

高等学校试用教材

数学物理方程

陈庆益 编

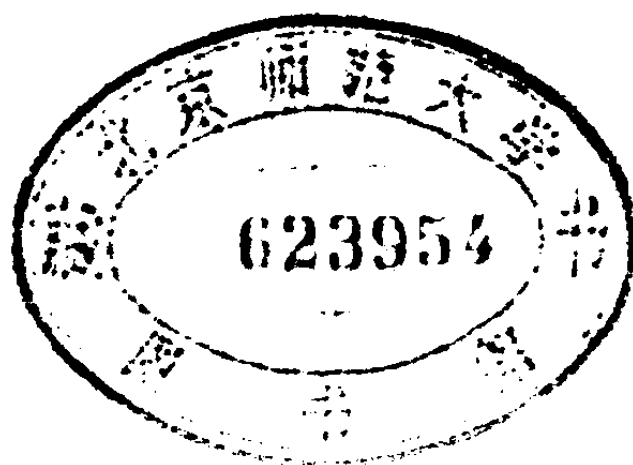
人民教育出版社

高等学校试用教材

数学物理方程

陈庆益

JY11/95/22



人民教育出版社

几点说明

1. 为了适应较广泛的需要,本书选编的材料涉及的面较广,所以讲授的内容可由教师根据学时情况自行安排。

2. 由于数学物理方程一课不是基础课,有的学校甚至只作为选修课,所以本书的内容并非全部必修。学生不要认为全书所有章节都不能删减。

3. 本书前三章虽是基础部分,但个别的节和段仍然可以不讲。总之,教师可按照专业的需要进行取舍。

4. 各章末所列文献,只供必要时作进一步的参考,不可能在教学的同时都逐篇加以查阅。学生必须理解这一点。

5. 书中在援引前面的结论和公式时,采用通用的记法,例如,第三章第二节第一段记作 3.2.1,第二章第一节公式(5)记作 2.1.(5)。

6. 本书编排体系是初次的尝试,未经教学实践的检验,因此问题和错误必然不少,请教师和学生提出批评意见。

陈庆益

1978年11月

兰州大学

高等学校试用教材

数学物理方程

陈庆益

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

安徽新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 151,000

1979年1月第1版 1979年6月第1次印刷

印数 00,001—80,000

书号 13012·0326 定价 0.47元

目 录

第一章 定解问题的引出	1
第一节 变分问题	1
1. 单重积分情形	1
2. 多重积分情形	5
3. 变分原理	8
习 题	10
第二节 波动方程和位势方程	10
1. 均匀弦的横振动	10
2. 均匀膜的横振动	12
3. 膜的平衡方程	14
习 题	15
第三节 扩散方程和 Schrödinger 方程	16
1. 扩散方程	16
2. Schrödinger 方程	17
习 题	18
第四节 适定性概念	18
1. 定解问题小结	18
2. 定解问题的适定性概念	20
注释与文献	21
第二章 常用解法	23
第一节 位势方程的边值问题	23
1. 视察法	23
2. 复变数函数法	27
习 题	31
第二节 波动方程的初值问题	32
1. 弦振动方程情形	32
2. 波的传播	34
3. 高维波动方程情形	36
4. Huygens 原理	41

习 题	43
第三节 有界弦的振动	43
1. 分离变量法	43
2. 解的物理意义	49
3. 均匀弦的受迫振动	50
4. 边界条件的齐次化	51
习 题	54
第四节 分离变量法的进一步应用	54
1. 热传导方程的混合问题	54
2. 矩形膜的横振动	57
3. 圆膜的横振动	59
4. Schrödinger 方程	61
习 题	63
第五节 热传导方程的初值问题	64
1. Fourier 变换	64
2. 初值问题及解的验证	68
习 题	71
注释与文献	72
第三章 分类和适定性讨论	73
第一节 方程的分类和化简	73
1. 二阶方程的分类	73
2. 二维情形的化简	76
习 题	82
第二节 波动方程和能量积分	83
1. 混合问题情形	83
2. 初值问题情形	86
习 题	89
第三节 调和方程和极值原理	90
1. Green 公式	90
2. 极值原理	92
3. 唯一性和稳定性	95
习 题	100
第四节 热传导方程和极值原理	100

1. 极值原理	100
2. 初值问题情形	103
习 题	105
第五节 典型方程总结	106
1. 数学物理方程的特点	106
2. 典型方程的共性	107
3. 典型方程的个性	108
4. 适定性问题讨论	110
习 题	113
注释与文献	114
第四章 广函与基本解	116
第一节 广函的基本运算	116
1. δ 函数与广函的定义	116
2. 广函的基本运算	119
第二节 广函的 Fourier 变换	122
1. 试验函数的 Fourier 变换	122
2. 广函的 Fourier 变换	125
习 题	128
第三节 基本解	129
1. 方程和初值问题情形	129
2. 第一边值问题情形	131
习 题	135
第四节 基本解的存在问题	136
1. 常系数情形	136
2. 变系数情形	138
习 题	142
注释与文献	142
第五章 变系数方程	145
第一节 椭圆型方程	145
1. 广义 Green 公式	145
2. 边值问题和 Green 函数	147
习 题	149
第二节 双曲型方程	149

1. Goursat 问题	149
2. 广义初值问题	152
习 题	156
第三节 抛物型方程	156
1. 唯一性问题	156
2. 广义 Green 公式	158
习 题	160
注释与文献	160
第六章 非线性方程	161
第一节 拟线性双曲组	161
1. 运动波	161
2. 双曲组	163
3. 间断初值问题	167
4. 混合问题	172
习 题	173
第二节 孤波	174
1. KdV 方程	174
2. 孤波间的相互作用	177
3. 立方 Schrödinger 方程	178
习 题	179
注释与文献	180
第七章 数值方法	181
第一节 有限差分法	181
1. 调和方程的第一内边值问题	181
2. 混合问题情形	185
第二节 有限元素法	187
1. Dirichlet 原理	187
2. 计算格式	189
习 题	194
注释与文献	195

第一章 定解问题的引出

本章集中引出以后几章所要讨论的一些主要定解问题。鉴于变分问题的重要性，所以统一用变分方法导出它们。

第一节 变分问题

1. 单重积分情形

下面介绍著名的捷线问题。考虑质点在重力作用下沿铅垂平面 $x-y$ 上某光滑曲线 $y=y(x)$ 由定点 $A(a, c)$ 到定点 $B(b, d)$ 的无摩擦下滑运动，这里取重力方向为 y 轴正向，且 $b>a$, $d>c$ (参看图 1.1)。问题在于寻求一条曲线 $y=y(x)$ ，使质点沿此曲线由 A 到 B 所需的时间最短。

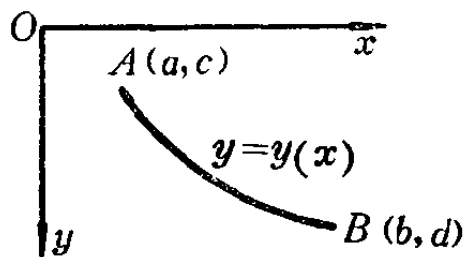


图 1.1

为了写出这个极值问题的数学表示，注意在无摩擦情况下质点的下落速率 v 正比例于下落高度 $y-c$ 的平方根：

$$v = \sqrt{2g(y-c)}$$

g 为重力加速度值。故质点沿曲线 $y=y(x)$ 由 A 到 B 所需的时间 T 为：

$$T = \int_a^b \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2(x)} / \sqrt{y(x)-c} \right) dx$$

问题是寻求过定点 A 和 B 的曲线 $y=y(x)$ ，使 T 取极小值。

这种极值问题称为**变分问题**。它有如下的特点：所求极值不

是函数的极值,而是定积分的极值. 这个定积分随着函数 $y=y(x)$ 的选择而取不同的值. 一般,称随给定函数取确定值的对应关系为泛函. 上面的定积分 T 就是一个泛函. 变分问题就是泛函的极值问题.

正如函数的极值乃在极值点的邻域中考虑一样,泛函的极值也是相对于某函数的邻域而言. 至于什么是函数的邻域,下面就要讲到.

大家还知道,函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的极值点 $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ 所应具备的必要条件是,它满足方程组:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0, \quad i=1, \dots, n$$

或者说, f 的一阶微分在此点为0:

$$df=0$$

现在寻求变分问题类似的必要条件. 为此考虑泛函

$$J = \int_a^b f(x, y, y') dx \equiv J(y) \quad (1)$$

这里 f 为 x, y, y' 的已知函数. 关于 $y=y(x)$,为简单起见,要求它及其一阶导数都在 $[a, b]$ 上连续,且 $y(a)=c, y(b)=d$,即它所代表的曲线过某二固定点 $A(a, c), B(b, d)$. 现在定义具备上述性质的某曲线 $y=\xi(x)$ 的一阶 ε 邻域如下. 对某 $\varepsilon>0$,若具备上述性质的曲线 $y=y(x)$ 满足条件:

$$|y(x) - \xi(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x) - \xi'(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]$$

则称 $y(x)$ 属于 $\xi(x)$ 的一阶 ε 邻域. 有了邻域概念,就可定义泛函 J 的局部极值. 若对某 $y=\xi(x)$ 及某一阶 ε 邻域中所有的 $y=y(x)$ 都使

$$J(\xi) \leq J(y)$$

则称 $y=\xi(x)$ 使 J 取到(局部)极小值,而称 $y=\xi(x)$ 为极小曲线. 类似地可定义 J 的极大值和极大曲线. 极大和极小值统称为极值;

极大和极小曲线统称为极值线或极值函数.

为引出极值线所应满足的必要条件,先证明下面的引理.

基本引理 设函数 $\eta(x)$ 及其一阶导数都在 $[a, b]$ 上连续, 且在两个端点为零: $\eta(a) = \eta(b) = 0$. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且对所有具上述性质的 $\eta(x)$ 使

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0$$

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒等于零.

证明 用反证法. 设在 $[a, b]$ 上某点 ξ 有 $f(\xi) \neq 0$, 不妨设 $f(\xi) > 0$. 由 f 的连续性知在 ξ 的某闭邻域 $[c, d]$ 上仍有 $f > 0$, 这里 $[c, d]$ 为 $[a, b]$ 的子区间. 特别取

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c \\ (x-c)^2(x-d)^2, & \text{当 } c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \leq b \end{cases}$$

这个 $\eta(x)$ 显然具备引理所述要求. 但对这个 η 却有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_c^d f(x)(x-c)^2(x-d)^2dx > 0$$

而与假设不符. 故 f 应在 $[a, b]$ 上处处为零.

现在应用基本引理导出极值线所应满足的必要条件. 设 $y = y(x)$ 使(1)取极值. 先对具引理所述性质的某 $\eta(x)$ 及固定的 $\varepsilon > 0$, 取 α 的绝对值充分小, 可使 $y + \alpha\eta$ 属于 y 的一阶 ε 邻域. 因 y, η, ε 都固定, (1)是参数 α 的函数:

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')dx$$

这个函数当 $\alpha = 0$ 时取极值, 故应有:

$$J'(0) = \int_a^b [f_y(x, y, y')\eta(x) + f_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]dx = 0$$

对第二项作分部积分得:

$$J'(0) = f_y \eta \Big|_a^b + \int_a^b \eta(x) \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] dx = 0$$

因 $\eta(a) = \eta(b) = 0$, 得:

$$J'(0) = \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \eta(x) dx = 0$$

现在取 η 为具引理所述性质的任一函数, 并要求 y 和 f 使上式方括号内的函数在 $[a, b]$ 上连续, 则由基本引理知应有:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \quad (2)$$

或计算出导数后得:

$$f_{y'y} y'' + f_{y'y'} y' + f_{xy'} - f_y = 0 \quad (2')$$

由(2')知应要求 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次连续可微, 且 f 关于其变元有相应的一阶和二阶的连续偏导数.

以后一般地用 $C^k(G)$ 记域 G 中 k 次连续可微函数的集合. 例如, (2)式要求 $y \in C^2[a, b]$.

方程(2)是极值函数 $y = y(x)$ 所应满足的常微分方程. 由于相应曲线应过点 A 和 B , 故对(2)须附加边界条件:

$$y(a) = c, \quad y(b) = d \quad (3)$$

方程(2)通称为(1)的 Euler 方程. 它只是(1)的极值线所应满足的必要条件. 由(2)和(3)求出的积分曲线不一定使(1)取到极值. 但对于许多实际问题, 由(2)和(3)确定的函数 $y(x)$ 常就是(1)的极值函数. 所以这里只限于导出方程(2), 而不作有关充分性问题的复杂讨论.

通常称 $\delta y \equiv \alpha \eta(x)$ 为函数 y 的一阶变分, 称

$$\delta J \equiv J'(0) \alpha = [f_{y'} \delta y]_a^b + \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) \delta y dx \quad (4)$$

为泛函 J 的一阶变分. 类似于函数的一阶微分在极值点应为零, 泛函的一阶变分对极值函数也为零.

对含多个函数或高阶导数的情形, 讨论完全类似. 例如对泛函

$$J = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx \quad (5)$$

设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 使它取到极值. 在相应的一阶 ε 邻域中取

$$y(x) + \alpha \eta(x), \quad z(x) + \beta \xi(x)$$

这里 α, β 为绝对值充分小的参数, η 和 ξ 具基本引理所述性质. 仿上讨论, 对 α, β 的函数 $J(\alpha, \beta)$ 可得必要条件:

$$\begin{cases} J_\alpha(0, 0) = \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) \eta(x) dx = 0, \\ J_\beta(0, 0) = \int_a^b \left(f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) \xi(x) dx = 0 \end{cases}$$

应用基本引理, 即得(5)的 Euler 方程组为:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, \quad f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0 \quad (6)$$

此外, 还须附加边界条件, 例如:

$$y(a) = c, \quad y(b) = d; \quad z(a) = f, \quad z(b) = g \quad (7)$$

同样, 对含高阶导数的泛函

$$J = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \quad (8)$$

可得相应的 Euler 方程为:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0 \quad (9)$$

这是 $2n$ 阶的常微分方程, 须附加 $2n$ 个边界条件.

2. 多重积分情形

考虑多个自变量的变分问题, 而以二重积分为例:

$$J = \iint_G f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \quad (10)$$

这里 G 为 $x-y$ 平面上的某给定域; f 为已知函数, 关于其所有变元

二次连续可微；并要求 $u \in C^2(G)$ ，且当点 $(x, y) \in G$ 趋近 G 的边界 ∂G 时， u 连续地取得给定的边值。为了说话方便，称这种 u 为容许函数。可注意，和单重积分情形一样，就泛函 J 本身的极值问题来说，最多只要求函数 u 分片光滑，但为了引出 Euler 方程，对 u 的要求就强一些。为了补偿这里过强的要求，以后要引进广义解的概念。

基本引理在多重积分情形也成立，仍以二重积分情形叙述并证明于下。

基本引理 设 $\eta(x, y) \in C^2(G)$ ，且沿边界 ∂G 为零： $u|_{\partial G} = 0$ 。若 G 中连续函数 $f(x, y)$ 对所有具上述性质的 η 使

$$\iint_G f(x, y) \eta(x, y) dx dy = 0$$

则 f 在 G 中恒等于零。

证明 若在 G 中某点 (a, b) 有 $f(a, b) > 0$ ，则在以 (a, b) 为心具充分小半径 ρ 的圆 K 中仍有 $f > 0$ 。特别取

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0, & (x-a)^2 + (y-b)^2 \geq \rho^2 \\ [(x-a)^2 + (y-b)^2 - \rho^2]^2, & \text{当 } (x-a)^2 + (y-b)^2 < \rho^2 \end{cases}$$

显然 η 具引理所述要求。但对这个 η ，却有

$$\iint_G f(x, y) \eta(x, y) dx dy = \iint_K f(x, y) [(x-a)^2 + (y-b)^2 - \rho^2]^2 dx dy > 0$$

与假设不符。故 f 在 G 中处处为零。

为引出 Euler 方程，设 $u(x, y)$ 使 J 取极值。对 u 附加变分 $\delta u = \alpha \eta$ ，这里 α 为绝对值充分小的实参数， η 为具引理所述性质的函数，则 $\tilde{u} = u + \delta u$ 也是容许函数。考虑 α 的函数

$$J(\alpha) = \iint_G f(x, y, u + \alpha \eta, u_x + \alpha \eta_x, u_y + \alpha \eta_y) dx dy$$

它在 $\alpha = 0$ 取极值，故得必要条件

$$J'(0) = \iint_G (f_u \eta + f_{u_x} \eta_x + f_{u_y} \eta_y) dx dy = 0$$

应用二重积分的分部积分公式

$$\begin{cases} \iint_G AB_x dx dy = \int_{\partial G} AB dy - \iint_G BA_x dx dy \\ \iint_G CD_y dx dy = - \int_{\partial G} CD dx - \iint_G C_y D dx dy \end{cases} \quad (11)$$

有

$$J'(0) = \iint_G \eta \left(f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right) dx dy + \int_{\partial G} \eta (f_{u_x} dy - f_{u_y} dx) = 0$$

由于 $\eta|_{\partial G} = 0$, 得

$$\iint_G \eta \left(f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right) dx dy = 0$$

应用基本引理即得泛函(10)的 Euler 方程:

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0 \quad (12)$$

这个方程包含 u 的偏导数, 称为偏微分方程. 对(12)还须附加边界条件

$$u|_{\partial G} = g(P), P \in \partial G \quad (13)$$

在一些实际问题中, 变分问题不仅包含域 G 上的积分, 还涉及沿边界 ∂G 的积分, 例如

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy + \int_{\partial G} f(s, u, u_s) ds, \quad u_s = \frac{du}{ds} \quad (14)$$

其中 s 为 ∂G 上的坐标参数, F 和 f 都是已知函数, 且适当光滑. 这时表面上对容许函数 u 不附加边值限制, 但从(14)的边界积分可引出所谓的自然边界条件.

设 u 使(14)取到极值. 对它添加变分 $\delta u = \alpha \eta(x, y)$, 可算出

(作为习题)

$$\delta J = \iint_G [F]_u \delta u dx dy + \int_{\partial G} \left(F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + [f]_u \right) \delta u ds \quad (15)$$

$$[F]_u \equiv F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}, \quad [f]_u \equiv f_u - \frac{d}{ds} f_{u_s}.$$

既然对 δu 在 ∂G 上未作任何限制, 首先可取具性质 $\delta u|_{\partial G} = 0$ 的 δu , 仿照上面的讨论, 知 u 应满足必要条件(12). 然后对无任何边值限制的 δu 由 $\delta J = 0$ 结合(12)得:

$$\int_{\partial G} \left(F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + [f]_u \right) \delta u ds = 0$$

由被积函数沿 ∂G 的连续性 & δu 的任意性知应有

$$\left(F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + f_u - \frac{d}{ds} f_{u_s} \right)_{\partial G} = 0 \quad (16)$$

这就是 u 沿 ∂G 所应满足的自然边界条件.

例 求二次泛函

$$J = \iiint_G [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz$$

的 Euler 方程.

仿照二重积分情形的讨论, 可得相应的 Euler 方程为

$$\Delta u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = 0 \quad (17)$$

这个方程称为 Laplace 方程, Δ 称为 Laplace 算子.

3. 变分原理

物理学中的变分原理, 萌芽于十七世纪, 到十九世纪中已具有相当完善的数学表述, 近年来得到更为广泛的应用. 在变分原理的多种表述方式中, Hamilton 原理具有特别突出的地位. 所以在这里首先叙述这个原理.

Hamilton 原理 任何力学系统, 若给定时刻 $t = t_0$ 的起始状

态和时刻 $t = t_1$ 的终结状态, 则真实运动区别于任何容许运动的地方在于: 真实运动使定积分

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad L \equiv T - U$$

的一阶变分为零: $\delta J = 0$. 这里 T 和 U 分别为力学系统在时刻 t 的总动能和总位能, L 称为 **Lagrange 函数**.

近年来常用 T 和 U 分别记物理系统单位体积在时刻 t 的动能和位能密度, 这时 $L = T - U$ 称为 **Lagrange 密度**, 而 Hamilton 原理则取形式: 真实运动使

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} \iiint_G L dV dt = 0$$

这里 G 为物理系统所占有的空间区域.

例 考虑具质量为 M 和 m 的二质点在万有引力作用下的运动, 而设 $M \gg m$.

由于 $M \gg m$, 可近似地认为质点 M 不动, 取其位置为坐标原点 $(0, 0, 0)$. 记质点 m 的坐标为 (x, y, z) , 于是此力学系统在时刻 t 的总动能和总位能分别为:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \frac{-kMm}{r}$$

这里 k 为引力常数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为二质点的距离. 应用 Hamilton 原理, 计算变分

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{kMm}{r} \right] dt = 0$$

仿照式(6)即得确定质点 m 轨线的 Euler 方程组:

$$\ddot{x} = -\frac{kM}{r^3}x, \quad \ddot{y} = -\frac{kM}{r^3}y, \quad \ddot{z} = -\frac{kM}{r^3}z$$

对于静止的平衡稳定状态, 则有如下的变分原理.

最小位能原理 任何静止的平衡稳定物理系统, 其真实状态

区别于任何容许状态的地方在于：真实状态使位能积分的一阶变分为零：

$$\delta J = \delta \iiint_G U dV = 0$$

这个原理可看作 Hamilton 原理的特例，因为对于静止物理系统来说，其总动能在任何时刻为零，且位能不随时间变化。

以后主要地只应用这两个变分原理，所以不再列述其他表述方式。

一般说来，物理科学中的原理，多少类似于数学科学中的公理，虽然原理的概括性要大些。原理和公理，都来源于人类的社会实践，不能进行逻辑的证明，而是逻辑推理的出发点。它们是否具有真理性，最后得由社会实践来加以检验。

值得提到的是，物理科学中由最小位能原理和 Hamilton 原理引出的一些典型的微分方程，已为一、二百年的生产实践所肯定，并对工业生产起了一定的促进作用。

习 题

1. 导出捷线问题的 Euler 方程并求其解答。
2. 利用 Green 公式 $\iint_G (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial G} P dx + Q dy$ 导出公式(11)。
3. 核验泛函(14)的一阶变分表达式(15)。
4. 仿照(6)的引出，求极值问题

$$J = \iint_G \left[u_x v_x - \frac{1}{2} (v u_y - u v_y) \right] dx dy = \min$$

的 Euler 方程组(只考虑 δu 和 δv 沿边界 ∂G 为零的情形)。

第二节 波动方程和位势方程

1. 均匀弦的横振动

力学中的弦指的是可自由弯曲的细线，但拉伸后所具的位能