

桩基振动分析与质量监测

柳祖亭 顾利平 编著
骆 英 顾建祖

东南大学出版社

内 容 提 要

本书分为两大部分,第一部分讲述桩基振动的基本原理和方法,包括引言,单自由度振动,多自由度振动,弹性体振动,随机振动及振动测试;第二部分介绍桩基检测的基本方法和质量监督,包括桩的构造和选用,单桩及群桩承载力计算,桩基完整性检测的机械阻抗法和反射波法;国家有关桩基工程的标准、规定、监督检查要求及质量等级评定,并介绍了两个完整的检测、监督工程实例。

本书既有较完整的理论,又注重实用性和可操作性,集理论研究、工程实践和监督管理于一体,适用于土建、交通工程技术人员及质量检测、监督人员参考,亦可作为高等院校学生教材或参考书。

责任编辑:刘柱升

责任校对:刘娟娟 戴坚敏

桩基振动分析与质量监测

柳祖亭 顾利平 编著

骆 英 顾建祖

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编 210018)

江苏省新华书店经销 南京航空航天大学飞达印刷厂印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 19.75 字数 493 千

1995 年 12 月第 1 版 1996 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—3500 册

ISBN 7-81050-101-1/TU·10

定价:24.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

序

随着国民经济持续、快速的发展,工程建设的发展也很迅猛,各种大型建筑,特别是高层建筑越来越多,从而对桩基的使用开拓了广阔的前景,同时桩基的设计、施工及检测技术,也得到了迅速的发展和提高。由于桩基础是隐蔽工程,影响桩基工程质量的因素又是多方面的,即使在某个方面或者某个环节上出现失误和差错,都会造成桩基工程质量事故的发生,致使桩基工程的使用效果受到极大的削弱,严重的甚至会失去其使用价值。因此,桩基工程质量的监督检查和检验测试工作就显得特别重要。

江苏理工大学的柳祖亭副教授、骆英副教授以及镇江市建设工程质量监督站的顾利平工程师等合作编写的这本《桩基振动分析与质量监测》,首先从理论与实践相结合的角度出发,着重阐明了动测法的基础理论,使读者对动测法的理论知识有一个比较全面的了解;接着,该书从实用性出发,以解决实际问题为目的,全面系统地介绍了以检测桩身完整性为主要内容的,也是当前应用较广的几种低应变动测法。另外,该书还简要地介绍了目前迅速发展的和积极推广的高应变动测法。因而该书具有理论性、知识性与实用性相结合的特点。与此同时,该书还叙述了国家对桩基工程质量的检验标准和验收的程序与规定,并介绍了几个完整的检测、监督实例。毫无疑问,该书对于从事桩基工程质量监督检查人员、检验测试人员和一切质量管理人员都是一本不可多得的好书。

江苏省建设委员会为了加强桩基工程质量的监督管理和桩基的检测工作,率先在全省实行桩基工程的强化管理,明确了凡属桩基工程都必须到工程所在地的质监站办理监督手续。建设单位应事先申报试桩施工单位和检测单位。检测单位必须具备一定的资质,所出具的数据具有科学性、公正性、准确性。这些规定,无疑将对保证桩基工程质量具有重要意义。

我相信,对于从事桩基工程的勘察设计、施工、检测、监督管理的有关人员,一定能从本书中吸取有益的营养,为提高桩基工程质量而作出自己的贡献。

岳 凡

1995年7月

目 录

序

前言

第 1 章 机械振动引论	(1)
§ 1—1 机械振动	(1)
§ 1—2 机械振动的分类	(1)
§ 1—3 简谐振动及其表示方法	(3)
§ 1—4 周期振动的谐波分析	(4)
§ 1—5 非周期振动及其频谱分析	(7)
第 2 章 单自由度系统振动	(13)
§ 2—1 概述	(13)
§ 2—2 单自由度系统的无阻尼自由振动	(14)
§ 2—3 单自由度系统固有频率的计算方法	(16)
§ 2—4 单自由度系统有阻尼自由振动	(22)
§ 2—5 单自由度系统受迫振动	(24)
§ 2—6 频率响应函数和脉冲响应函数	(37)
§ 2—7 线性系统在任意激励下的响应	(42)
第 3 章 多自由度系统的振动	(45)
§ 3—1 多自由度系统的运动微分方程	(45)
§ 3—2 固有频率和主振型	(52)
§ 3—3 主坐标和正则坐标	(60)
§ 3—4 固有频率为重根的情况	(67)
§ 3—5 无阻尼系统对初始条件的响应—模态分析法	(69)
§ 3—6 无阻尼系统对外激励的响应—模态分析法	(75)
§ 3—7 多自由度系统的近似解法	(80)
§ 3—8 多自由度系统中的阻尼	(96)
第 4 章 弹性体振动	(101)
§ 4—1 一维波动方程	(101)
§ 4—2 杆(桩)的纵向固有振动	(102)
§ 4—3 杆的纵向强迫振动	(107)
§ 4—4 弹性波在杆(或桩)内的传播	(112)
§ 4—5 端点带有集中质量或弹簧的杆	(114)
§ 4—6 梁的横向振动	(116)
第 5 章 随机振动	(124)
§ 5—1 引言	(124)

§ 5—2	随机过程幅值域统计特性	(126)
§ 5—3	随机过程时差域统计特性	(134)
§ 5—4	随机过程频率域统计特性	(141)
§ 5—5	随机激励与响应间关系	(149)
§ 5—6	功率谱测试简介	(154)
第 6 章	振动测试	(161)
§ 6—1	测振传感器	(161)
§ 6—2	测振放大器	(171)
§ 6—3	滤波器	(173)
§ 6—4	激振器	(177)
§ 6—5	振动基本量及动态特性测试	(178)
§ 6—6	校准	(184)
第 7 章	桩基础设计基本知识	(187)
§ 7—1	桩的类型及其特点	(187)
§ 7—2	桩基的选用	(190)
§ 7—3	桩基构造	(191)
§ 7—4	竖向荷载下的单桩承载力	(193)
§ 7—5	竖向荷载下的群桩承载力	(199)
§ 7—6	承台强度计算	(205)
§ 7—7	桩的水平承载力	(210)
§ 7—8	桩基工程中若干值得重视的问题	(218)
第 8 章	基桩完整性检测的机械阻抗法	(220)
§ 8—1	机械阻抗法的理论基础	(220)
§ 8—2	稳态正弦激励技术在阻抗法中的应用	(227)
§ 8—3	瞬态激励技术在阻抗法中的应用	(229)
§ 8—4	桩身完整性的判别	(230)
§ 8—5	现场测试及实例分析	(231)
第 9 章	基桩完整性检测的弹性反射波法	(231)
§ 9—1	应力波的基本理论	(234)
§ 9—2	弹性波在杆的性质突变处的反射和透射	(238)
§ 9—3	反射波法的诊断原理	(241)
§ 9—4	反射波法检测系统简介	(243)
§ 9—5	用弹性反射波法对桩基的现场检测	(244)
§ 9—6	实测曲线的评判及分析	(246)
§ 9—7	阻抗法与弹性反射波法的比较	(248)
第 10 章	单桩承载能力的检测方法	(249)
§ 10—1	静载试验确定单桩承载能力	(249)
§ 10—2	凯斯波动法	(256)

§ 10—3 CAPWAP C 法简介	(268)
第 11 章 桩基工程质量检验评定	(275)
§ 11—1 分项工程质量检验评定	(275)
§ 11—2 检验评定程序及组织	(278)
§ 11—3 不合格分项工程的处理及处理后质量等级的确定	(280)
第 12 章 桩分项工程的质量检验	(282)
§ 12—1 打(压)桩工程	(282)
§ 12—2 混凝土和钢筋混凝土灌注桩工程	(288)
第 13 章 工程桩完整性检测和质量监督实例分析	(299)
§ 13—1 工程桩完整性检测实例分析	(299)
§ 13—2 桩基质量问题成因剖析	(303)
参考文献	(307)

第 1 章 机械振动引论

§ 1—1 机械振动

所谓机械振动,是指物体或系统在平衡位置附近以某种方式进行的往复运动。它在工程实践和日常生活中是一种常见的现象,例如乐器的振动,车厢的晃动,机床的振动,桩基的振动,甚至桥梁和建筑物的振动等都是机械振动。

机械振动与人们的生产和生活密切相关。在机械和土建工程中,振动往往被认为是有害的,例如它加剧构件的变形和磨损,从而缩短机械和建筑物的寿命,降低机械加工的精度和光洁度,影响设备的动态性能,严重的甚至使结构遭到破坏,如桥梁和水坝的坍毁,飞机和车船的事故等有不少是由于振动引起的。振动引起的噪声还会影响人们的健康。

另一方面,机械振动也经常被人们应用,成为有益的一面,例如,钟表和乐器就是应用了振动原理。在生产实践中也有各种利用振动的机械设备或生产手段,如振动传输机、振动筛、振动研磨、振动沉桩,甚至桩基完整性的检测也是以振动为手段的。随着生产的发展和技术的进步,振动理论的研究和应用会更加深入和广泛,必将会出现更多更好的以机械振动为手段的生产设备、测试仪器和检测方法。

学习研究机械振动的目的就是要掌握机械振动的基本理论及其应用技术,从而能尽量地控制和消除振动带来的危害,更好地利用振动的有利一面,为社会主义建设和实现四个现代化服务。

§ 1—2 机械振动的分类

机械振动是一种特殊的机械运动,是在一定外界条件下发生在物体系统上的运动。这里外界条件就是干扰,而物体系统就是振动系统。振动系统可大可小,在研究和计算振动问题时,需将实际物体或构件抽象简化为力学模型。一个系统发生振动的内部原因就是质量(包括转动惯量)、弹性和阻尼。若质量、弹性、阻尼是由集中参数元件组成的系统,则称为离散系统模型;若质量、弹性、阻尼是连续分布的,则称为连续系统模型。例如,桩基的纵向振动是一连续系统,在一定条件下,可将其简化为离散系统,其中振动质体可视为一质点(质量由桩的质量和部分土的质量构成);弹性元件为设在桩底的一弹簧,弹簧本身质量不计,其弹性力与变形的一次方成正比(称为线性弹簧);阻尼元件为一阻尼器,不计质量,不计弹性,其阻尼与速度的一次方成正比(称为线性阻尼器),见图 1—1。

又如,研究汽车在铅直平面内的振动时,可将车身简化为二个弹簧上的平板,其坐标可用质心的铅直位移 y 和板绕质心的转角 θ 来表示(图 1—2)。

确定一个振动系统空间位置的独立坐标(或参数)的个数称为振动系统的自由度数。桩

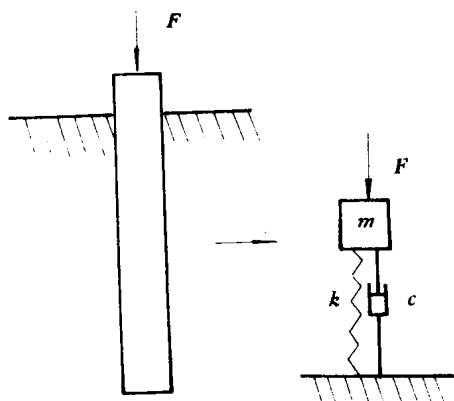


图 1—1 桩基的纵向振动

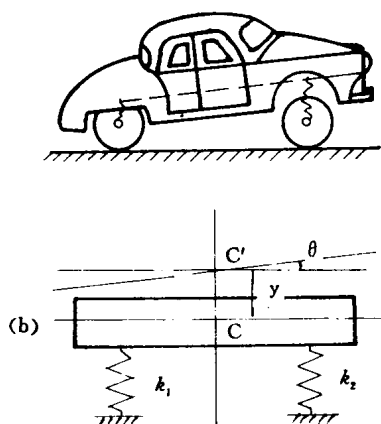


图 1—2 汽车在铅直平面内的振动

基的简化系统为单自由度系统,汽车的简化系统为二个自由度系统,分布参数系统则具有无穷多自由度。

一个振动系统表示激励与响应间关系的微分方程若是线性微分方程,则系统称为线性系统;若微分方程是非线性微分方程,则系统称为非线性系统。当质量一定,弹性力、阻尼力都是线性时,该系统就是线性系统;当弹性力、阻尼力为非线性时,该系统就是非线性系统。

一个系统的质量、刚度、阻尼等参数不随时间变化时,系统称为时不变系统(常参数系统),否则称为时变系统(变参数系统)。实际工程中大量的振动系统可简化为线性时不变系统。图 1—3 为单激励、单输出的线性时不变系统,其激励与输出间的微分方程为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\ & = b_r \frac{d^r x}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} x}{dt^{r-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \end{aligned}$$

其中所有系数都是常数。

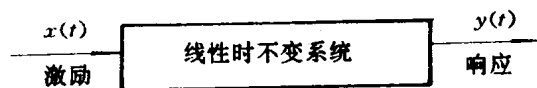


图 1—3 单激励、单输出的线性时不变系统

机械振动可根据不同的特征进行分类。

一、按振动系统的结构参数特性分

1. 线性振动。在确定性激励下线性系统的振动,激励响应间的微分方程是线性的。
2. 非线性振动。在任意激励下非线性系统的振动,此时激励响应间的微分方程是非线性的。

二、按振动的规律分

1. 确定性振动。系统的振动可事先估计,这种振动是有确定的规律的,一个确定性系统受确定性激励时,响应就是确定性的。

2. 随机振动。振动是不可预知的,它不能用时间的确定性函数来表达,只能用统计的方法来研究,例如,汽车在随机路面上行驶时表现出的振动就是随机振动。

三、按振动产生的原因分

1. 自由振动。当系统的平衡被初始扰动破坏后,仅在恢复力作用下的振动。
2. 受迫振动。在外界干扰持续作用下系统产生的振动。
3. 自激振动。激励是受系统本身振动控制的,当存在适当反馈的特性下,系统会自动地激起定幅振动,一旦振动被抑止,激励也随同消失。

四、按系统自由度分

1. 单自由度系统振动。系统的几何位置仅需一个参数就能决定。
2. 多自由度系统振动。系统的几何位置需要多个参数才能决定。
3. 弹性体振动。系统的几何位置需要无穷多个坐标才能决定。

§ 1—3 简谐振动及其表示方法

简谐振动是指物体或系统的振动物理量(位移、速度、加速度等)是时间的正弦(或余弦)函数,这种振动称为简谐振动。简谐振动是一种常见的最简单的振动,但它又是复杂振动的基础。

简谐振动的规律是:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-1)$$

式中 x ——位移;

A ——振幅,表示离开平衡位置的最大距离(见图 1—4);

T ——周期,表示振动一次所需的时间;

ω ——圆频率,表示 2π 秒内振动的次数

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f \quad (1-2)$$

f ——频率,表示 1 秒内振动的次数;

$\omega t + \varphi$ ——相位;

φ ——初相位。

对式(1—1)求导,得速度 v 和加速度 a

$$\left. \begin{aligned} v = \dot{x} &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ a = \ddot{x} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

由上式可见,速度、加速度均为简谐振动,但速度相位超前位移 90° ,加速度相位超前位移 180° 。

简谐振动可用矢量表示。

如图 1—5 所示,一长为 A 的矢量绕其一端 O 以角速度 ω 转动,初位置与水平线夹角为 φ 。则此矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在竖直方向上的投影为

$$(\overrightarrow{OP})_{\text{垂直}} = x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

同样矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在水平方向上的投影为

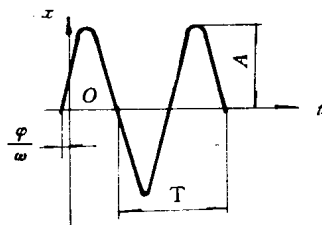


图 1—4 简谐振动

$$(\overrightarrow{OP})_{\text{水平}} = y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

由此可见,任一简谐振动均可用一旋转矢量表示。其角速度即为圆频率,矢量的初始位置与水平线夹角即为初相位 φ ,任一瞬时矢量与水平线夹角为 $\omega t + \varphi$ (相位),故相位角的物理意义在这里是很明显的。

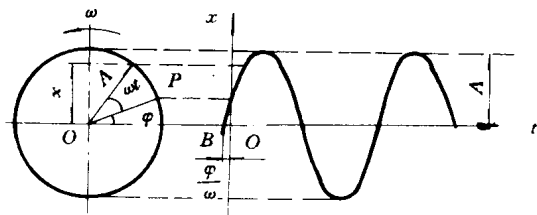


图 1—5 简谐振动的矢量表示法

简谐振动既可用旋转矢量的投影表示,那么此旋转矢量亦可在复平面上表示(见图 1—6),此矢量的大小仍为 A ,角速度仍为 ω ,则矢量 $\overrightarrow{OP}$ 端点的复数 Z 的虚部为

$$\text{Im}Z = A \sin(\omega t + \varphi) = x$$

而

$$Z = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = \bar{A}e^{i\omega t} \quad (1-4)$$

其中, $\bar{A}$ 为复振幅。

$$\bar{A} = Ae^{i\varphi} \quad (1-5)$$

为方便,以后简谐振动亦可直接用复数表示,即

$$x = \bar{A}e^{i\omega t} \quad (1-6)$$

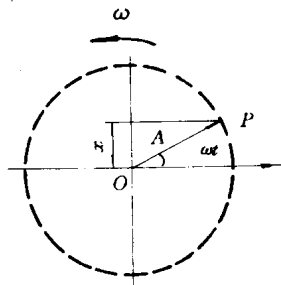


图 1—6 复数旋转矢量

当然,真正的简谐振动应为它的虚部,如不加说明就应这样理解。

同样,速度、加速度也可用复数表示:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= i\omega \bar{A}e^{i\omega t} = \bar{A}\omega e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\ \ddot{x} &= -\omega^2 \bar{A}e^{i\omega t} = \bar{A}\omega^2 e^{i(\omega t + \pi)} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

由上式可见,每求导一次相当于模放大 ω 倍,而幅角增加 90° (每乘以 i 相当于复矢量旋转 90°)。当若干个简谐振动叠加时,用复数表示计算较为简单。

§ 1—4 周期振动的谐波分析

所谓周期振动是指振动物理量是周期变化的,简谐振动即为周期振动的一种。例如:活塞的振动、由活塞式发动机引起的各种交通工具的振动等均是周期振动。

由数学理论可知,一个周期为 T 的周期函数若在区间 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 上连续或有有限个第一类间断点(狄氏条件),则该周期函数可展为傅氏级数:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1-8)$$

其中, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $a_0 = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$; $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T}t dt$; $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T}t dt$ 。在不连续处,级数给出的是 $f(t)$ 的平均值。

由傅氏级数可知,一个周期函数可分解为一系列简谐振动的叠加。 ω_0 称为基频, $n\omega_0$ 称

为 n 阶谐波, 这些谐波在总的振动中所占的成分取决于系数 a_n, b_n , 称它们为傅里叶系数。工程中常画出 a_n, b_n 与谐波频率的关系图形, 称为频谱图(见图 1—7)。

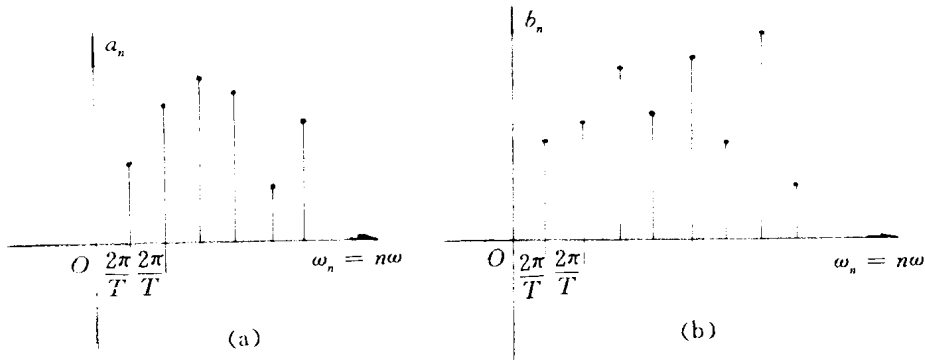


图 1—7 周期函数频谱图

由图 1—7 可见, 周期函数的频谱图是离散的, 离散点间是等间隔的, 且间隔为 $\frac{2\pi}{T} = \omega_0$ 。象以上这种分析称为谐波分析。

利用尤拉公式

$$\cos \omega_n t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t})$$

$$\sin \omega_n t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t})$$

可将傅氏级数改写为复数形式, 即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \quad (1-9)$$

其中, $C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$; $C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$, C_n 称为复傅氏系数。

$$C_n = |C_n| e^{i\varphi_n}$$

$|C_n|$ 为 C_n 的模, φ_n 为 C_n 的幅角, 它们均是 ω_n 的函数。图 1—8 为它们的频谱图。

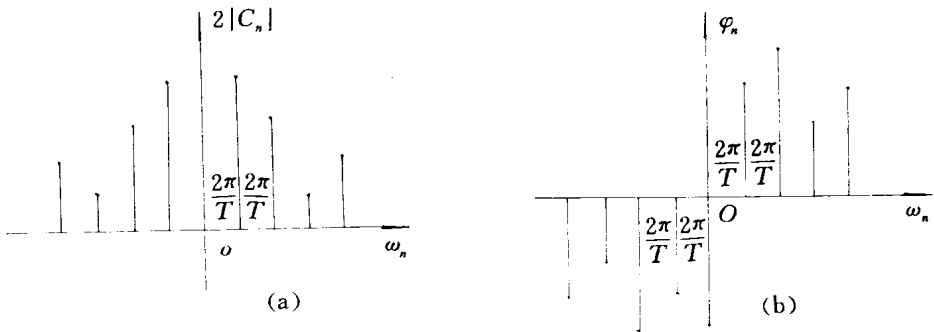


图 1—8 复傅氏系数频谱图

可证明 $|C_n|$ 是 ω_n 的偶函数, φ_n 是 ω_n 的奇函数。

例 1—1 内燃机活塞的运动如图 1—9 所示, 曲柄 OA 以从匀角速绕 O 轴转动, 设 $\overline{OA} = r$, $\overline{AB} = l$ 。取活塞上死点为原点, 作 x 轴, 则

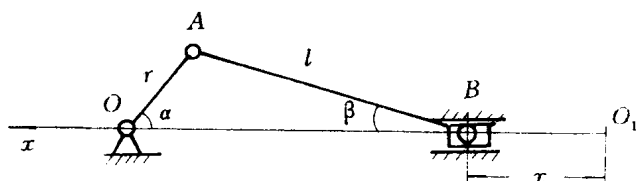


图 1—9 曲柄连杆机构

$$x = (l + r) - (r \cos \alpha + l \cos \beta) = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$$

$$= r(1 - \cos \omega t) + l(1 - \sqrt{1 - (\frac{r}{l})^2 \sin^2 \alpha})$$

当 $\frac{r}{l} = \lambda \leq 1$ 时

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \doteq 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \omega t - \frac{1}{16} \lambda^6 \sin^6 \omega t \dots \quad (1-10)$$

工程中一般 λ 较小, 当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时第三项 $\leq \frac{1}{2048}$, 故一般仅取前二项, 则

$$x(t) \doteq (r + \frac{\lambda^2 l}{4}) - r \cos \omega t + \frac{\lambda^2 l}{4} \cos 2\omega t$$

$$= r(1 - \cos \omega t) + \frac{\lambda^2 l}{4} (1 - \cos 2\omega t)$$

显然, ω 即为基频, 2ω 即为二次谐波, 则

$$a_1 = -r, \quad a_2 = \frac{-\lambda^2 l}{4}$$

工程中的周期振动进行谐波分析时, 一般均取前几项(图 1—10 为仅取前二项的情形)。

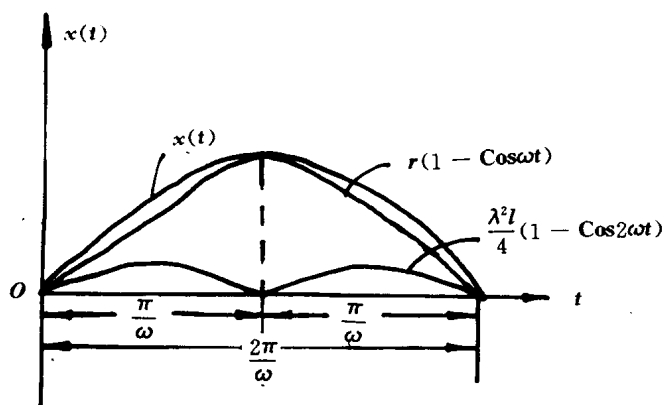


图 1—10 周期振动谐波仅取前二项的情形

例 1—2 一脉冲方波如图 1—11 所示, 设:

$$f(t) = \begin{cases} a & 0 < \omega t < \pi \\ -a & \pi < \omega t < 2\pi \end{cases}$$

试将 $f(t)$ 展为傅氏级数。

解: 先计算系数 a_0, a_n, b_n

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \left[\int_{-\pi/\omega}^0 -a \cos n\omega t dt + \int_0^{\pi/\omega} a \cos n\omega t dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \left[\int_{-\pi/\omega}^0 -a \sin n\omega t dt + \int_0^{\pi/\omega} a \sin n\omega t dt \right]$$

$$= \frac{2a}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4a}{n\pi^2} & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

所以

$$f(t) = \frac{4a}{n\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots)$$

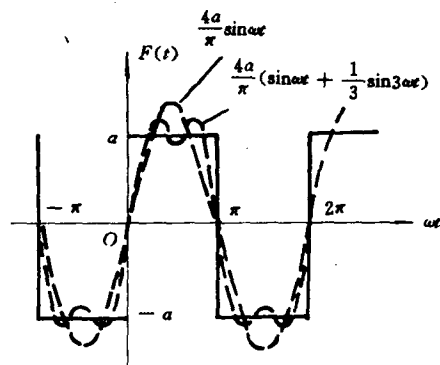


图 1-11 脉冲方波及其谐波

由图 1-11 可见,若只取一次谐波 $\frac{4a}{\pi} \sin \omega t$,则与方波差别较大;当取二次谐波时,则一、二次谐波叠加后与原方波差别较小;随着谐波数的增加,叠加后的波形将愈来愈接近于原波形。事实上,当 $n=5$ 时已经相当接近了。

§ 1-5 非周期振动及其频谱分析

当系统的振动表现为非周期时(仍为确定性),前面的谐波分析已经不适用了,但可用傅氏积分或傅氏变换进行频谱分析。

事实上任一个非周期函数总可以由一个周期函数来逼近,(见图 1-12)

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$$

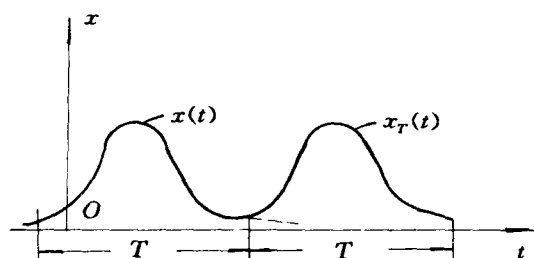


图 1-12 非周期函数可由一周期函数来逼近

则按式(1-5)有

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t}$$

所以

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t}$$

当 n 取整数时, ω_n 对应图上的点均匀地分布在整个数轴上,相邻两点的距离为: $\frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$, 即

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。当 $T \rightarrow \infty$ 时 $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, $\omega_n = n \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega$, $x_T(t) \rightarrow x(t)$ 。所以

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-i\omega_n t} dt \right) e^{i\omega_n t} \Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

上式称为傅氏积分, 当 $x(t)$ 绝对可积时上式存在。其中 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ 与 (1--5) 中的 C 相当, 但由于 $\Delta\omega \rightarrow 0$, 原来的离散频谱成为连续的频谱, 由于它是 ω 的连续函数, 故称为 $x(t)$ 的频谱函数。

例 1-3 设: $x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, α 为常数, 试求其频谱函数。

解: 按定义, 其频谱函数为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} dt \\ &= \frac{\pi}{2(\alpha + i\omega)} = \frac{\alpha - i\omega}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \pi \\ 2|X(\omega)| &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\alpha^2 + \omega^2} \pi \end{aligned}$$

图 1--13 为 $x(t)$ 及其频谱的图形。

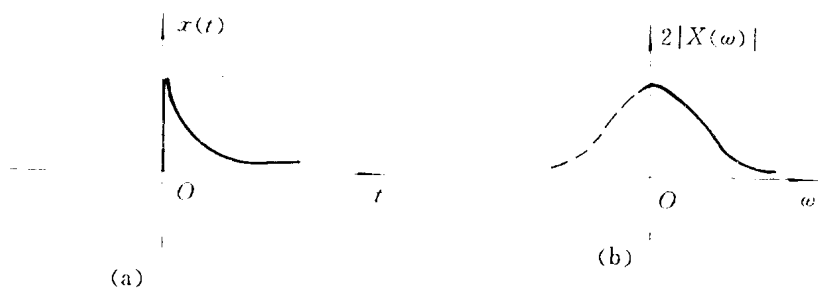


图 1--13 $x(t)$ 函数的频谱图

例 1-4 求矩形脉冲函数的频谱函数(图 1--14)。

$$x(t) = \begin{cases} a & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} a e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{2\pi\omega i} (e^{i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}) = \frac{a \sin \frac{\omega\tau}{2}}{\pi\omega} \end{aligned}$$

图 1--14 为 $x(t)$ 及其频谱图。

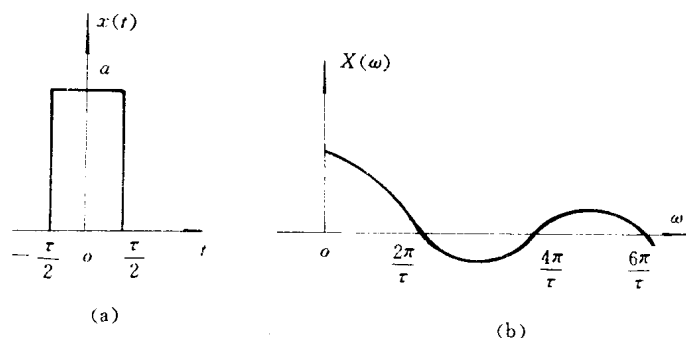


图 1—14 矩形脉冲函数的频谱图

这是一个实函数,显然当脉冲宽度 τ 愈小时,其频谱愈宽,故对脉冲式的激励,其频谱是很宽的,在工程中很有实用价值。例如,在桩基完整性检测中,用得最多的就是锤击信号。为提高激励频率,可用硬质材料,如铝、铁等,由于接触时间短频谱就宽;如欲降低激励频率,可用较软材料,如尼龙、橡胶等,由于接触时间长频谱就窄,从而使高频下降。

非周期函数的频谱反映了它的频率成分,也即从频率域来描述非周期函数的特性。

非周期函数的傅氏积分可改写为傅氏变换,即

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{傅氏正变换}) \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{傅氏逆变换}) \end{aligned} \quad (1-11)$$

$x(t)$ 的傅氏正变换即是 $x(t)$ 的频谱函数,频谱函数的傅氏逆变换又还原为原时域函数 $x(t)$ 。数学上称 $x(t)$ 与 $X(\omega)$ 为傅氏变换对,它们反映了时域函数和频域函数之间的相互转换。实践证明,许多工程问题从频率域来描述非周期函数的特性有时比时域更显著,更突出,因而在工程上的应用极为广泛(即傅氏分析)。

在振动中还常用一种傅氏变换,即

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \end{aligned} \quad (1-12)$$

这里 $\omega=2\pi f$, $X(f)$ 为用 f 表示的傅氏变换。由于

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

所以

$$2\pi X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = X(f) \quad (1-13)$$

说明以频率 f 表示的 $x(t)$ 的傅氏变换等于 2π 倍的以圆频率 ω 表示的傅氏变换。

$x(t)$ 的傅氏变换一般为复数,即

$$X(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \quad (1-14)$$

其中实函数 $A(\omega)$ 为实部, $B(\omega)$ 为虚部,容易证明:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \\ B(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (1-15)$$

当 $X(t)$ 为偶函数时, $B(\omega)=0$, 即 $X(\omega)$ 为实函数。

傅氏变换的性质, 现罗列如下:

(1) 线性

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

(2) 函数曲线下面积

$$x(t) \text{ 曲线下面积} = 2\pi X(0)$$

$$X(\omega) \text{ 曲线下面积} = x(0)$$

(3) 时延性

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

(4) 频移性

$$X(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow x(t)e^{i\omega_0 t}$$

(5) 时间尺度变化

$$x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

(6) 频率尺度变化

$$\frac{x\left(\frac{t}{k}\right)}{|k|} \Leftrightarrow X(k\omega)$$

(7) 微商

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (i\omega)^n X(\omega)$$

$$\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \Leftrightarrow (-it)^n x(t)$$

(8) 卷积

$$X_1(\omega)X_2(\omega) \Leftrightarrow 2\pi x_1(t) * x_2(t)$$

$$[x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau]$$

$$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

$$[X_1(\omega) * X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega)X_2(\omega - \Omega)d\Omega]$$

例 1—5 求单位脉冲函数的傅氏变换。

解:

单位脉冲函数 $\delta(t - t_0)$ 是广义函数, 在物理和振动中都有广泛应用。其定义如下:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1 \quad (1-16)$$

凡满足式(1—16)的函数称为单位脉冲函数或狄拉克函数。

$\delta(t - t_0)$ 函数也可用函数序列的极限来表示:

$$\delta_\epsilon(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & |t - t_0| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t - t_0) = \delta(t - t_0) \quad (1-17)$$

图 1—15a、b 为 $\delta(t)$ 及 $\delta_{\epsilon}(t)$ 的图形。

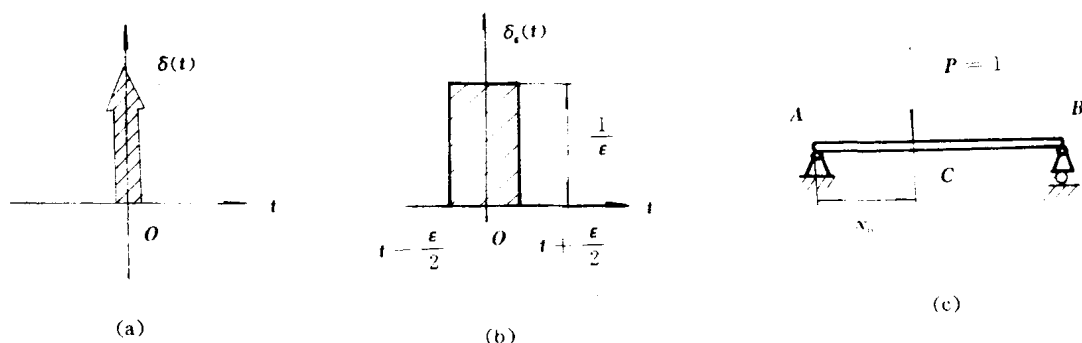


图 1—15 单位脉冲函数的图例

(a) $\delta(t)$ 的图形； (b) $\delta_{\epsilon}(t)$ 的图形； (c) 简支梁 C 点作用单位集中力

工程上常用狄拉克函数表示集中在一点处的密度之类的物理量是很方便的。例如在简支梁 AB 的 C 点上作用有单位集中力 P (见图 1—15c)，则载荷集度

$$q(x) = \delta(x - x_0)$$

即
$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$$

且有
$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \delta(x - x_0) dx = 1$$

$\delta(t)$ 函数有如下性质：

(1) $\delta(t)$ 是偶函数，即

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-18)$$

(2) $\delta(at)$ 有以下关系，(α 为常数)

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|} \quad (1-19)$$

(3) 若 $f(t)$ 为连续函数，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (1-20)$$

证：因

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t - t_0)$$

故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t - t_0) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_{\epsilon}(t - t_0) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(t) \frac{1}{\epsilon} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} f(t_0 + \theta \frac{\epsilon}{2}) \cdot \epsilon \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \theta \frac{\epsilon}{2}) = f(t_0) \quad (\text{根据积分中值定理 } |\theta| < 1) \end{aligned}$$

由傅氏变换定义， $\delta(t)$ 的傅氏变换为

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \quad (1-21)$$