的。为了具有普遍性,采用拉普拉斯变换,假定 $t < 0$, $u(t) = 0$, 因而有 $t < 0$ 时, $V(t) = 0$, 对(1.2)式进行拉氏变换,则有

$$V(s) = U(s) \cdot H(s) \quad (1.3)$$

其中,

$$V(s) = \int_0^{\infty} V(t)e^{-st}dt \quad (1.4)$$

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt \quad (1.5)$$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st}dt \quad (1.6)$$

$H(s)$ 是目标的传输函数, $s = \sigma + j\omega$,

由(1.3)式有

$$H(s) = V(s)/U(s) \quad (1.7)$$

再进行拉氏逆变换,应有

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} H(s)e^{st}ds \quad (1.8)$$

由(1.7)和(1.8)式可知,只要目标的输入和输出是已知的,目标的冲击响应 $h(t)$ 和输出函数 $H(s)$ 就可以求出。

目标的冲击响应 $h(t)$ 或传输函数 $H(s)$ 可以作为目标自身的特征信息,对于一定的极化方向来说,它们与雷达本身无关。最重要的任务是要把它们和目标的大小、形状等物理特性联系起来。

当 $s = j\omega$ 时, $H(s)$ 就变成 $H(j\omega)$, $H(j\omega)$ 是 $h(t)$ 的富氏变换,通常也称为目标的频率特征。目标的雷达截面积 σ_T 应该正比于功率频率特征,即

$$\sigma_T(\omega) \propto |H(j\omega)|^2 \quad (1.9)$$

通常目标的雷达截面积依频率划分为三个区域,即低频区(瑞利区),谐振区(梅氏区)和高频区(光学区)。

(2) 对应于目标的粗结构来说,可在低频区域加以确定。在低频区域,将 $H(s)$ 在 $s = 0$ 附近,展开为马克劳林级数,即

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots \quad (1.10)$$

$$\text{其中系数 } a_n = 1/n! \cdot d^n H(s)/ds^n|_{s=0} \quad (1.11)$$

根据瑞利散射定律, a_0 和 a_1 应为零,而瑞利系数的 a_2 是与目标的体积成正比的。对(1.6)式两端连续求导 n 次,有

$$d^n H(s)/ds^n = \int_0^{\infty} (-t)^n h(t) e^{-st} dt \quad (1.12)$$

将(1.11)式代入(1.12)式后,应有

$$\int_0^{\infty} t^n h(t) dt = (-1)^n n! a_n \quad (1.13)$$

(1.13)式中的左端即为目标冲击响应 $h(t)$ 的 n 阶原点矩,其中前三个矩最为重要,即

$$\int_0^{\infty} h(t) dt = a_0 = 0 \quad (1.14)$$

$$\int_0^{\infty} t h(t) dt = -a_1 = 0$$

$$\int_0^{\infty} t^2 h(t) dt = 2a_2 \text{——它正比目标的体积。}$$

经过分部积分算法后,这些矩又可写为

$$\int_0^\infty h(t) dt = 0$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty h(t') dt' dt = 0 \quad (1.15)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty h(t'') dt'' dt' dt \text{——正比于目标的体积}$$

上式中，第一个等式表示目标冲击响应与时轴所围净面积为0，第二个等式中的第二个积分 $\int_0^\infty h(t') dt'$ 是目标冲击响应的一次积分，代表目标在单位阶跃输入时的响应，故整个等式代表目标的阶跃响应与时轴所围净面积为0；第三个等式表示目标的冲击响应的两次积分（即单位斜升响应）与时轴所围净面积，它正比于目标的体积，因而第三个积分给出了目标大小的信息。

(3) 为了确定目标的精细结构，即找出目标横截面积的大小，在高频区可将 $H(s)$ 展为 s 的负幂级数，即 $H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^{-n}$ ，其中的各项将对应着 $h(t)$ 中的 δ 脉冲，跃阶、斜升和更低阶的不连续性，例如 $H(s)$ 展开式中的 $b_0 e^{-s\tau}$ 项，则表示 $h(t)$ 在 $t = \tau$ 处 b_0 单位的 δ 脉冲，如展开式中的 $b_n s^{-n} e^{-s\tau}$ 项，意味着冲击响应 $h(t)$ 的 $n-1$ 阶导数在 $t = \tau$ 处必有一个跃阶，其幅值为 b_n 。

例如，在高频区，对于一个全导电的目标来说，应用几何光学近似还可以找到目标形状与冲击响应间的某些更直接的联系。E. M. Kennaugh 和 D. L. Moffatt 证明，目标的冲击响应为

$$h(t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dz^2} A(z)$$

$$z = ct/2 \quad (1.16)$$

图 1-2 给出了示意图。

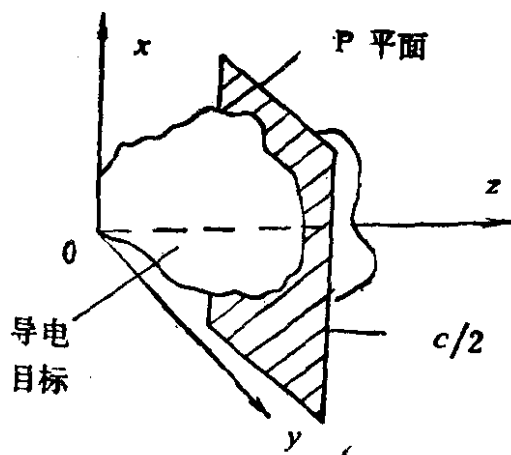


图 1-2 雷达—导电目标的空间关系图

其中 c 为光速, $A(z)$ 为目标的正面在 p 平面上的投影面积, p 是垂直于 z 轴的平面, 并以光速的一半速度沿 z 轴运动。
(1.16)式就是单站共天线, 线性极化雷达这一情况推导出来的, 对 (1.16)式的两端各进行两次积分, 左端即目标在单位斜升输入下的响应—斜升响应, 以 $h_r(t)$ 标明之

$$h_r(t) = (-1/\pi c^2) \cdot A(z), \quad z = ct/2 \quad (1.17)$$

因此, 根据目标的斜升响应的参数可以给出目标的下述信息:

- (a) 斜升响应下的净面积可以代表目标的大小或体积;
- (b) 斜升响应的持续时间可以给出沿雷达视向目标尺寸的上界;
- (c) 斜升响应的绝对峰值幅度可以给出目标的横向尺寸;
- (d) 斜升响应的始点至峰点的距离可以给出沿雷达视向目标尺寸的下界;
- (e) 斜升响应峰点的变化规律可代表目标横截面的变化。

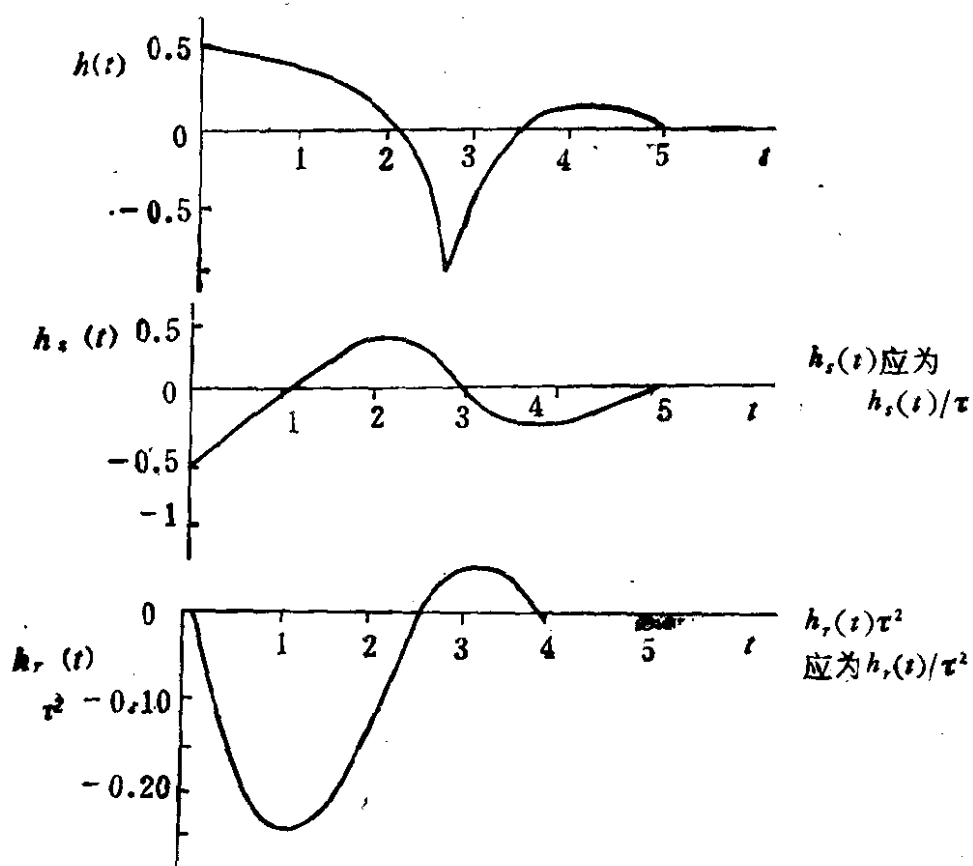


图 1-3 导电圆球的 $h(t)$ 、 $h_s(t)$ 和 $h_r(t)$

以上仅是较为粗略的从物理概念上阐明目标信息和斜升响应之间的关系,在实际计算使用公式(1.16)和(1.17)时,还应做一定的修正。

从以上的叙述中,我们可以看出,目标的斜升响应可以直观反映出被照射目标在某一时刻的横截面积。由于斜升响应 $h_r(t)$ 是冲击响应 $h(t)$ 的二次积分,积分具有平滑作用,所以函数 $h_r(t)$ 比 $h(t)$ 更光滑,更容易被测量和处理,有较大的实用价值。图(1-3)给出了一个导电圆球的冲击响应 $h(t)$,阶跃响应 $h_s(t)$ 和斜升响应 $h_r(t)$,以便对比。

§ 1.3 电磁逆散射及图象重构知识简介

逆散射问题引起我们愈来愈广泛的兴趣。气象学家和生态学家用地面上和卫星上的遥感探测系统来研究大气层时需要解决逆散射的问题;地质工作者应用逆散射理论来研究地下分层的结构和矿藏分布;在雷达技术上利用逆散射来识别目标,此外对等离子体的分析,光纤特性的研究,天线口径的综合等也都需要解决“求逆”的问题。

逆散射所牵涉的内容很宽,本节仅讨论用电磁方法求解逆散射的问题。

1. Bojarski-Lewis 法

Lewis 从物理光学出发,由远场散射数据重建导体。他是基于 Bojarski 的恒等式,将归一化远场相位与距离以及目标的特征标量函数的傅里叶变换联系在一起。在经典的辐射理论中,天线的远区场为天线口径电流分布的傅里叶变换;而在 Bojarski-Lewis 法中,散射场是表征物体形状的“特征标量函数”的傅里叶变换。

图 1-4 表示由左向右传播的平面波投射到一个光滑封闭的凸

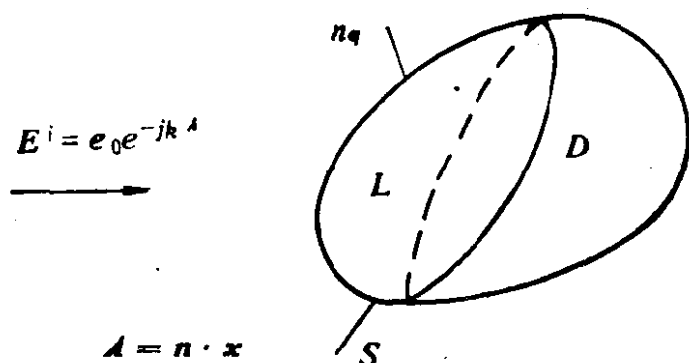


图 1-4 平面波照射物体

导体上。假定被电磁波照射的部分用 L 来表示，阴影部分用 D 表示，当入射平面波的电场为

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{e}_0 \exp(-jk\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.18)$$

式中： $\mathbf{n}$ 为沿平面波传播方向的单位矢量， $\mathbf{x}$ 为空间矢量，则入射波的磁场为

$$\mathbf{H}^i = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_0 \exp(-jk\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.19)$$

电磁波在导体 L 部分表面感应电流 $\mathbf{n}_q \times \mathbf{H} \approx 2\mathbf{n}_q \times \mathbf{H}^i$ ，由此产生于 P 点的散射场为

$$\mathbf{E}^s(P) = \frac{1}{j\omega\epsilon} [\text{grad div} + k^2] \int_L \mathbf{n}_q \times \mathbf{H} \phi(P, q) ds_q \quad (1.20)$$

式中

$$\phi(P, q) = \frac{\exp[-jk|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|]}{4\pi|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|} \quad (1.21)$$

在远区，可以证明

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) \sim \mathbf{A}(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{x}}) \frac{\exp(-jk|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \quad (1.22)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}$ 为 $\mathbf{x}$ 方向的单位矢量。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{x}}) = & \frac{k}{2\pi j} \int_L \{ (\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{n} - (\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_0 \\ & - [\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{e}_0](\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}) - (\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}})] \hat{\mathbf{x}} \} \exp \end{aligned}$$