Stability Theory of Differential Equations

微分方程稳定性理论

林振声 杨信安 编著

by Lin Zhensheng
Yang Xinan

福建科学技术出版社

Stability Theory of

Differential Equations

微分方程稳定性理论

林振声　杨信安　编著

by Lin Zhensheng

Yang Xinan

Fujian Science and Technology Publishing House, Fuzhou, China, 1987

福建科学技术出版社

一九八七·福州

责任编辑：林思明

微分方程稳定性理论
林振声　杨信安编著
·
福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建三明市印刷厂印刷
开本787×1092毫米　1/32　9印张　194千字
1988年1月第1版
1988年1月第1次印刷
印数：1—2,400
ISBN　7—5335—0068—7/O·9
书号：7211·81　　定价：2.15元

序

本书是我们多年来在福州大学对本科生和研究生讲授常微分方程课程的总结。

在选择本书主要材料时，我们试图将五十年代至六十年代关于稳定性理论的研究加以总结。希望这一总结将有助于进一步探讨的读者。

如所周知，李雅普诺夫的经典著作《运动稳定性的一般问题》为微分方程稳定性理论奠定了基础。一百多年来，微分方程稳定性理论已经有很大的发展。值得提出的是，自五十年代至六十年代初，由于许多数学家对李雅普诺夫函数的结构——稳定性问题的逆问题作了大量的研究，大大推动了稳定性理论的发展。除了李雅普诺夫意义下的稳定性以外，还提出了一致稳定、等同渐近稳定、指数型渐近稳定、强稳定关系、弱性关系、外依次数稳定、扰动经常作用下运动的稳定性以及描述解的各种渐近性质的许多概念。这些问题丰富了稳定性研究的内容。

在上述诸问题的研究方法上，虽然原则上仍以"第一次近似理论"和"第二方法"为基础，但作为特征指数理论的发展——一致特征指数和指数型二分法的理论越来越占居重要位置。这些方法和李雅普诺夫函数都有密切的关系。近年来，史金麟、黄元石、张剑峰、林木仁、林小东等人，正是利用这些工具研究概周期微分方程的稳定性、奇异摄动、可约性及局部线性化等问题。

诚然，稳定性及其逆问题的研究成果迄今仍不失为稳定性理论中的重要宝库。

第一章和第二章是导引性的两章，内容包括矩阵论和常微分方程解的存在唯一性定理。其余的部分则分为三章。

第一部分，即第三章，介绍线性系统的基本性质，常系数线性系统解的结构，周期线性系统的 Floquet 理论，可约系统，规则系统及特征指数理论。在讨论常系数线性系统中，扼要地综览了一般性质。

第二部分，即第四章，处理非线性系统。本部分又分为两段落。其一研究在何种干扰下系统非零解的特征指数的稳定性问题；其二则探讨非线性系统与其一阶近似系统的渐近等价问题。

最后一部分，即第五章，集中研究李雅普诺夫第二方法。这一章从李雅普诺夫关于稳定性的古典定理及其应用开始，讨论了稳定性的逆问题，临界情况，指数型二分法及其与李雅普诺夫函数的关系。最后以讨论扰动经常作用下的运动稳定性结束。

本书在总结许多数学家的重要结果时，所引的证明是作者综合几年来的研究手法重新验证的。这样做也便于在总结重要结果的同时，突出研究方法。

史金麟、张剑峰仔细地阅读了本书的初稿，并提出了许多宝贵的意见和建议，谨此致谢。

林振声
杨信安
1987年，福州

JJ1119/109

目　录

第一章　矩阵论概要

微分方程的许多理论用向量和矩阵来描述会显得更简洁、更清晰。为便于读者阅读本书，本章概要地介绍与微分方程有关的矩阵的基本知识。

§1　向量空间

设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个复数，称

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

为**列向量**，而称

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

为**行向量**. 在本书中所称向量一般是指列向量。如果 x 是形如(1.1.1)的向量，相应的行向量记作 $x^*=(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)$。

在(1.1.1)中，x_i（$i=1，2，\cdots，n$）叫做 x 的**第 i 个分量**，n 叫做向量 x 的**维数**，一维向量即为通常的数。

设 x 为(1.1.1)中的向量，$\overline{x_i}$ 为 x_i的共轭复数，称向量

$$\overline{x}=\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$$

为 x 的**共轭向量**。如果 x 的每个分量都是实数，就称 x 为**实向量**。向量 x 的分量通常是某个变量的函数，这种 x 叫做**向量函数**。

设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

定义 $x=y$ 当且仅当 $x_i=y_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix};\tag{1.1.2}$$

$x-y$ 为一向量 z 使 $y+z=x$；又若 λ 为一数量，定义

$$\lambda x=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}.\tag{1.1.3}$$

设 $x^{(1)},\ x^{(2)},\ \cdots,\ x^{(n)}$ 是 n 个 n 维向量，如果存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ 使

$$\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\cdots+\lambda_nx^{(n)}=0,$$

则称 $x^{(1)},\ x^{(2)},\ \cdots,\ x^{(n)}$ **线性相关**；否则称为**线性无关**。

设E是一切向量的集合，在E上定义运算(1.1.2)和(1.1.3)，则E构成一个**向量空间**，E中的向量 x 叫做E的元素，记作 $x\in E$。若E中的元素都是实向量，$\lambda\in R$，则称E为**实向量空间**；若E中的元素都是复向量，$\lambda\in C$，则称E为**复向量空间**。通常用K代表R或C，当E中的向量的每个分量都是

K中的元素，$\lambda\in K$，则称E为**域k上的向量空间**。

设E是向量空间，若存在正整数r，使E含有r个线性无关的向量，而E中任何$r+1$个向量都线性相关，则称E为**r维（有限维）向量空间**，r叫做E的**维数**，记作$r=\dim E$。若E不是有限维向量空间，则称E为**无限维向量空间**。

设E是n维向量空间，$e^{(1)}$，…，$e^{(n)}$为E中n个线性无关的n维向量，则称$e^{(1)}$，…，$e^{(n)}$为E的**基底**。对任何$x\in E$，可唯一地表示为

$$x=\lambda_1e^{(1)}+\lambda_2e^{(2)}+\cdots+\lambda_ne^{(n)}.$$

任何有限维向量空间必有一个基底。

本书用到的向量空间都是有限维向量空间。

设E是域K上的向量空间，对x，$y\in E$，设x_i与y_i分别为x与y的第i个分量（$i=1,2,\cdots,n$），定义映射$E\times E\to K$由$(x,y)\to\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$确定，这时称$\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$为向量x与y的**内积**，记作$\langle x,y\rangle$，即

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}. \qquad (1.1.4)$$

对x，y，z，$w\in E$，$\lambda\in K$，容易验证：

(1) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$；

(2) $\langle x+y,z+w\rangle=\langle x,z\rangle+\langle x,w\rangle+\langle y,z\rangle+\langle y,w\rangle$；

(3) $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$；

(4) $\langle x,\lambda y\rangle=\overline{\lambda}\langle x,y\rangle$。

对x，$y\in E$，若$\langle x,y\rangle=0$，则称x与y**正交**。由(1.1.4)知，$\langle x,x\rangle\geqslant0$；$\langle x,x\rangle=0$当且仅当$x=0$。定义

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \tag{1.1.5}$$

为向量 x 的**范数**．当E是实向量空间时，(E，$\|\cdot\|$)叫做**欧氏空间**．$\|\cdot\|$叫做E的**欧氏范数**；当E是复向量空间时，(E，$\|\cdot\|$)叫做**酉空间**。

对任何 x，y∈E，λ∈K，可以证明：

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）；

$\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$；

$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$（Schwarz不等式）。

设E是有限维向量空间，有时在E上不用范数(1.1.5)，而用

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1.1.6}$$

作为x∈E的范数往往会更方便。这样，在同一个向量空间中会有两个不同的范数。设$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_0$是E中两个不同的范数，定义这两个范数是**等价**的，如果存在 a，b>0，使对一切 x∈E都有

$$a\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_0 .$$

可以验证，由(1.1.5)与(1.1.6)所定义的两个范数是等价的。还可以证明更为一般的结果如下。

定理1.1.1 在有限维向量空间中，任何两个不同的范数彼此等价。

§2 矩阵及其运算

设K为R 或 C，a_{ik}∈K，i=1，2，…，m；k=1，2，…，n 称

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

为域K上的**m行n列矩阵**，简称**$m\times n$矩阵**；a_{ik}叫做A的**元素**，矩阵(1.2.1)也可简写为$A=(a_{ij})$；a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in}叫做A的**第i行元素**；a_{1j}，a_{2j}，…，a_{mj}叫做A的**第j列元素**。

列向量叫做$m\times 1$矩阵，行向量叫做$1\times n$矩阵。在(1.2.1)中，若$m=n$，则称A为**n-方阵**。

设$A=(a_{ij})$是n-方阵，由A的元素所组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做A的行列式，记作$\det A$。

设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，定义

$A=B$，当且仅当$a_{ij}=b_{ij}$，$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$；

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$；

$\lambda A=(\lambda a_{ij})$，$\lambda\in K$。

设A为$m\times k$矩阵，B为$k\times n$矩阵，定义两矩阵的乘积AB为$m\times n$矩阵

$$AB=(C_{ij})$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj},\quad i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n.$$

容易验证，

$$A+B=B+A;$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C;$$
$$A(BC)=(AB)C;$$
$$A(B+C)=AB+AC.$$
值得注意的是，AB有定义，BA未必有定义，即使BA有定义，在一般情况下，$AB \neq BA$。

设A，B都是n-方阵，则
$$\det(AB)=\det A \cdot \det B.$$
n-方阵
$$I=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$
叫做**单位方阵**. 每个元素都是0的 $m\times n$ 矩阵叫做**零矩阵**，也记作0。显然有
$$A+0=0+A=A;$$
$$0A=A0=0.$$
而当A为n-方阵时
$$AI=IA=A.$$
对于n-方阵A，如果存在n-方阵B使
$$AB=BA=I,$$
则称B为A的**逆矩阵**，记作A^{-1}，即$B=A^{-1}$。

设A为n-方阵，如果$\det A\neq 0$，则称A为**非奇异方阵**；否则，称为**奇异方阵**. 当A为奇异方阵时，显然A不存在逆矩阵。当A为非奇异方阵时，方程
$$AB=I$$
等价于n^2个方程

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\delta_{ij},\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \tag{1.2.2}$$

其中$\delta_{ij}=1$，$i=j$；$\delta_{ij}=0$，$i\neq j$。对每个固定的j，(1.2.2)是关于b_{kj}，$k=1, 2, \cdots, n$的线性方程组，其系数的行列式即$\det A$，由于A是非奇异的，故从中可唯一求出b_{1j}，b_{2j}，…，b_{nj}，而$b_{kj}=A_{jk}/\det A$，其中A_{jk}为$\det A$中a_{jk}的代数余子式。当j取值$j=1, 2, \cdots, n$时，即可求出所有的b_{ij}，因此当A非奇异时，必存在逆方阵A^{-1}，而$A^{-1}=(A_{ji})/\det A$，A_{ji}为$\det A$中a_{ji}的代数余子式。

设A_{ij}($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$)与B_{js}($j=1, 2, \cdots, n$；$s=1, 2, \cdots, k$)都是矩阵，则称

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nk}\end{pmatrix}$$

为**分块矩阵**。当$A_{ij}B_{js}$有定义时($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$；$s=1, 2, \cdots, k$)，直接计算可得

$$AB=\left(\sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sj}\right).$$

$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵，

$$\|A\|=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

叫做A的**范数**。

设A，B都是矩阵，x为一向量，$\lambda\in K$，又$A+B$，AB及Ax都有定义，由定义可得

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|,$$

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|;$$

$$\|\lambda A\| \leqslant |\lambda|\,\|A\|;$$
$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|.$$

§3 初等变换与若唐法式

设 $k[x]$ 为以域K中的数为系数的 x 的多项式的全体，因为K对四则运算是封闭的，故当 $f(x)$，$g(x)\in k[x]$ 时，则 $f(x)\pm g(x)$，$g(x)f(x)\in k[x]$。

设 $A(x)$ 表示以 $k(x)$ 中的多项式为元素的矩阵，$A(x)$ 通常叫做**多项式矩阵**。对 $A(x)$ 常须用以下变换：

（Ⅰ） 用K中异于零的元素来乘 $A(x)$ 的某一行（列）；

（Ⅱ） 调换 $A(x)$ 某两行（列）的位置；

（Ⅲ） 加任一行（列）与 $k[x]$ 中的多项式 $f(x)$ 之积到另一行（列）去。

这些变换叫做多项式矩阵的**初等变换**。

初等变换可以用一定的矩阵运算来实现，这也就是初等变换的表现。

（Ⅰ） 用K的元素 $\lambda\neq 0$ 乘 $A(x)$ 的第 i 行，使 $A(x)$ 变成 $B(x)$，这时取

$$R_{ii}(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & & \lambda & & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\text{第 } i \text{ 行} \tag{1.3.1}$$

于是

$$B(x)=R_{ii}(\lambda)A(x).$$

容易看出

$$R_{ii}\left(\frac{1}{\lambda}\right)R_{ii}(\lambda)=I,$$

故

$$A(x)=R_{ii}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B(x).$$

同理，用$\lambda\neq0$，$\lambda\in K$乘$A(x)$的某一列而变成$B(x)$，可表现为

$$B(x)=A(x)R_{ii}(\lambda),$$

$$A(x)=B(x)R_{ii}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

由此可知变换(Ⅰ)具有逆变换.

（Ⅱ） 调换$A(x)$某两行（列）的位置

设$A(x)$为$m\times n$矩阵，调换第i行第j行后变成新的矩阵$B(x)$，这时取

$$P_{ij}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & \cdots & & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ 第i行\\ \\ \\ \\ 第j行\\ \\ \\ \end{array}\qquad(1.3.2)$$

则$B(x)=P_{ij}A(x)$. 直接计算可知，$P_{ij}P_{ij}=I$，即$P_{ij}^{-1}=P_{ij}$.

同理$B(x)=A(x)P_{ij}$为调换$A(x)$中第i列与第j列的位置.

由此可知，变换(Ⅱ)具有逆变换.

（Ⅲ） 对于变换(Ⅲ)取m-方阵