四川省中学生数理化竞赛

数 学 讲 座

（附：参考题及其解答）

下

四 川 省 数 学 会 普 及 组 编
四川省教育局教材编写、教学研究室

四川人民出版社
一九八〇年·成都

四川省中学生数理化竞赛 数学讲座 下

四川人民出版社出版　达县新华印刷厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本850×1168毫米 1/32 印张8.75 字数216千
1980年9月第1版　1980年9月第1次印刷
印数：1—000,000册

书号：13118·45　定价：0.80元

JY11128/26

前　言

遵照中央教育部指示，今年二月，我省开展了中学生数学、物理、化学竞赛活动。有四十名中学生还参加了建国以来举行的第一次全国数学竞赛。

为了适应我省中学生参加全国数学竞赛的需要，我们在四川大学、四川师范学院、成都地质学院、成都师范学校高师班和成都市部分中学的大力支持下，举办了一个短期培训班。在此期间，我们邀请成都地区数学界知名教授和部分中学教师开设讲座，本书就是根据讲座稿修改整理编成的。讲座内容，主要参照《全日制十年制学校数学教学大纲》（试行草案）和《一九七九年高考复习大纲·数学部分》的要求，分成十七个专题。通过这些专题的学习，对中学数学基础知识的巩固和提高，对综合运用分析问题和解决问题能力的培养有一定帮助。

由于讲座内容比较丰富（附有若干练习题与综合参考题和解答），对中学生进一步学习和中学数学教师教学有参考价值，曾受到好评。为此，我们约请讲课教师修改整理，由四川人民出版社出版，以飨读者。

限于水平，书中所讲难免没有缺点、错误，我们殷切欢迎广大读者批评指正。

四川省数学会普及组
四川省教育局教材编写、教学研究室

一九七九年十月

目　次

第十一讲
线 性 规 划

叶乃膺

引 言

十九世纪初叶，就有了线性规划的雏型，当时，Fourier曾提出求解满足线性约束条件的线性目标函数最小值的“粗糙”方法．此后废弛殆百年之久．在第二次世界大战前后，由于生产经济的需要，激励了规划论的发展．

1940年前后，Л·В·Конторович与Frank L·Hitehcock等人对物资调运等问题提出了不同解法，线性规划的研究如雨后春笋，蓬勃发展．

1947年，规划问题的一个基本解法——单纯形法——就提出来了．尽管由于实际问题往往数据浩繁而使单纯形法显得无能为力，但单纯形法由于用它能解决任何线性规划问题，具有普遍性而能广泛应用，因而显示其独特的优越性；尤其是，本世纪六十年代以来电子计算机的迅猛发展，使得它如虎添翼、沛具活力．

诚然，具体问题有相适应的具体解法．如图法、表法简易可行，便于推广．

我国自解放以来，生产突飞猛进，提出了大量问题．就以交通运输而言，如不妥善安排，则纵然车水马龙也无济于事，因而有待解决合理调度、最大限度地运用与节约运力的问题，以济眉

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

燃，迫使我国数学工作者与粮食、煤炭、交通等部门的同志刻苦攻关，作出了卓越的贡献；发展创造了独具特色的方法，解决了图法的理论问题。

1958年以来，更在全国范围掀起了学习推广线性规划的高潮，广泛应用、深入研究，取得辉煌成绩。

当前，在迈步四个现代化的新长征中，规划论在我国必将得到长足的重大发展。

时至今日，规划论已广泛应用于矿业开发、电子线路设计以及用电子计算机实现最优控制等方面；而非线性规划、动态规划、随机规划等，势如破竹，纷纷崛起，规划论的理论与应用方兴未艾，日异月新。

我们在这里，只能对线性规划作一鸟瞰，管窥蠡测，略见一斑；触类旁通，乃寄期望于读者。

（一）图 法

§1 道路无圈

箭头顺道右边勾，
来去抵销好运筹。
岔道归于分岔站，
最优应把对流丢。

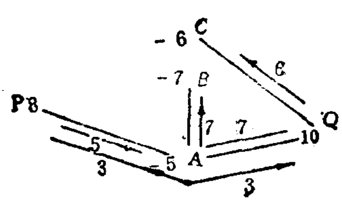

图 11.1

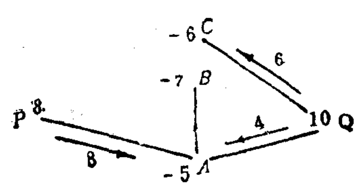

图 11.2

例1 P、Q二站发货量各为8（百吨）、10（百吨），A、B、C三站收货量各为5、7、6（百吨）.（图中用负号表示收货.）

若用箭头表示运输方向、箭旁的数目表示运输量（百吨），为了便于以后的讨论，我们规定"来去靠右走". 把箭头勾画在道路右边.

如图11.1所示的运输方案，从P到A的两个箭头方向一致，随将两个箭旁的数目5与3相加，相当于从P到A运输$5+3=8$（百吨）. 在Q与A间，有从Q到A的7（百吨）与从A到Q的3（百吨），成了对流，可见这方案不是最省运力的（最优）方案，Q与A间运输的实际效果相当于来去抵销：$7-3=4$，即从Q到A的4（百吨）.

AB可看成岔道，B站的收货量7可归并于分岔站A，相当于A站收货量为$5+7=12$（百吨），问题便成了无岔道的$PAQC$.

于是，看各端，邻站先颁. 如图11.2，将P端的发量8供给它的邻站A，将C端的收量6全仰给于邻站Q提供. 于是，Q站还剩4供给A，而A从两方共收的$8+4=12$，留下5以满足A站所需，将其余的$12-5=7$供给B，于是，全盘发收妥善.

这样，一定没有对流出现，即得最优方案.

〔小结〕：道路不兜圈，方法很简单.
看各端，邻站先颁；
保证对流无处见. 最优案，已昭然.
——《唐多令》半阕

§2 道路有圈

丢段破圈方案现，
最优务必验各周.

循行倘有超周半，
轻段挨丢再觅求。

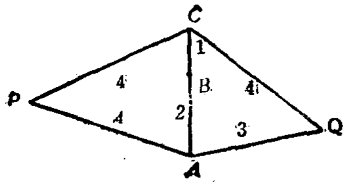

图 11.3

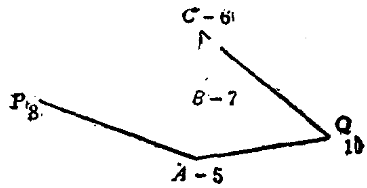

图 11.4

例2 设A、B、C三收点与P、Q二发点间可能的运输路线以及每两点间的里程（百公里）数如图11.3所示，构成三个圈：左圈、右圈及大圈. 实际运输时，无须每段道路都兜过. 譬如丢掉PC不用，则(破了两圈)成为只有一个右圈的路线；再丢一段AB，则（破了最后一圈）成为无圈道路，如图11.4.

设各点的收发量仍如前节例1．于是，“看各端（P、B），邻站（A、C）先颁”，可安排运输方案如图11.5. 又设各段路上每吨公里的运费相同，于是只须看运行的吨公里数的大小即知所花运费的大小。

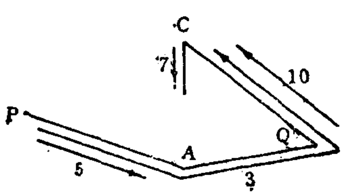

图 11.5

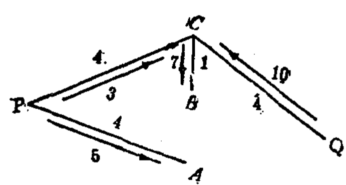

图 11.6

这样安排，虽然已经使发点各尽所能、收点各取所需；但其所花费的总运力（万吨公里数）

$$8\times4+3\times3+13\times4+7\times1=100$$

是否最小呢？即这安排是不是最优方案呢？还得看运行是否没有

迂迴？

从大圈看，有3（百吨）货依逆时针向沿$PAQC$循行，由于所经里程（百公里数）$4+3+4$超过大圈的半周长（$4+3+4>4=PC$），故知不如将这3（百吨）货直接由P运到C更节省运力。由此可见，倘若依同一转向沿PA、AQ、QC三段循行的里程超过全周之半，则应改丢这三段中运量最小的那段AQ，而恢复原先被摈弃的那段PC，即重新启用PC。

于是，从新觅得较优方案如图11.6，所花总运力减少成

$$5\times4+10\times4+3\times4+7\times1=79.$$

再从大圈看，依逆时针向沿PA与QC两段循行的里程$4+4>4+3$，仍然超过半周，故应将“轻段”PA摈丢（而重行启用上次被丢段AQ），再行安排如图11.7，所费总运力更减少成

$$8\times4+5\times4+5\times3+7\times1=74.$$

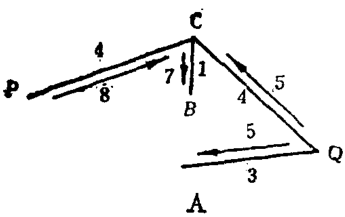

图 11.7

图11.7所示的调运方案还有没有迂迴呢？

从大圈看，QC与$PC+QA$都$<\frac{\text{大圈周长}}{2}$，从左圈看，$PC+CB=4+1<\frac{\text{左圈长}}{2}$，从右圈看，$QA=3<\frac{\text{右圈长}}{2}$，$QC+CB=4+1=\frac{\text{右圈长}}{2}$.

可见，图11.7所示方案，各圈检验，循行概不超周半，即都无迂迴之可言。这就表明它是最优方案，所花总运力74万吨公里为最小值。

（二）表　法

§3　方程列表按题寻

例3　如图11.3所示，将P、Q的发量写在最后一列，将A、B、C的收量写在最后一行；将从各发点到各收点的最短路程填在表中相应各格〔若各段路上每吨公里的运费相同，则表中所填即为每百吨运行百公里的运价（百元）〕，便得列表如下：

收点 单位运价 发点	A	B	C	发　量
P	4	5	4	8
Q	3	5	4	10
收量	5	7	6	8+10=18 5+7+6=18

设由P与Q到A、B、C的运量各为x、y、z与u、v、w，则应满足的约束条件是：

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ u+v+w=10; \\ x+u=5, \\ y+v=7, \\ z+w=6. \end{cases}$$

（这里$8+10=5+7+6$ 表示产销平衡）

而本题乃求各运量x、…、w，使目标函数

$$4x+5y+4z+3u+5v+4w$$

（在本题中乃总运力）为最小。

§ 4　最小元法始案成

		B	C	发量
P		5	4	8
Q	5	5	4	10−5 = 5
收量	5	7	6	

		B		发量
P		5_2	6	8−6=2
Q	5	5_5		10−5=5
收量	5	7	6	

前表运价最廉的（最小元）为3，在(Q、A)处，尽量由Q供足A，得$u=5$，既然A已由Q供足、不再需P供给，故$x=0$。以小字将运量5填入(Q、A)格内（运量为0的可不填）。于是，问题变成Q的发量为剩余的5，而收点A所在的列（竖行）可划掉，只有B、C二收点还需考虑。所余运价表的四格中最小元为4，可看成在（P、C）处（也可看成在(Q、C)处），尽量由P供足C，得$z=6$，$w=0$，于是，又可将C所在的列划掉。最后，只余一个收点B，而P、Q的发量各为2与5，恰好全供给B而B的收量7得以满足，故得$y=2$，$v=5$。

将各格运量与运价之乘积相加，即得总运力（费）为

$$5\times3+6\times4+2\times5+5\times5=74.$$

碰巧得到总运力的最小值（见§2末），可见：

$$(x, y, z; u, v, w)=(0, 2, 6; 5, 5, 0)$$

就是最优方案。*

最小元法〔小结〕：运费表中运价填，
最廉尽量取供完，
完成一线丢一线，
越划表中越简单。

* $(x, y, z; u, v, w)=(0, 8-a, a; 5, a-1, 6-a)$也是最优方案，式中的a可取满足$1\leq a\leq6$的任一值。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例4　P、Q发量，A、B、C收量，以及每两发收点间单位运价如下表：

收点收量 / 单位运价 / 发点发量	$A_{4-1=3}$	$\cancel{B_3}$	C_6
P_9	10_3	7	4_6
$\cancel{Q_{4-3=1}}$	2_1	1_3	9

则用最小元法安排方案如下：

先看运价最廉的为1，在（Q，B）处，尽量让B由Q取足3，于是Q还剩$4-3=1$，划去B列；在所余两列中运价最廉的为2，在（Q，A）处，尽量将Q所剩的1全供给A，于是A还需收$4-1=3$，划去Q行，这时只有一行P、发量为9，有A、C二收点各需收3、6，可见，划去划来便显然：将P的9，以3供A、以6供C。于是，供完收足，得到方案如表中小字所示，总运力为

$$10\times 3+4\times 6+2\times 1+1\times 3=59.$$

这就不是最优方案，在下节中我们看到以它作为初始方案，进行调整后还可使总运力变小。

§5　对角价廉添运量　斜和大者应拨匀——见方调优法

设P、Q到A、B的单位运价a、b、c、d如下表所列，下附小字表示运量。则下二表所示两种方案的总运力各为

	A	B
P	$a_{\alpha+\beta}$	b_δ
Q	c_γ	$d_{\bar{\alpha}}$

	A	B
P	a_β	$b_{\delta+\alpha}$
Q	$c_{\gamma+\bar{\alpha}}$	d

$$a(\alpha+\beta)+d\alpha+c\gamma+b\delta \quad 与 \quad a\beta+c(\gamma+\alpha)+b(\delta+\alpha),$$

可见，将左方案调整成右方案后，总运力所减少的为前者减去后者，即

$$a\alpha+d\alpha-c\alpha-b\alpha=\{(a+d)-(c+b)\}\alpha.$$

故知：当$\alpha>0$时，若$a+d>c+b$，则这样调整后，总运力确实减少了；若$a+d=c+b$，则调整与否，总运力不变。

这样调整不致改变各点的收发量（此乃显而易见）。

由此可见，以运价表中每见方的四格来看，若对角二格都有非零运量，而这二格单价之和大于另对角二格单价之和时，宜将大和的二运量中以尽可能大的相等运量匀给另对角二格。

如前节最后例4中的前两列

$$\begin{array}{cc} 10_3 & 7 \\ 2_1 & 1_3 \end{array} \quad 应调整成 \quad \begin{array}{cc} 10 & 7_3 \\ 2_4 & 1 \end{array}$$

于是，这部分运力由$10\times3+1\times3+2\times1=35$变成了$2\times4+7\times3=29$，确实变小了。

再看调整后的方案

	A_4	B_3	C_6
P_9	10	7_3	4_6
Q_4	2_4	1	9

中，见方的 $\boxed{\begin{array}{cc} 10 & 4_6 \\ 2_4 & 9 \end{array}}$ 中$2+4<10+9$，可见，再也设有能调整的了。

前已看出：若$a+d=c+b$，即“斜和如遇双方等”，则调与不调、运力都一样。但若不止两个收点与两个发点则调整后单价表中其它见方的可能出现某对角斜和更昂，那就还须对这见方的进行调整，直到无处可调整时为止，通常就是最优方案了。

例5 如

	A	B	C	发量
P	7	6_8	6	8
Q	4_5	3_4	6	9
R	8	8	9_5	5
收量	5	12	5	

其中，P、Q与A、B的见方单价斜和相等，即$7+3=4+6$，调整成$\begin{matrix} 7_5 & 6_3 \\ 4 & 3_9 \end{matrix}$后，运力虽不变，

但全表的四角成了$\begin{pmatrix} 7_5 & 6 \\ 8 & 9_5 \end{pmatrix}$，

这里$7+9>8+6$，故还应调整成$\begin{pmatrix} 7 & 6_5 \\ 8_5 & 9 \end{pmatrix}$。

见方调优法〔小结〕：二收二发价见方，如果斜和某对昂，
宜取这双同运量，匀给别对更相当。
斜和若遇双方等，要否再调验别方。
调到无法调下去，通常此乃最优良。

§6 对角线法

如例4的单位运价表

	A	B	C	产量
P	10	7	4	9
Q	2	1	9	4
需要量	4	3	6	

每取二收点与二发点四格见方的单位运价来看，都满足：

左上与右下之和≥左下与右上之和，

如　$10+1>2+7$，　$7+9>1+4$，　$10+9>2+4$

（第三式可由前二式导出）

在这样的前提下，可凭图解法来求最优方案，即用对角线法，这是最便宜的方法。

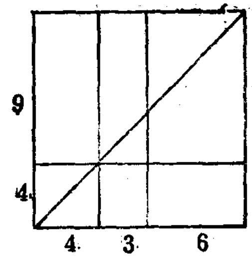

图 11.8

照表右列各发点的产量作为高、以表下行各收点的需要量作为底的矩形（本题共六个）垒砌满了一个正方形如图11.8，于是这正方形的左下角与右上角所联斜线（对角线）在各个矩形区域内的部分在边上的投影即为所求最优方案中在各格相应收发点间的运量。本题得

	A	B	C
P		3	6
Q	4		

相仿地，如果运价表中每取四格见方的来看，都满足

左下与右上和≥左上与右下和，则产量作高、需作底的矩形所充满的正方形，其左上角与右下角所联对角线在各矩形区域内的部分在边上的投影即为所求相应于各区的收发点间的运量。

对角线法〔小结〕：某向斜和总不低，每方遵守不违离，*
最优方案凭图解，对角线法最便宜。

产量作高、需作底，矩形区划正方弥，
正方另向联斜线，投影区边即所希。

---

* 例如三个发点P、Q、R与两个收点A、B间的单位运价表如左，

	A	B
P	1	7
Q	9	4
R	2	10

其中 1+4<9+7，但9+10>2+4，故不遵守“某向斜和总不低”；如果调整成右表，则见方都不违背“左上+右下≥左下+右上”了，于是可用对角线法，引左下至右上的对角线，看它在各矩形区边的投影即得最优方案运量。

	A	B
Q	9	4
P	1	7
R	2	10

§7 “产地”凭添或“库”存　产销不等化平衡

以上问题的产量与销量（发量与收量）彼此相等，即产销平衡。但实际往往会遇到产销不等的情况。

如果供过于求，产量大于销量，则为了避免滞销，自然考虑要将盈余产品就哪些产地存库，库存多少、才能使总运力最省？

为此，只须与各实际收点并列、凭添“库”栏，把它设想成不用调运的一个“收点”，因此，“库”列运价为零，其库存（收）量等于盈余的产量。这样一来，就化成了产销平衡的问题而可用表法来解决了。——但须注意：为了保障供应，在用最小元法求初始方案时，应在各实际收点中去看运价最廉的。等到各实际收点都已供足后，才将盈产就产地存库，其次，再看能否调整以使总运力减少。

例6　如果例4的单位运价不变，P、Q 的产量也不变，而 A、B、C的需要量各为2、3、5（百吨），则应如何调动以供足A、B、C的需要，而盈余的产品又应如何存库，才使总运力最省？

解　库存（收）量＝盈余产量＝$(9+4)-(2+3+5)=3$。

依次按下各表找出初始方案：

单位运价 销地 / 产地	A	B	库	C	产　量
P	10	7	0	4	9
Q	2	13	0	9	4
销　量	2	3	3	5	13

（续）

P	10	0	4	9
Q	2_1	0	9	$4-3=1$
销　量	2	3	5	10
P	10	0	4_5	9
销　量	$2-1=1$	3	5	9
P	10_1	0_3		$9-5=4$
销　量	1	3		4

得初始方案为

	A	B	库	C	产　量
P	10_1	7	0_3	4_5	9
Q	2_1	1_3	0	9	4
销　量	2	3	3	5	13

检查见方有没有单价斜和更昂贵而运量都非零的对顶，如果有，就这双以同运量匀给别对更优良．于是，因 $10+1>2+7$，故应调整成

	A	B	库	C	产　量
P	10	7_1	0_3	4_5	9
Q	2_2	1_2	0	9	4
销　量	2	3	3	5	13

其中每方对顶运量都非零的单价之和都更廉，如$2+7<10+1$，$1+0<7+0$，（从而 $2+0<10+0$，）又 $1+4<7+9$，（从而 $2+4<10+9$）等，可见，用见方调优法再也无处能调

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com