連續群

(上册)

Л.C.邦德列雅金著

科学出版社

連　續　羣

上冊

Л.С.邦德列雅金著
曹　錫　華　譯

科　學　出　版　社
1978

内 容 简 介

本书为苏联邦德列雅金所著，在第二版的基础上作了少量修改．上册共六章，前三章主要是拓扑群基本概念的介绍；第四章完整地研究了连续体的构造；第五章介绍紧致拓扑群的线性表示；第六章研究局部紧致拓扑交换群，利用了特征群与对偶理论解决了交换群的构造，从而解决了希尔伯特第五问题的一个特殊情况．

本书可供高等学校数学系师生以及数学工作者阅读．

Л. С. Понтрягин

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

Государственное издательство
Технико-Теоретической литературы
Москва 1954

连 续 群

上 册

Л. С. 邦德列雅金 著

曹 锡 华 译

*

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号

北京印刷二厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1957年10月第一版 开本：850×1168 1/32
1978年9月第二次印刷 印张：10 1/2
印数：1,782—72,031 字数：252,000

统一书号：13031·798
本社书号：1145·13—1

定价： 1.30 元

第二版序言

這本書的第二版基本上是不同於第一版的. 首先,在這裏做了各種大量的補充. 在這些補充中主要的是第十一章,在那裏以李氏代數方面深入的代數研究作基礎給出了緊緻李氏羣的分類. 其次,補充了第四章,在那裏討論了拓撲環與拓撲體. 在第四章的三節中,最後一節最重要,在那裏給出了連續代數體的詳細研究. 在第三章中補充了討論連續變換羣的一節. 在第五章中補充了在拓撲羣上的積分方程的理論,以往祇是徵引了類似於它的關於數軸的某一區間上的積分方程的理論. 在第七章中補充了一節,在那裏討論了平滑流形與解析流形的概念以及這兩概念與李氏羣的關係;在第十一章中當從整體來研究緊緻李氏羣的時候,這一節的結果將得到應用. 第八章中補充了緊緻變換羣的研究以充實關於緊緻羣的研究. 在第九章中比以前更大規模地討論覆疊空間. 除了這些補充之外,新版中基本上不同的地方是從第一版中滿足第二可數公理的列緊羣與局部列緊羣過渡到緊緻羣與局部緊緻羣,這一改變大大地影響到本書的許多章節,特別是討論拓撲空間的第二章. 第二章具有比以前更完整的特性,並且更好地反映了抽象拓撲的近時情況. 這些就是新版最基本不同於舊版的地方. 此外,也還有其他較小的補充與訂正.

最後,我感謝羅赫林(В. А. Рохлин),他幫助我校閱了本書的上半部,感謝波爾燦斯基(В. Г. Болтянский),他幫助我校閱了本書的下半部. 此外,我非常感激庫羅什(А. Г. Курош),他在他的代數討論會中組織了關於本書第一版的討論,這個討論對於我準備第二版給了很大的幫助. 我真誠地感謝馬爾切夫(А. И. Мальцев),他仔細地閱讀了這新版的最後的原文,並且提出了一

系列寶貴的、對於我非常有用的指示.

邦德列雅金(Л. С. Понтрягин)

一九五三年十二月十四日於莫斯科

前　言

連續羣，或即拓撲羣的概念在數學中最初是從連續變換羣的研究所引起的．連續變換（例如幾何變換）羣本身很自然地是拓撲流形．後來，人們發現，在處理如這裏所遇到的大部分問題中所出現的羣的時候，不必把這些羣考慮作變換羣，而祇須研究羣本身，然而也還須記住在這些羣中建立着取極限的運算．因此產生了新的概念：拓撲羣．

從純邏輯的觀點看，拓撲羣是兩個數學基本概念的簡單結合：羣與拓撲空間．因此拓撲羣概念的公理化是很自然的．在討論羣的時候，我們是在最純粹的形式下來研究代數的乘法運算．同樣的，在討論拓撲空間的時候，我們同樣是在純粹的形式下來研究極限運算．因為這兩個運算都屬於基本數學運算之列，所以它們時常結合在一起．拓撲羣就是這樣的概念，它結合了這兩個概念並把它們緊密地聯繫在一起．從結構方面來看，拓撲羣的公理化沒有任何重要性，因為基本上它祇是抽象羣公理的重複．這就規定了拓撲羣理論的第一步：它幾乎沒有任何特殊性．然而，在同一集合中兼備了相互聯繫着的代數與拓撲的兩種運算將使研究的對象更具體化．從連續體的例子更顯著地可以看出這一點，關於連續體我們將在第四章中詳細研究．第三章大體上給出了拓撲羣公理的顯明敍說並建立了它們的一些簡單性質．在最初兩章中，我們收集了一些在後面幾章中所必需的有關羣與抽象空間的知識．

在建立了拓撲羣的公理及給出了拓撲羣的一般理論之後，產生了一個更重要的任務：研究新的抽象概念的結構，即使新的概念與舊的更具體的概念聯繫起來．在這條路上，我們用新的一般觀點來解釋舊的具體的概念，同時使新的概念具體化．在第四章中，

沒有應用任何工具我們對連續體進行了完整的討論，然而對拓樸羣的討論光是用如此簡單的方法是不成功的．在第五章中所給出的綫性表示的理論是研究拓樸羣的基本工具． 利用這一工具，使我們有可能在第八章與第六章中對緊緻拓樸羣與拓樸交換羣的結構進行詳細的研究．

李氏羣的概念是拓樸羣理論的具體概念之一．最初拓樸羣的理論是以李氏羣理論的形式出現的．正像通常在較舊的理論中一樣，在李氏羣的理論中留着某些原則性的問題沒有得到解決． 在第七章中給出了這些原則性問題的解決．同時也給出了第八章所需要的預備知識，因爲緊緻拓樸羣的研究是用到了它與李氏羣的關係．第九章中我們給出了泛覆疊羣的概念．由它建立了拓樸羣的局部性質與拓樸羣的整體性質之間的關係．

幾乎每一節都拿例子來結尾，這些例子的性質是多樣的． 一方面這些例子中有一些是理論部分的幾乎顯然的說明，另一方面，也有一些例子是某些定理的證明的簡要敘說，這些定理是完全有它本身的價值的．

讀者不必完全按照書的次序念．這些章之間相關的圖解在上面已經指出(在目錄結尾處)．

這本書並不假設讀者具有很廣博的數學知識，然而要求有相當的數學程度． 大體上祇假設初等數學的一些內容，例如解析幾何，矩陣論，常微分方程論等等．

書後附有文獻表．我們在方括弧中放一個數字來表示所引文獻在文獻表中的號碼．

符　號

集合的概念是作爲本書敍說的基礎，並且假設讀者對於它是熟悉的[13]. 這裏我引入有關集合概念的某一些符號及集合上的一些初等運算的符號.

A) $a \in M$ 表示元素 a 屬於集合 M. 我們時常用列舉集合 M 中所含元素來給出集合 M: $M = \{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$. 這種寫法就表示集合 M 是由元素 $a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 所組成.

B) $M = N$ 表示集合 M 與 N 一致.

C) $M \subset N$ 或 $N \supset M$ 表示集合 M 中每一元素都在集合 N 中,即集合 M 是集合 N 的一部分. M 與 N 一致的情形不除外.

D) 以 $M \cap N$ 表示集合 M 與 N 的交集,即由那些同時屬於集合 M 與 N 的所有元素所組成的集合.

E) 以 $M \cup N$ 表示集合 M 與 N 的併集(和集),即由那些至少屬於集合 M 與 N 之一的所有元素所組成的集合.

F) 以 $M \setminus N$ 表示集合 M 與集合 N 之差,即由那些在 M 中而不在 N 中的所有元素所組成的集合. 因此,減的運算總是可以進行的,並不依賴於"集合 N 是否是集合 M 的一部分"這一事實. 假如 $M \subset N$,那末減得的結果就是空集,即不含元素的集.

G) 設 M 與 N 爲二集合. 假如對集合 M 的每一元素 x 對應有集合 N 中的一個確定元素 $y = f(x)$. 那末我們稱,從集合 M 到集合 N 內有映像 f. 稱元素 y 爲在映像 f 下元素 x 的像,而元素 x 爲元素 y 的原像,或元素 y 的原像之一. 假如對集合 N 的每一元素 b 在映像 f 下至少有一個原像 a,即至少有一元素 $a \in M$ 使 $b = f(a)$,那末稱 f 爲集合 M 到集合 N 上的映像.

假如 A 是集合 M 的子集,也即 $A \subset M$,那末我們以 $f(A)$ 表

A 中所有元素的像所成的集合；我們稱 $f(A)$ 爲集合 A 的像. 假如 $B \subset N$,那末我們以 $f^{-1}(B)$ 表在映像 f 下集合 M 中可以作 B 中元素的原像的所有元素所成的集合；我們稱集合 $f^{-1}(B)$ 爲在映像 f 下集合 B 的完全原像.

假如在集合 M 到集合 N 上的映像 f 下,集合 N 的每一元素祇有一個原像,那末稱 f 爲一一映像. 假如 f 是一一映像,那末對於 x 方程 $y = f(x)$ 可以解出,即知道了 y 後可以唯一決定 x, 我們有 $x = f^{-1}(y)$. 映像 f^{-1} 稱爲映像 f 的逆映像.

目　　錄

（上册）

第一章

羣

羣論是在最純粹的形式下研究代數運算的：人們只從羣的運算的觀點中來考慮羣的元素；至於這些元素的所有其他性質，這裏不作研究.

這一章裏，我們將給出羣論的基本概念.

§1. 羣的概念

定義 1. 假如在元素集合 G 中有一個運算，即 G 中的每對元素 a, b 總有 G 中某一元素 c 與之對應，而這個運算又能滿足下列所謂羣的公理的三個條件 1, 2, 3，那末我們稱這個元素的集合爲羣. 這個運算通常叫作乘，而乘的結果以 ab 表示，即 $c = ab$ (乘積 ab 與因子 a 與 b 的次序有關，一般說來，ab 不等於 ba).

1) 結合性： 對於 G 中任何三個元素 a, b, c 總有關係式 $(ab)c = a(bc)$.

2) 在 G 中有左單位元素，亦即在 G 中存在 e 這樣的元素，它對於 G 中每一元素 a 有 $ea = a$.

3) 對 G 中每一元素 a 存在左逆元素，即存在 a^{-1} 這樣的元素，它使得 $a^{-1}a = e$.

羣 G 的元素的集合可以是有限的，也可以是無限的. 假如羣 G 的元素的集合是有限的，那末稱它爲有限羣，而 G 中元素的個數稱爲羣 G 的階. 否則就稱爲無限羣.

假如在羣中除了上述三個條件外，還滿足交換性的條件，即對 G 中每兩個元素 a 及 b 總有等式

$$ab = ba, \tag{1}$$

那末，稱這個羣爲交換羣或阿貝爾羣．對於交換羣，時常用加的符號來代替乘的符號，即把乘積 ab 寫作和 $a + b$，這種羣裏的運算，我們稱爲加，而不稱爲乘．在這一情況下，羣的單位元素 e 稱爲零，以 0 表之，a 的逆元素 a^{-1} 稱爲反元素，以 $-a$ 表之．

A) 由 1) $(ab)c = a(bc)$，因此這個元素可以簡單地記作 abc．同樣地假如有四個元素的乘積，如 $((ab)c)d$，那末不難看出，它也是不受括號限制的，因此可以簡單地記作 $abcd$．對於任何個數的因子，同樣的法則也成立．

B) 左單位元素 e 亦是右單位元素，即對每一元素 a 有 $ae = a$．元素 a 的左逆元素 a^{-1} 也是它的右逆元素，即 $aa^{-1} = e$，元素 a^{-1} 的逆元素就是 a，即 $(a^{-1})^{-1} = a$．

現在我們來證明敍說 B)，從 2) 及 3) 得出 $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$；在這個等式的兩邊各從左面乘上元素 a^{-1} 的逆元素，得 $aa^{-1} = e$．亦即元素的左逆元素，同時也是它的右逆元素，從此又得 a^{-1} 的逆元素是 a．其次有 $ae = aa^{-1}a = ea = a$，亦知左單位元素同時也是右單位元素．

C) 在羣 G 中每一方程式

$$ax = b \tag{2}$$

及

$$ya = b \tag{3}$$

關於未知量 x 及 y 皆有解，而且解是唯一的．特別，從這裏可得出單位元素的唯一性及逆元素的唯一性，因爲 e 是方程式 $xa = a$ 的解，a^{-1} 是方程式 $xa = e$ 的解．

要證明方程式(2)及(3)的可解性，只需指出元素 $a^{-1}b$ 是方程式(2)的解，元素 ba^{-1} 是方程式(3)的解．其次，顯然，所指出的解是唯一的解，因爲把方程式(2)從左邊乘上 a^{-1}，即得 $x = a^{-1}b$，同樣地把方程式(3)從右邊乘上 a^{-1}，得 $y = ba^{-1}$．

D) 在證實了單位元素與逆元素的唯一性之後，很自然地可

以引入通常初等代數中的符號．假如m爲自然數，那末a^{m+1}歸納地定義爲$a^{m+1}=a^m\cdot a$，而把a^1作爲a．負指數a^{-m}定義爲$a^{-m}=(a^{-1})^m$，冪a^0定義爲$a^0=e$．假如p與q爲二整數，那末不難看出，通常的法則是成立的：$a^pa^q=a^{p+q}$，$(a^p)^q=a^{pq}$．在加的符號下，a^n改寫爲na．

E）假如對羣的元素a存在自然數m，使$a^m=e$，那末我們說a是有限階的，否則就把它作爲無限階的或零階的，或稱元素a爲自由元素．假如元素a是有限階的，那末使$a^r=e$的最小自然數r定義爲元素a的階．可以證明，假如$a^n=e$，其中n爲任意整數，那末n能被r除盡．

爲了證明這個敍說，我們用r來除n，即把n表成$n=pr+q$，其中

$$0\leqslant q<r. \tag{4}$$

於是有

$$e=a^n=a^{pr+q}=(a^r)^pa^q=a^q.$$

因此$a^q=e$．由不等式(4)得出$q=0$，亦即r除得盡n。

集合的變換羣是羣的很重要例子．在數學中羣起初是由變換羣引出的，直到很久以後，才開始考慮與變換無關的形式．

F）在某一集合Γ上的一一映像稱爲集合Γ的變換．假如x與y是集合Γ的兩個變換，那末對於任意$\xi\in\Gamma$由關係式$z(\xi)=$ $=x(y(\xi))$來決定x,y的乘積$z=xy$．不難看出，這樣所決定的映像z是集合Γ的變換．對於任意$\xi\in\Gamma$由關係式$e(\xi)=\xi$所決定的集合Γ的恆等變換e在變換的乘法中作爲單位元素．顯然，$ex=xe=x$．變換x的逆變換x^{-1}是這樣決定的：把集合Γ中的每一元素$x(\xi)$對應於元素ξ．顯然，$x^{-1}x=e$，所以這個變換x^{-1}是變換x的左逆變換．我們在下面要指出，變換的乘法是具有結合性的．因此集合Γ的每一非空變換集合G，假如對G中任意兩個變換，G亦含有他們的乘積，而且對G中任一變換，G亦

含有它的逆變換，那末G對於變換的乘法而言就組成羣. 每一個這樣的羣稱爲集合Γ的變換羣. 假如對集合Γ中的每二元素ξ, η在集合Γ的變換羣G中存在$x \in G$這樣的變換，使$x(\xi) = \eta$，那末稱羣G是可傳遞的. 特別，集合Γ的所有變換羣是可傳遞的. 使ξ變爲η的變換x，可以由下列關係式給出：

$$x(\xi) = \eta,\ x(\eta) = \xi,\ x(\zeta) = \zeta \text{ 當 } \zeta \neq \xi,\ \zeta \neq \eta \text{ 時.}$$

現在我們來證明變換乘法的結合性. 設x, y, z是集合Γ的三個變換，又設$\xi \in \Gamma$. 我們有

$$(xy)z(\xi) = xy(z(\xi)) = x(y(z(\xi))),$$
$$x(yz)(\xi) = x(yz(\xi)) = x(y(z(\xi))),$$

於是得$(xy)z = x(yz)$.

例 1. 設Γ_n爲含有n個元素的有限集合，即如Γ_n含有數$1, 2, \cdots, n$. 又設G_n是集合Γ_n的所有變換羣，那末集合Γ_n的每一個變換稱爲置換，而羣G_n是集合Γ_n的所有置換的羣. 巡廻的置換$(i_1, i_2, \cdots, i_k)$是把i_1變爲i_2，i_2變爲i_3，$\cdots$，最後把i_k變爲i_1的置換. 集合Γ_n的變換羣G_n含有$n!$個元素. 例如我們寫出G_3的所有元素，這些元素是：$a = (1, 2)(3)$；$b = (1, 3)(2)$；$ab = (1, 3, 2)$；$ba = (1, 2, 3)$；$aba = (1)(2, 3)$；$e = (1)(2)(3) = = a^0$. 因此G_3中所有元素是可以由它的兩個元素a和b表示出來. 在這一情況下，a, b是羣G_3的生成元素. 元素$(1, 2)(3)$，$(1, 3)(2)$與$(1)(2, 3)$是二階的；元素$(1, 2, 3)$與$(1, 3, 2)$是三階的. 羣G_3是不可交換的，因爲$ab \neq ba$.

例 2. 設$r = \|r^i_j\|$及$s = \|s^j_k\|$，$i = 1, \cdots, a$；$j = 1, \cdots, b$；$k = 1, 2, \cdots, c$；它們是複數所組成的兩個矩陣. 正如符號上所指出的，第一個矩陣的列數等於第二個矩陣的行數. 在這一條件下，可以由

$$t^i_k = \sum_{j=1}^{b} r^i_j s^j_k,\ i = 1, \cdots, a;\ k = 1, \cdots, c$$

來定義矩陣 r 及 s 的乘積 rs 作爲矩陣 $t=\|t^i_k\|$.

假如 r 及 s 是 n 階方陣,亦即 $a=b=c=n$, 那末 rs 也是 n 階方陣. 可以指出,所有行列式不爲零的 n 階方陣的集合 G,在這樣乘法的定義下,組成羣. 從矩陣乘積的定義,可以直接得出乘法的結合性.

單位元素是單位矩陣 $e=\|\delta^i_j\|$, 其中 $\delta^i_i=1$, $\delta^i_j=0$, 當 $i\neq j$ 時. 要求矩陣 $s=\|s^i_j\|$ 的逆矩陣 $r=\|r^i_j\|$,祇需要對於未知量 r^i_j 解方程組

$$\sum_{j=1}^{n} r^i_j s^j_k=\delta^i_k.$$

這個方程組是可解的,因爲當 i 固定時,它就成爲具有 n 個未知量 n 個方程式的方程組,而係數行列式 $|s^i_k|$ 不等於零.

不難看出,由實數矩陣所組成的集合 G 的子集 G' 也是羣.

§2. 子羣、正規子羣、商羣

在後面我們常討論到羣的各種子集及它們之間的某些運算. 這裏我們介紹這些運算的符號.

A) 假如 A 與 B 是羣 G 的兩個子集,那末形如 xy,其中 $x\in A$, $y\in B$ 的所有元素所組成的子集以 AB 表之. 而形如 x^{-1}, 其中 $x\in A$ 的所有元素所組成的子集以 A^{-1} 表之. 當 m 爲自然數時,子集 A^{m+1} 是用等式 $A^1=A$ 及 $A^{m+1}=A^m\cdot A$ 歸納地定義出來的. 我們以 $A^{-m}=(A^{-1})^m$ 來定義子集 A^{-m};以 $A^0=\{e\}$ 來定義 A^0. 運用上面所指出的符號,我們可作任意個數子集的乘積,而這些子集又是另外子集的任意整數冪. 在後面我們有時對僅含一個元素的子集與這個元素本身不加區别,因此符號 Ab (其中 $A\subset G$, $b\in G$)是有意義的. 注意,若 A 爲不空的,那末

$$AG=GA=G, \tag{1}$$

$$G^{-1}=G, \tag{2}$$