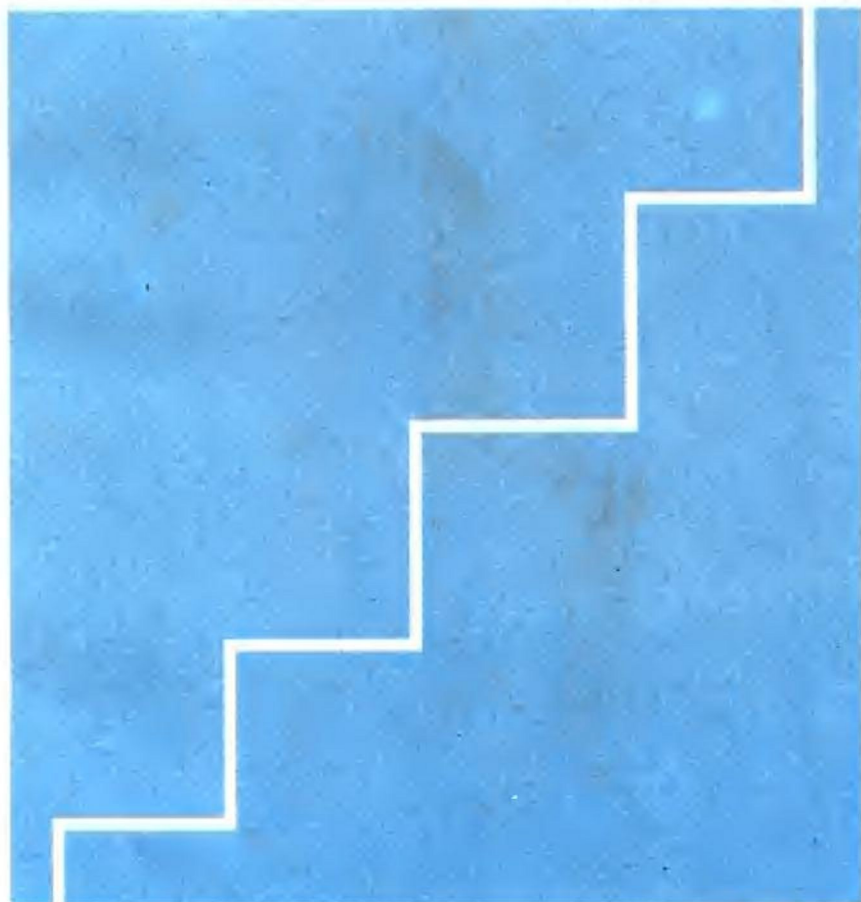


# 数理经济学

*Mathematical Economics*

肖柳青 周石鹏 著



高等教育出版社

# 数理经济学

肖柳青 周石鹏 著

ND 19/10

高等教育出版社

(京) 112 号

图书在版编目(CIP)数据

数理经济学/肖柳青著. —北京: 高等教育出版社,  
1998

ISBN 7-04-006392-1

I. 数… II. 肖… III. 数理经济学 IV. F224.0

·中国版本图书馆CIP数据核字(98)第08546号

\*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街55号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

\*

开本 850×1168 1/32 印张 8.875 字数 230 000

1998年5月第1版 1998年5月第1次印刷

印数 0 001—2 801

定价 15.00 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等  
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

## 内容提要

数理经济学是现代经济学的一个重要分支,也是当今经济学中最富挑战性的领域之一。全书共有五章:消费理论;一般理论;一般均衡理论;动态经济模型;非线性经济模型及随机经济模型,系统地反映了数理经济学的基本内容和近年来国际上活跃的研究方向。作者的叙述多从生动的例子讲起。全书内容深入浅出,推导详尽,图文并茂。

本书可供经济系,数学系,管理科学系和系统工程系的高年级本科生,研究生作为教材。也可以作为有关研究者,大学教师和广大经济学爱好者的参考书。

一种科学只有在成功地运用了数学时，  
才算真正达到完善的地步。

——卡尔·马克思

## 前 言

当今，随着信息时代的到来，我们的“地球村”正在变小，各国的经济联系变得越来越紧密相依，市场全球化方兴未艾。然而，在广泛的国际经济大协作的背景下，竞争却愈加激烈。竞争与合作共存，全球化与区域化的运动将成为今后一段时期经济发展的主要特征。确实，国家间的实力对比很大程度上取决于其经济发达的水平。经济的法则无处不在，并支配着我们的社会生活。把握经济规律对亿万人类具有生死悠关的意义。

自两个世纪前，Adam Smith 发表了奠基性的著作《国富论》（1776年）之后，经济学就引起了人们的普遍重视和关注。经济学经历了许多发展阶段，出现了像 Adam Smith, Karl Marx, Alfred Marshall, John Maynard Keynes 等等经济巨匠，他们创造性地发展了经济学，建立起了如今经济学的摩天大厦。现在，经济学的重要意义已毋庸赘言。经济学被喻为“社会科学之王——是最古老的艺术、最新颖的科学”。

的确，经济学是社会科学中最独特、最富挑战性的一门学科。因为经济学同时跨越了人文科学和自然科学“两种文化”，正如 P. A. Samuelson 所说：“它是一门把自然科学的精确与严密性和人文方面的诗意兼济一身的学科”。人们能从经济学中找到人类在生活本身中的所有利益，而与此同时，又在经济学原理中看到欧几里得几何学的

某些逻辑之美。

经济学家不仅仅要谈论生活中的许多实际利益问题,而且更要对那些与利益问题有关的重要现象如价格、产量、收入、失业等进行度量。他们要和数量打交道,要研究这些数量与数量之间的变化与关系,以此来把握经济的运行规律,所以数学就必然进入了经济学的王国。然而,经济学真正开始青睐数学却经历了较漫长的发展过程。用数学来研究经济问题的先驱当推法国学者 A. A. Cournot, 他于 1838 年发表《从数学原理研究财富的理论》,他独具慧眼地提出了需求函数理论,把人们熟视无睹的商品需求量与价格之间的关系写成了函数形式。在这里我们不妨引用英国著名诗人 William Blake 在其《地狱的箴言》(*Proverbs of Hell*) (1793 年)中的一句话:“傻子和智者见到的不是同一棵树”。这也不由使我们想起,当初 Newton 从“苹果落地”问题中悟出了令人赞叹的“万有引力定律”的故事。而真正对经济学产生巨大影响的人物是 Léon Walras, 他针对 Adam Smith 用“一只看不见的手”来形象地描述市场机制的粗略做法,于 1874 年首先明确指出:那只“看不见的手”既不是上帝的主意,也不是自然界固有的规律,而是一套数学原理。当时,他用了一组代数方程式来描述这一原理,这就是影响经济学界近达一个世纪之久的一般均衡理论。从此,经济学开始了注重运用数学来精确地描述和表达经济的现象和规律。与此同时,经济学中发生的“边际革命”是将导数概念引入到了经济学,它使经济学使用的数学工具从初等数学进入到高等数学。这一切表明,经济学已离不开数学了。

现在我们应该来谈谈数理经济学了。广义地说,数理经济学与一般的经济理论并无明显的界限可分。事实上,用数学方式表达经济理论,并进行演绎推理,以分析和建立经济理论体系的就属于数理经济学。可以说,它是经济理论的深化。因此,数理经济学是经济理论的一个重要组成部分。但是在当今国际经济学术界中,其研究文献中的大部分已数学化。从这个意义上说,广义上的数理经济学与“高级经

济分析”成为了同义词。

可是,现代的数理经济学主要是指狭义上的数理经济学。它是一门理论经济学,它是以数学为语言,寻找一组与经济理论内容相吻合的特殊公理结构,来探索经济理论体系在逻辑上的一致性,从而揭示出经济学原理中那些经济变量或其相互之间的函数关系,然后进行推导以得出规范性的原则或定理,并且对此给出准确的解释。

这样说来,数理经济学是从 Walras 的一般均衡理论研究开始的。它侧重于研究经济系统的存在性、最优性和稳定性等有关系统的定性的问题。因而,数理经济学是经济学中的一个分支。

那么,数理经济学与其它经济学又有何区别呢?首先,数理经济学不同于一般的经济理论。因为一般经济理论所涉及的领域很广,如国家制度、社会发展、法律规范等,这些方面的研究到目前为止仍很少能被数学化。所以,一般经济理论在研究与表达的方式上并不拘泥于用数学的形式,它们可以采用文字语言、简明的数据图表来阐述。

其次,数理经济学与经济计量学也不同。虽然经济计量学也是用数学模型来表达经济关系的,但是后者的研究对象是实际中的经济关系,它主要应用回归分析方法来估计出模型中的具体参数,从而得到该经济关系的定量化写照,据以作出实际的经济分析、预测等。而数理经济学是在一般的形式上研究经济关系,它为经济计量学提供模型框架和理论基础。我们可以将两者的关系比喻作物理学中的理论物理学和实验物理学,理论物理学提出假说、模型与猜想,而实验物理学依照那些线索去寻找证据并加以证实。当然有时上述顺序也会倒过来,实验物理中先发现某些与现有理论相违背的现象,然后引发新的物理理论的诞生。

再则,数理经济学决不是经济数学的代名词。因为目前经济数学一般是指为经济类专业所设置的一门应用数学课程。

最后,我们要指出,数理经济学不能被说成是数学在经济学中的应用。数理经济学是一门经济学,它的确应用了数学,但应用数学并

不是目的,而是手段,它要解决的是经济问题。数理经济学有着自己提出的任务和要处理的问题,它所采用的数学表达形式有着明确的经济意义和解释。

既然数理经济学是经济学中应用数学的一个重地,那么到现在为止,除了常见的数学分析、线性代数、概率论与数理统计、线性规划之外,还有非线性规划、动态规划、对策论、泛函分析、集值函数理论、拓扑学、测度论、遍历论、最优控制理论、随机过程论、微分流形、小波分析、微分方程及其稳定性理论、突变论、非线性动力学等等数学理论都已被应用到了数理经济学中。尤其值得一提的是“对策论”这门数学,它是由 von Neumann 和 Morgenster 合作为研究经济行为而创立起来的,并在经济中获得了许多重要的应用。这就是说,经济学也在促进数学科学的发展。

从本世纪 30 年代起,经济理论的数学化倾向就开始日益增强,其中影响深远当推 von Neumann,他开创了用集合论、群论、拓扑学研究经济理论的新时代。数理经济学的一些重要定理是由他证明或提出的。另外,作出杰出贡献的学者还有:日本数学家 Kakutani 在 1941 年证明了集值函数的不动点存在性定理;K. J. Arrow 在 1951 年证明了效用函数存在定理;K. J. Arrow 和 G. Debreu 于 1954 年证明了一般均衡存在定理;1963 年 G. Debreu 和 H. Scarf 两人证明了竞争均衡的核等价定理等等。其中 Arrow 和 Debreu 的工作运用了抽象的拓扑学,从而将数理经济学推向登峰造极的地步。据统计,从 1969 年到 1993 年共有 36 人获得诺贝尔经济学奖,其中 30 人是国际经济计量学会会员。Arrow 和 Debreu 两人分别于 1972 年与 1983 年荣获诺贝尔经济学奖。

鉴于上述情况,当前西方的大学经济学专业中越来越多地开设了各类数学课程,通过数学的训练方式,以期培养年青的经济学家们的严密思维与推理能力以及精确的表达方式。它们的博士生不论是攻读什么方向的,都必须通过数理经济学、计量经济学、高级微观经



济学、高级宏观经济学,再加上一门专业方向课程的资格考试,方能进入论文准备阶段。相比而言,我国在经济人才的培养上还存在着一定的差距,我们必须迎头赶上。加强有关的数学课程与数理经济学的训练,开展国际间的交流,建立起有特色的理论体系和风格学派,以期在国际的经济理论舞台上占有一席之地。

我国已于1990年成立了全国数理经济学会,一些国外经典的数理经济学著作被翻译出版,一本专门刊登有关论文的《数量经济技术经济研究》杂志也已创刊发行。国内学者还相继编写出版了几部数理经济学教材。但是,我国在经济学领域中的“基础建设”还是相当薄弱的,加强这一方面的教学与研究已成当务之急。我们期望通过这本教材的出版,能为这项“基础建设”添砖加瓦,尽我们的一份力。

本书共分五章,每章围绕一个专题系统地介绍数理经济学的基本理论和当前一些最新的动态。作为一本教材,当然不可能覆盖数理经济学的所有方面。我们选择的标准有两个,一个是阐述本学科中重要而经典的内容,这些内容在运用数学上又是非常有特色的,书中的前三章就属此类;另一个是介绍当今在数理经济学研究中非常活跃的新领域,从而能达到知识更新、与国际研究接轨的目的,如书中的最后两章就是这方面的内容。本书在内容安排顺序上,遵循了从静态分析到动态分析,从有序运动到混沌运动,从确定性理论到随机理论这一认识发展的演变过程。

考虑到不同的读者的情况,我们在叙述上力求从每个问题的基本内容讲起,解释清楚它的经济含义,然后再引入数学的表达形式,对由此演绎出的一些结论也指出它的经济意义。我们认为,以这种交代清楚问题的来龙去脉的方式来进行教学是培养学生思考、研究问题的能力的一个有益的途径。即便如此,由于数理经济学(在高级宏、微观经济学也是)较多地采用了“定义——定理”形式来阐述其经济关系,对于这种表达形式,希望广大读者能通过耐心地学习与积极地思考来逐步适应。如果是数学专业的读者,则我们希望这些读者重点

理解经济含义与建模过程。

读者通过学习本书之后,将基本具备了阅读现代经济文献的能力,并能迅速地进入当前研究的前沿。

本书列入上海交通大学“九五”重点教材资助,在此表示感谢。

在此,我们特别感谢中国系统工程学会常务理事兼教育与普及工作委员会主任、上海市非线性科学研究会副理事长车宏安教授在百忙中审阅了全书。

最后,我们诚挚地感谢高等教育出版社对本书出版的积极支持和责任编辑胡乃同先生的辛勤工作与宝贵意见。

著 者

1998年3月10日于上海

---

## Contents

### Preface

### Chapter 1 Utility functions and consumption theory

#### § 1.1 Basic concepts of consumption theory

##### 1.1.1 Robinson's economy

##### 1.1.2 Basic concepts

#### § 1.2 Utility functions and convexity

##### 1.2.1 Utility functions

##### 1.2.2 Monotonicity and indifference curves

##### 1.2.3 Convexity and regular preferences

##### 1.2.4 Differentiability properties of utility functions

#### § 1.3 Budget set and demand functions

##### 1.3.1 Budget set

##### 1.3.2 Optimization and demand functions

##### 1.3.3 Marshallian demand functions

#### § 1.4 Indirect utility functions and Hicksian demand functions

##### 1.4.1 Dual problem and Hicksian demand functions

##### 1.4.2 Expenditure functions

##### 1.4.3 Indirect utility functions

#### § 1.5 Properties of demand functions and Slutsky equation

##### 1.5.1 Strong quasi-concavity and Slutsky equation

##### 1.5.2 Properties of demand functions

##### 1.5.3 Economic explanation of Slutsky equation

### Conclusion

### Problems

### Chapter 2 General equilibrium theory

#### § 2.1 Basic concepts and economic principles

- 2.1.1 Exchange economy of two-persons and Edgeworth box
- 2.1.2 Excess demand and equilibrium price
- 2.1.3 Welfare theorems
- 2.1.4 General equilibrium of production economy
- § 2.2 Pure exchange economy and equilibrium
  - 2.2.1 Pure exchange economy and excess demand function
  - 2.2.2 Existence of equilibrium price
- § 2.3 Optimum properties of allocations and welfare theorems
  - 2.3.1 Allocations and Pareto optimal allocation
  - 2.3.2 Walrasian equilibrium, core allocation and first welfare theorem
  - 2.3.3 Support price and second welfare theorem
- § 2.4 Production economy and general equilibrium
  - 2.4.1 Production set, profit function and optimal production plan
  - 2.4.2 Supply function and its properties
  - 2.4.3 Model of general economy and excess demand function
  - 2.4.4 Existence of equilibrium price in the general economy

Conclusion

Problems

### **Chapter 3 Economic Dynamics**

- § 3.1 Basic concepts of dynamic systems
  - 3.1.1 Tatonnement of equilibrium price
  - 3.1.2 Dynamic systems
  - 3.1.3 Manifolds
- § 3.2 Properties of dynamic price systems
  - 3.2.1 Existence of equilibrium price

- 3. 2. 2 Uniqueness of equilibrium price
- 3. 2. 3 Local stability of equilibrium price
- 3. 2. 4 Global stability of equilibrium price
- 3. 2. 5 Periodic orbits and business cycle
- § 3. 3 Models of optimal economic growth
  - 3. 3. 1 Introduction and Ramsey model
  - 3. 3. 2 Pontryagin maximization principle and optimal growth orbit
  - 3. 3. 3 Modified Ramsey growth model
- § 3. 4 Models of business cycle
  - 3. 4. 1 Discrete dynamic systems
  - 3. 4. 2 Samuelson multiplier-acceleration model

Conclusion

Problems

## **Chapter 4 Nonlinear models in economics**

- § 4. 1 Basic concepts of chaos
  - 4. 1. 1 Logistic maps and their solution orbits
  - 4. 1. 2 Lyapunov exponent and chaos
- § 4. 2 A model of economic chaos
  - 4. 2. 1 model
  - 4. 2. 2 Periodic orbits and bifurcation
- § 4. 3 Dynamic properties of Logistic maps
  - 4. 3. 1 Topological conjugate and equivalence
  - 4. 3. 2 Schwarz derivative and S-maps
  - 4. 3. 3 Bifurcation points of Logistic maps
  - 4. 3. 4 Ergodicity and strange attractor
- § 4. 4 Overlapping generation model

4.4.1 Overlapping generation model

4.4.2 Dynamic behavior of money

Conclusion

Problems

## **Chapter 5 Stochastic models in economics**

§ 5.1 Linear expectational difference equation and its applications

5.1.1 Linear expectational difference equation

5.1.2 Cobweb model and arbitrage model

5.1.3 Solutions of linear expectational difference equation

§ 5.2 Models of bubbles in economy

§ 5.3 Models of signal sifting and filter

5.3.1 Mathematical model of signal sifting

5.3.2 Lucas filter

5.3.3 Kalman filter

§ 5.4 Optimum consumption model under uncertainty

5.4.1 Consumption model

5.4.2 Properties of solution

Conclusion

Problems

## **References**

## 目 录

第一章 效用函数与消费理论 .....	(1)
§ 1.1 消费理论的基本概念 .....	(1)
1.1.1 鲁宾逊经济 .....	(1)
1.1.2 基本概念 .....	(4)
§ 1.2 效用函数与凸性分析 .....	(11)
1.2.1 效用函数 .....	(11)
1.2.2 单调性与无差异曲线 .....	(16)
1.2.3 凸性与正则偏好 .....	(17)
1.2.4 效用函数的可微性 .....	(21)
§ 1.3 预算集与需求函数 .....	(24)
1.3.1 预算集 .....	(24)
1.3.2 最优化与需求函数 .....	(26)
1.3.3 Marshall 型需求函数 .....	(31)
§ 1.4 间接效用函数与 Hicks 需求函数 .....	(34)
1.4.1 对偶问题与 Hicks 型需求函数 .....	(34)
1.4.2 支出函数 .....	(35)
1.4.3 间接效用函数 .....	(39)
§ 1.5 需求函数的性质与 Slutsky 方程 .....	(43)
1.5.1 强拟凹性与 Slutsky 方程 .....	(43)
1.5.2 需求函数的性质 .....	(48)
1.5.3 Slutsky 方程的经济意义 .....	(50)
小结 .....	(53)
习题 .....	(54)

第二章 一般均衡理论 .....	(57)
§ 2.1 基本概念和经济原理 .....	(57)
2.1.1 两人交换经济与 Edgeworth 方框图 .....	(57)
2.1.2 超额需求与均衡价格 .....	(60)
2.1.3 福利定理 .....	(61)
2.1.4 生产经济的一般均衡 .....	(66)
§ 2.2 纯交换经济与均衡 .....	(68)
2.2.1 纯交换经济模型与超额需求函数 .....	(68)
2.2.2 均衡价格的存在性 .....	(71)
§ 2.3 配置的最优性与福利定理 .....	(76)
2.3.1 配置与 Pareto 最优配置 .....	(77)
2.3.2 Walras 均衡、核配置与第一福利定理 .....	(78)
2.3.3 支持价格与第二福利定理 .....	(81)
§ 2.4 生产经济与一般均衡 .....	(84)
2.4.1 生产集合、利润函数与最优生产计划 .....	(84)
2.4.2 供给函数及其性质 .....	(87)
2.4.3 一般经济模型与超额需求函数 .....	(89)
2.4.4 一般经济均衡价格的存在性 .....	(93)
小结 .....	(98)
习题 .....	(100)
第三章 动态经济学 .....	(102)
§ 3.1 动态系统的基本概念 .....	(102)
3.1.1 均衡价格的摸索调节模型 .....	(102)
3.1.2 动态系统 .....	(105)
3.1.3 流形 .....	(107)
§ 3.2 价格动态系统的性质 .....	(122)
3.2.1 均衡点的存在性 .....	(122)
3.2.2 均衡点的唯一性 .....	(125)



3.2.3	均衡价格的局部稳定性 .....	(127)
3.2.4	均衡价格的全局稳定性 .....	(132)
3.2.5	周期轨道与商业周期 .....	(134)
§ 3.3	<b>最优经济增长模型</b> .....	(136)
3.3.1	问题的提出与 Ramsey 模型 .....	(136)
3.3.2	Pontryagin 最大值原理与最优增长轨道 .....	(141)
3.3.3	修正的 Ramsey 增长模型 .....	(152)
§ 3.4	<b>经济周期模型</b> .....	(158)
3.4.1	离散动态系统 .....	(159)
3.4.2	Samuelson 乘数—加速模型 .....	(167)
小结	.....	(171)
习题	.....	(172)
第四章	<b>非线性经济模型</b> .....	(175)
§ 4.1	<b>混沌的基本概念</b> .....	(176)
4.1.1	Logistic 映射与解轨道 .....	(176)
4.1.2	Lyapunov 指数与混沌 .....	(178)
§ 4.2	<b>一个混沌经济模型</b> .....	(184)
4.2.1	模型 .....	(184)
4.2.2	周期轨道与分岔 .....	(186)
§ 4.3	<b>Logistic 映射的动态特性</b> .....	(193)
4.3.1	拓扑共轭与等价关系 .....	(193)
4.3.2	Schwarz 导数与 $S$ -映射 .....	(199)
4.3.3	Logistic 映射的分岔点 .....	(204)
4.3.4	遍历性与奇异吸引子 .....	(209)
§ 4.4	<b>世代交叠(OLG)模型</b> .....	(212)
4.4.1	世代交叠模型 .....	(212)
4.4.2	货币的动态行为 .....	(216)
小结	.....	(220)