高等学校试用教材

数学物理方程

陈庆益 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数学物理方程

陈庆益

人民教育出版社

几点说明

1. 为了适应较广泛的需要，本书选编的材料涉及的面较广，所以讲授的内容可由教师根据学时情况自行安排.

2. 由于数学物理方程一课不是基础课，有的学校甚至只作为选修课，所以本书的内容并非全部必修. 学生不要认为全书所有章节都不能删减.

3. 本书前三章虽是基础部分，但个别的节和段仍然可以不讲. 总之，教师可按照专业的需要进行取舍.

4. 各章末所列文献，只供必要时作进一步的参考，不可能在教学的同时都逐篇加以查阅. 学生必须理解这一点.

5. 书中在援引前面的结论和公式时，采用通用的记法，例如，第三章第二节第一段记作 3.2.1，第二章第一节公式(5)记作 2.1.(5).

6. 本书编排体系是初次的尝试，未经教学实践的检验，因此问题和错误必然不少，请教师和学生们提出批评意见.

陈庆益

1978 年 11 月

兰州大学

高等学校试用教材

数学物理方程

陈 庆 益

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

安 徽 新 华 印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 151,000

1979 年 1 月第 1 版 1979 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—80,000

书号 13012·0326 定价 0.47 元

目　　录

第一章　定解问题的引出

本章集中引出以后几章所要讨论的一些主要定解问题. 鉴于变分问题的重要性，所以统一用变分方法导出它们.

第一节　变分问题

1. 单重积分情形

下面介绍著名的捷线问题. 考虑质点在重力作用下沿铅垂平面 x-y 上某光滑曲线 $y=y(x)$ 由定点 $A(a,c)$ 到定点 $B(b,d)$的无摩擦下滑运动，这里取重力方向为 y 轴正向，且 $b>a$，$d>c$ (参看图 1.1). 问题在于寻求一条曲线 $y=y(x)$，使质点沿此曲线由 A 到 B 所需的时间最短.

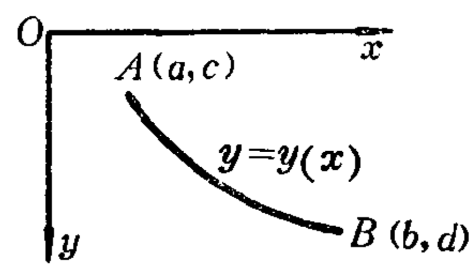

图　1.1

为了写出这个极值问题的数学表示，注意在无摩擦情况下质点的下落速率 v 正比例于下落高度 $y-c$ 的平方根:

$$v=\sqrt{2g(y-c)}$$

g 为重力加速度值. 故质点沿曲线 $y=y(x)$ 由 A 到 B 所需的时间 T 为:

$$T=\int_a^b \frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b\left(\sqrt{1+y'^2(x)}\,/\sqrt{y(x)-c}\right)dx$$

问题是寻求过定点 A 和 B 的曲线 $y=y(x)$，使 T 取极小值.

这种极值问题称为**变分问题**. 它有如下的特点：所求极值不

是函数的极值，而是定积分的极值．这个定积分随着函数$y=y(x)$的选择而取不同的值．一般，称随给定函数取确定值的对应关系为**泛函**．上面的定积分T就是一个泛函．变分问题就是泛函的极值问题．

正如函数的极值乃在极值点的邻域中考虑一样，泛函的极值也是相对于某函数的邻域而言．至于什么是函数的邻域，下面就要讲到．

大家还知道，函数$f(x_1,\cdots,x_n)$的极值点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$所应具备的必要条件是，它满足方程组：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\cdots,x_n^0)=0,\quad i=1,\cdots,n$$

或者说，f的一阶微分在此点为0：

$$df=0$$

现在寻求变分问题类似的必要条件．为此考虑泛函

$$J=\int_a^b f(x,y,y')dx\equiv J(y) \tag{1}$$

这里f为x,y,y'的已知函数．关于$y=y(x)$，为简单起见，要求它及其一阶导数都在$[a,b]$上连续，且$y(a)=c,y(b)=d$，即它所代表的曲线过某二固定点$A(a,c),B(b,d)$．现在定义具备上述性质的某曲线$y=\xi(x)$的**一阶 ε 邻域**如下．对某$\varepsilon>0$，若具备上述性质的曲线$y=y(x)$满足条件：

$$|y(x)-\xi(x)|<\varepsilon,|y'(x)-\xi'(x)|<\varepsilon,\quad x\in[a,b]$$

则称$y(x)$属于$\xi(x)$的一阶ε邻域．有了邻域概念，就可定义泛函J的局部极值．若对某$y=\xi(x)$及某一阶ε邻域中所有的$y=y(x)$都使

$$J(\xi)\leqslant J(y)$$

则称$y=\xi(x)$使J取到**(局部)极小值**，而称$y=\xi(x)$为**极小曲线**．类似地可定义J的极大值和极大曲线．极大和极小值统称为**极值**；

极大和极小曲线统称为**极值线**或**极值函数**.

为引出极值线所应满足的必要条件,先证明下面的引理.

基本引理 设函数 $\eta(x)$ 及其一阶导数都在$[a,b]$上连续，且在两个端点为零：$\eta(a)=\eta(b)=0$. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且对所有具上述性质的 $\eta(x)$使

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0$$

则 $f(x)$在$[a,b]$上恒等于零.

证明 用反证法. 设在 $[a,\ b]$ 上某点 ξ 有 $f(\xi)\neq 0$，不妨设 $f(\xi)>0$. 由 f 的连续性知在 ξ 的某闭邻域$[c,d]$上仍有 $f>0$，这里$[c,d]$为$[a,b]$的子区间. 特别取

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant c\\ (x-c)^2(x-d)^2, \quad 当 & c\leqslant x\leqslant d\\ 0, & d\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

这个 $\eta(x)$显然具备引理所述要求. 但对这个 η 却有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=\int_c^d f(x)(x-c)^2(x-d)^2dx>0$$

而与假设不符. 故 f 应在$[a,b]$上处处为零.

现在应用基本引理导出极值线所应满足的必要条件. 设 $y=y(x)$使(1)取极值. 先对具引理所述性质的某 $\eta(x)$ 及固定的 $\varepsilon>0$,取 α 的绝对值充分小,可使 $y+\alpha\eta$ 属于 y 的一阶 ε 邻域. 因 y,η,ε 都固定,(1)是参数 α 的函数:

$$J(\alpha)=\int_a^b f(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')dx$$

这个函数当 $\alpha=0$时取极值,故应有:

$$J'(0)=\int_a^b [f_y(x,y,y')\eta(x)+f_{y'}(x,y,y')\eta'(x)]dx=0$$

对第二项作分部积分得:

$$J'(0)=f_{y'}\eta\Big|_a^b+\int_a^b\eta(x)\left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right]dx=0$$

因 $\eta(a)=\eta(b)=0$,得:

$$J'(0)=\int_a^b\left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right]\eta(x)dx=0$$

现在取 η 为具引理所述性质的任一函数，并要求 y 和 f 使上式方括号内的函数在$[a,b]$上连续,则由基本引理知应有:

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0 \tag{2}$$

或计算出导数后得:

$$f_{y'y'}y''+f_{yy'}y'+f_{xy'}-f_y=0 \tag{2'}$$

由(2′)知应要求 $y(x)$在$[a,b]$上二次连续可微,且 f 关于其变元有相应的一阶和二阶的连续偏导数.

以后一般地用$C^k(G)$记域G中 k 次连续可微函数的集合．例如,(2)式要求 $y\in C^2[a,b]$.

方程 (2) 是极值函数 $y=y(x)$ 所应满足的常微分方程．由于相应曲线应过点A和 B,故对(2)须附加**边界条件**:

$$y(a)=c,\quad y(b)=d \tag{3}$$

方程(2)通称为 (1) 的 **Euler 方程**．它只是(1)的极值线所应满足的必要条件．由(2)和(3)求出的积分曲线不一定使 (1) 取到极值．但对于许多实际问题,由(2)和(3)确定的函数 $y(x)$ 常就是(1)的极值函数．所以这里只限于导出方程 (2)，而不作有关充分性问题的复杂讨论.

通常称 $\delta y\equiv\alpha\eta(x)$为**函数 y 的一阶变分**,称

$$\delta J\equiv J'(0)\alpha=[f_{y'}\delta y]_a^b+\int_a^b\left(f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right)\delta y dx \tag{4}$$

为**泛函 J 的一阶变分**．类似于函数的一阶微分在极值点应为零，泛函的一阶变分对极值函数也为零.

对含多个函数或高阶导数的情形，讨论完全类似．例如对泛函

$$J=\int_a^b f(x,y,z,y',z')dx \tag{5}$$

设 $y(x)$和 $z(x)$使它取到极值．在相应的一阶 ε 邻域中取

$$y(x)+\alpha\eta(x),\quad z(x)+\beta\zeta(x)$$

这里 α，β 为绝对值充分小的参数，η 和 ζ 具基本引理所述性质．仿上讨论，对 α,β 的函数 $J(\alpha,\beta)$ 可得必要条件：

$$\begin{cases}J_\alpha(0,0)=\int_a^b\left(f_y-\dfrac{d}{dx}f_{y'}\right)\eta(x)dx=0,\\ J_\beta(0,0)=\int_a^b\left(f_z-\dfrac{d}{dx}f_{z'}\right)\zeta(x)dx=0\end{cases}$$

应用基本引理，即得(5)的 Euler 方程组为：

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0,\quad f_z-\frac{d}{dx}f_{z'}=0 \tag{6}$$

此外，还须附加边界条件，例如：

$$y(a)=c,\ \ y(b)=d;\ \ z(a)=f,\ \ z(b)=g \tag{7}$$

同样，对含高阶导数的泛函

$$J=\int_a^b f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx \tag{8}$$

可得相应的 Euler 方程为：

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}f_{y^{(n)}}=0 \tag{9}$$

这是 $2n$ 阶的常微分方程，须附加 $2n$ 个边界条件．

2．多重积分情形

考虑多个自变量的变分问题，而以二重积分为例：

$$J=\iint_G f(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \tag{10}$$

这里 G 为 x-y 平面上的某给定域；f 为已知函数，关于其所有变元

二次连续可微；并要求 $u\in C^2(G)$，且当点 $(x,y)\in G$ 趋近 G 的边界 ∂G 时，u 连续地取得给定的边值．为了说话方便，称这种 u 为**容许函数**．可注意，和单重积分情形一样，就泛函 J 本身的极值问题来说，最多只要求函数 u 分片光滑，但为了引出 Euler 方程，对 u 的要求就强一些．为了补偿这里过强的要求，以后要引进广义解的概念．

基本引理在多重积分情形也成立，仍以二重积分情形叙述并证明于下．

基本引理 设 $\eta(x,y)\in C^2(G)$，且沿边界 ∂G 为零：$u|_{\partial G}=0$．若 G 中连续函数 $f(x,y)$ 对所有具上述性质的 η 使

$$\iint_G f(x,y)\eta(x,y)dxdy=0$$

则 f 在 G 中恒等于零．

证明 若在 G 中某点 (a,b) 有 $f(a,b)>0$，则在以 (a,b) 为心具充分小半径 ρ 的圆 K 中仍有 $f>0$．特别取

$$\eta(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当}\ (x-a)^2+(y-b)^2\geqslant\rho^2\\ [(x-a)^2+(y-b)^2-\rho^2]^2, & \ (x-a)^2+(y-b)^2<\rho^2\end{cases}$$

显然 η 具引理所述要求．但对这个 η，却有

$$\iint_G f(x,y)\eta(x,y)dxdy=\iint_K f(x,y)[(x-a)^2+(y-b)^2-\rho^2]^2dxdy>0$$

与假设不符．故 f 在 G 中处处为零．

为引出 Euler 方程，设 $u(x,y)$ 使 J 取极值．对 u 附加变分 $\delta u=\alpha\eta$，这里 α 为绝对值充分小的实参数，η 为具引理所述性质的函数，则 $\tilde{u}=u+\delta u$ 也是容许函数．考虑 α 的函数

$$J(\alpha)=\iint_G f(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)dxdy$$

它在 $\alpha=0$ 取极值，故得必要条件

$$J'(0)=\iint_G (f_u\eta+f_{u_x}\eta_x+f_{u_y}\eta_y)dxdy=0$$

应用二重积分的分部积分公式

$$\begin{cases}\iint_G AB_x dxdy=\int_{\partial G} ABdy-\iint_G BA_x dxdy\\ \iint_G CD_y dxdy=-\int_{\partial G} CDdx-\iint_G C_y Ddxdy\end{cases}\tag{11}$$

有

$$J'(0)=\iint_G \eta\left(f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}\right)dxdy+\int_{\partial G}\eta(f_{u_x}dy-f_{u_y}dx)=0$$

由于 $\eta|_{\partial G}=0$,得

$$\iint_G \eta\left(f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}\right)dxdy=0$$

应用基本引理即得泛函(10)的 Euler 方程:

$$f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}=0\tag{12}$$

这个方程包含 u 的偏导数，称为偏微分方程．对(12)还须附加边界条件

$$u|_{\partial G}=g(P),P\in\partial G\tag{13}$$

在一些实际问题中,变分问题不仅包含域 G 上的积分,还涉及沿边界 ∂G 的积分,例如

$$J=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy+\int_{\partial G} f(s,u,u_s)ds,\ u_s=\frac{du}{ds}\tag{14}$$

其中 s 为 ∂G 上的坐标参数，F 和 f 都是已知函数，且适当光滑．这时表面上对容许函数 u 不附加边值限制，但从(14)的边界积分可引出所谓的自然边界条件．

设 u 使(14)取到极值．对它添加变分 $\delta u=\alpha\eta(x,y)$，可算出

(作为习题)

$$\delta J=\iint_G[F]_u\,\delta u dxdy+\int_{\partial G}\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+[f]_u\right)\delta u ds \quad (15)$$

$$[F]_u\equiv F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y},\ [f]_u\equiv f_u-\frac{d}{ds}f_{u_s}$$

既然对 δu 在 ∂G 上未作任何限制，首先可取具性质 $\delta u|_{\partial G}=0$ 的 δu，仿照上面的讨论，知 u 应满足必要条件(12). 然后对无任何边值限制的 δu 由 $\delta J=0$ 结合(12)得：

$$\int_{\partial G}\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+[f]_u\right)\delta u ds=0$$

由被积函数沿 ∂G 的连续性及 δu 的任意性知应有

$$\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+f_u-\frac{d}{ds}f_{u_s}\right)_{\partial G}=0 \quad (16)$$

这就是 u 沿 ∂G 所应满足的**自然边界条件**.

例 求二次泛函

$$J=\iiint_G[u_x^2+u_y^2+u_z^2]dxdydz$$

的 Euler 方程.

仿照二重积分情形的讨论，可得相应的 Euler 方程为

$$\Delta u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=0 \quad (17)$$

这个方程称为 Laplace 方程，Δ 称为 Laplace 算子.

3. 变分原理

物理科学中的变分原理，萌芽于十七世纪，到十九世纪中已具有相当完善的数学表述，近年来得到更为广泛的应用. 在变分原理的多种表述方式中，Hamilton 原理具有特别突出的地位. 所以在这里首先叙述这个原理.

Hamilton 原理 任何力学系统，若给定时刻 $t=t_0$ 的起始状

态和时刻 $t=t_1$ 的终结状态，则真实运动区别于任何容许运动的地方在于：真实运动使定积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1} Ldt, \qquad L\equiv T-U$$

的一阶变分为零：$\delta J=0$. 这里 T 和 U 分别为力学系统在时刻 t 的总动能和总位能，L 称为 **Lagrange 函数**.

近来年常用 T 和 U 分别记物理系统单位体积在时刻 t 的动能和位能密度，这时 $L=T-U$ 称为 **Lagrange 密度**，而 Hamilton 原理则取形式：真实运动使

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{t_1}\iiint_G LdV\,dt=0$$

这里 G 为物理系统所占有的空间区域.

例 考虑具质量为 M 和 m 的二质点在万有引力作用下的运动，而设 $M\gg m$.

由于 $M\gg m$，可近似地认为质点 M 不动，取其位置为坐标原点 $(0,0,0)$. 记质点 m 的坐标为 (x,y,z)，于是此力学系统在时刻 t 的总动能和总位能分别为：

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\quad U=\frac{-kMm}{r}$$

这里 k 为引力常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为二质点的距离. 应用 Hamilton 原理，计算变分

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{kMm}{r}\right]dt=0$$

仿照式(6)即得确定质点 m 轨线的 Euler 方程组：

$$\ddot{x}=-\frac{kM}{r^3}x,\quad \ddot{y}=-\frac{kM}{r^3}y,\quad \ddot{z}=-\frac{kM}{r^3}z$$

对于静止的平衡稳定状态，则有如下的变分原理.

最小位能原理 任何静止的平衡稳定物理系统，其真实状态

区别于任何容许状态的地方在于：真实状态使位能积分的一阶变分为零：

$$\delta J=\delta\iiint_G U dV=0$$

这个原理可看作 Hamilton 原理的特例，因为对于静止物理系统来说，其总动能在任何时刻为零，且位能不随时间变化。

以后主要地只应用这两个变分原理，所以不再列述其他表述方式。

一般说来，物理科学中的原理，多少类似于数学科学中的公理，虽然原理的概括性要大些．原理和公理，都来源于人类的社会实践，不能进行逻辑的证明，而是逻辑推理的出发点．它们是否具有真理性，最后得由社会实践来加以检验．

值得提到的是，物理科学中由最小位能原理和 Hamilton 原理引出的一些典型的微分方程，已为一、二百年的生产实践所肯定，并对工业生产起了一定的促进作用．

习 题

1. 导出捷线问题的 Euler 方程并求其解答．

2. 利用 Green 公式 $\iint_G (Q_x-P_y)dxdy=\int_{\partial G} Pdx+Qdy$ 导出公式(11)．

3. 核验泛函(14)的一阶变分表达式(15)．

4. 仿照(6)的引出，求极值问题

$$J=\iint_G\left[u_x v_x-\frac{1}{2}(vu_y-uv_y)\right]dxdy=\min$$

的 Euler 方程组（只考虑 δu 和 δv 沿边界 ∂G 为零的情形）．

第二节 波动方程和位势方程

1. 均匀弦的横振动

力学中的弦指的是可自由弯曲的细线，但拉伸后所具的位能