物理学中的数学方法

第二卷

〔美〕F.W.拜仑 R.W.富勒 著

科学出版社

物理学中的数学方法

第 二 卷

〔美〕F. W. 拜仑 R. W. 富勒 著

蔡 纬译

张 礼校

科学出版社

1 9 8 2

内 容 簡 介

本书是为配合研究生学习经典力学、电磁学及量子力学等课程而编写的。书中利用向量空间理论，对物理学不同学科所用的数学方法作了统一处理．为了阐明数学方法在物理学中的作用，书中列举了大量的物理应用范例以及物理学习题．全书分为两卷．第一卷主要内容为：经典物理学中的向量，变分法，向量与矩阵，物理学中的向量空间，希耳伯特空间——完备正交归一集合．重点是向量空间理论．第二卷主要内容为：解析函数理论的初步原理和应用，格林函数，积分方程导论，希耳伯特空间中的积分方程，群论初步．重点是介绍理论物理中一些重要的数学技巧．

本书自成系统，与物理内容结合密切，数学推导详细，适宜于教学和自学，对于具有大学本科物理学、数学预备知识的读者，是一本较好的数学参考书，不但可以扩充读者的数学知识，而且可以进一步加深读者对物理学的理解．

本书适合作为大学理工科高年级学生和研究生的教学用书，也可供有关科研人员参考．

F. W. Byron R. W. Fuller

Mathematics of Classical and Quantum Physics

Volume two

Addison-Wesley, 1969

物理学中的数学方法

第 二 卷

〔美〕F. W. 拜仑 R. W. 富勒 著

蔡 纬 译

张 礼 校

责任编辑 陈咸亨

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年7月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1982年7月第一次印刷 印张：13 1/4

印数：0001—11,500 字数：304,000

统一书号：13031・1918

本社书号：2603・13—3

定价： 2.45 元

目　　录

第　一　卷

第一章　经典物理学中的向量…………………………………… 1
第二章　变分法…………………………………………………… 49
第三章　向量与矩阵……………………………………………… 97
第四章　物理学中的向量空间…………………………………… 164
第五章　希耳伯特空间——完备正交归一函数集合………… 245

第　二　卷

第六章　解析函数理论的初步原理和应用…………………… 355
　引言 ……………………………………………………………… 355
　§6.1　解析函数——柯西-黎曼条件 ……………………… 356
　§6.2　一些基本的解析函数 ………………………………… 364
　§6.3　复积分——柯西-古尔萨定理 ……………………… 376
　§6.4　柯西定理的推论 ……………………………………… 384
　§6.5　希耳伯特变换和柯西主值 …………………………… 391
　§6.6　色散关系简介 ………………………………………… 398
　§6.7　解析函数的幂级数展开式 …………………………… 409
　§6.8　残数理论——实数定积分求值和级数求和 ………… 420
　§6.9　应用于特殊函数和积分表示式 ……………………… 437
　习题 ……………………………………………………………… 445
第七章　格林函数………………………………………………… 458
　引言 ……………………………………………………………… 458
　§7.1　解微分方程的一个新方法 …………………………… 458
　§7.2　格林函数和 δ 函数 ………………………………………… 467
　§7.3　一维情形下的格林函数 ……………………………… 474

§ 7.4　三维情形下的格林函数 …………………………………… 485
§ 7.5　径向格林函数 …………………………………………… 497
§ 7.6　应用于衍射理论 ………………………………………… 514
§ 7.7　与时间有关的格林函数：一阶方程 ……………………… 523
§ 7.8　波动方程 ……………………………………………… 536
习题 ………………………………………………………… 544
第八章　积分方程导论 ……………………………………… 557
引言 ………………………………………………………… 557
§ 8.1　迭代技术——线性积分算子 …………………………… 557
§ 8.2　算子的范数 …………………………………………… 563
§ 8.3　巴拿赫空间中的迭代技术 ……………………………… 569
§ 8.4　对于非线性方程的迭代技术 …………………………… 575
§ 8.5　可分核 ………………………………………………… 582
§ 8.6　普遍的有限秩核 ………………………………………… 590
§ 8.7　全连续算子 …………………………………………… 598
习题 ………………………………………………………… 607
第九章　希耳伯特空间中的积分方程 ………………………… 617
引言 ………………………………………………………… 617
§ 9.1　全连续厄密算子 ………………………………………… 617
§ 9.2　线性方程和微扰论 ……………………………………… 632
§ 9.3　对于本征值问题的有限秩技术 ………………………… 643
§ 9.4　对于全连续算子的弗雷德霍姆择一定理 ………………… 653
§ 9.5　积分方程的数值解 ……………………………………… 659
§ 9.6　酉变换 ………………………………………………… 669
习题 ………………………………………………………… 677
第十章　群论初步 …………………………………………… 691
引言 ………………………………………………………… 691
§ 10.1　归纳性的导引 ………………………………………… 691
§ 10.2　对称群 ……………………………………………… 698
§ 10.3　傍系，类和不变子群 ………………………………… 705
§ 10.4　对称性和群表示 ……………………………………… 713
§ 10.5　不可约表示 …………………………………………… 719

§ 10.6　酉表示，舒尔引理和正交关系 ………………………… 726
§ 10.7　群表示的确定 …………………………………………… 740
§ 10.8　物理问题中的群论 ……………………………………… 753
习题 ……………………………………………………………… 766
总书目 …………………………………………………………… 771

第六章　解析函数理论的初步原理和应用

引言

过去几十年中，解析函数理论在物理中的作用发生了相当大的变化．现在只会计算残数积分已经不够了．要想理解解析函数在近代物理理论中的应用，就必须对它的数学概念有更深刻的认识．因此，这里的重点是引入解析函数理论的数学概念和逻辑结构．我们只假定读者熟悉复数的性质，而致力于给这个理论一个自成系统的叙述，以使读者既能妥善处理这一理论过去的应用，也能处理它的近代应用．

“虚”数是中世纪在研究二次方程的普遍解时发现的．从它的名称就可以看出，人们对它曾很怀疑．高斯在他 1799 年的博士论文中给出了现在人们熟知的复数的几何表示，从而有助于驱散对它的某种神秘感．到了本世纪，趋势是把复数定义为遵守某种形式运算规则的抽象符号．因此复数从未取得像实数那样的“实在”性质．事实倒是几乎相反：我们已经把实数抽象地看成和复数一样，也是遵守其自身的公理体系的符号．我们现在说的是数域：实数域和复数域．定义一个域的公理，已在第三章叙述向量空间时讨论过．

可以把复数看成实数的一个有序对［写作 (x, y)］，从而发展复数理论．设 (a, b) 和 (c, d) 是两个不同的复数，K 是一个实数．这时，我们可以按下列规则，定义复数加法、实数和复数的乘法以及两个复数的乘法：

1. $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$，
2. $K \cdot (a, b)=(Ka, Kb)$，
3. $(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, bc+ad)$．

从这些定义可以看出，全体复数的集合——复平面，和平面内全体向量的集合具有相同的数学结构.

这是朗道 (Landau)《分析基础》一书中采用的方案，它从皮亚诺 (Peano) 的五条公理出发，合乎逻辑地建立了各种数系，完全不必提及虚数 i. 但是，如果我们把有序对 (a, b) 写作 $a + ib$，其中 $i^2 = -1$，那么只要我们按普通的实数乘法规则简单地将$(a + ib)(c + id)$ 乘开，上述的复数乘法规则就自动满足. 引入符号 i，在把算术的形式规则从实数推广到复数时，就把实数有序对的有序特性反映出来了.

从复数可由实数有序对构成[即 $(a, b) = a + ib$] 出发，可以推广到有三个分量或更多分量的结合代数，例如

$$(a, b, c) = a + ib + kc.$$

在处理刚体转动问题时四元数是很有用的，它是一类结合代数，满足除乘法交换律外的所有算术运算规则. 四个 4×4 的狄拉克矩阵 $\gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 也形成一个结合代数集合，它满足反对易关系

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij}.$$

可以证明，不管我们怎样对这些结合代数定义加法和乘法，都不可能把通常的算术规则全部保留. 正像外尔 (Weyl) 指出的，在这个意义上，复数成了推广数的概念的自然界限.

§ 6.1 解析函数——柯西-黎曼条件

假如对于在某个域内的每一个复数 z，存在对应的另一个复数 w，那么 w 就是复数 z 的函数：$w = f(z)$. 如果是一一对应关系，我们可以把它看成从一个平面—— z 平面（或是它的一部分）到另一 w 平面的映射. 这样定义的复变函数等价于两个变量的实函数的有序对，这是因为 w 是一个依赖于 $z = x + iy$ 的复数，因而可以写成

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

但是对我们的目的来说，这类函数太普遍了. 我们关心的只是对

复变量 z 可微的函数，这个限制比 u 及 v 对于 x 和 y 可微的条件还要强得多．因此，我们研究复变函数论的主要课题之一，就是要决定一个复变函数对于复变量 z 有导数的充分必要条件．一个复变量的单值函数，如果它在复平面的某个域中处处有导数，就称为解析函数．我们将集中注意这类特殊的复变函数．

举两个复变函数的例子（都写成 $w = u + iv$ 的形式）：

(1) $w = z^* = x - iy$,

(2) $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

现在我们将证明，(1) 不是解析函数，而 (2) 在复平面上处处都是解析的，即在所有点上它的导数都存在．

为了确切地阐述复变函数的导数的含义，我们必须先具有对这类函数的连续性的概念．

在下面要给出的定义中，要提到复数的绝对值，记作 $|z|$．读者会记得 $|z| = (zz^*)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$．有时也把绝对值称作模．

定义 一个复变函数 $w = f(z)$，如果给定任意 $\varepsilon > 0$，则存在一个 δ，使当 $|z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$，则 $f(z)$ 在点 z_0 处是连续的．或者说，假如

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

则 $f(z)$ 在 z_0 处是连续的．这个定义在形式上完全类似于一个实变量的实函数的连续性定义．但是，这里的绝对值号所指的是，每当 z 落在 z 复平面中以 z_0 点为中心，δ 为半径的圆内时，则 $f(z)$ 落在复 w 平面中以 $f(z_0)$ 为中心，ε 为半径的圆内．如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，假如 u 和 v 在 (x_0, y_0) 处连续，那么 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续．

从这类单值连续复变函数中，我们现在要选出可微的函数．仿照实数分析中导数的定义，我们有：

定义 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

存在，则 $f(z)$ 在 z_0 点是可微的．这个极限就是 $f(z)$ 在 z_0 点的导

数，我们把它记作$f'(z_0)$.

在连续和导数的定义中出现的极限的一个很重要的特点是，z可以从平面上的任何方向趋近于z_0. 因此，当我们说极限存在时，我们指的是，不管极限是怎么取的，其结果必须有相同的数值. 这在实数分析中也是如此，但在实数情形下，取极限时只有两个可能趋近的方向：从实轴上的左方或从右方. 在实数分析中，取极限过程是一维的；而在复数分析中，它是二维的.

上面对导数下定义的方程的意思是，给定任意$\varepsilon>0$，存在一个δ，使当$|z-z_0|<\delta$时，就有

$$\left|f'(z)-\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon.$$

这里要求不管z沿怎样的路径趋近z_0，$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$，这个比值总是趋于相同的极限值，这是极端严格的条件. 解析函数理论中有几个很奇特的定理，它们都是从函数具有"各向同性"的导数这个严格的初始要求得到的.

一个z的单值函数，如果它在z_0及z_0的某邻域内的所有点上都有导数，则称它在z_0点是解析的(或正则的). 因此可微性和解析性之间是稍有区别的. 这个区分是必要的，因为的确存在一些函数，虽然它们在某点、甚至沿某曲线有导数，但是如果它不是在一个区域内处处可微，即不是解析的，我们仍不能得出什么有意义的结论. 因此当我们说函数在某曲线上是解析的，我们的意思就是，它在包含此曲线的二维带域内的所有点上都有导数. 假如一个函数在某点或某曲线上不是解析的，我们说它在该处是奇异的.

现在我们讨论前面提到的两个复变函数的可微性和解析性. 如果我们按原有的定义，令$z=z_0+\Delta z$，就可以把在z_0点的导数写成

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

对于 $f(z)=z^2$，我们有

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-z_0^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z_0+\Delta z)=2z_0,$$

这个结果显然与 $\Delta z\to 0$ 所取的路径无关，所以 $f(z)=z^2$ 是处处可微和解析的．这个结果完全和对于实函数 $f(x)=x^2$ 求导数的结果完全类似．

另一方面，如果 $f(z)=z^*$，我们有

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0^*+\Delta z^*-z_0^*}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z^*}{\Delta z}.$$

现在，假如我们沿实 x 轴让 $\Delta z\to 0$，那么 $\Delta z=\Delta x$，而

$$\Delta z^*=\Delta x^*=\Delta x,$$

所以 $f'(z_0)=+1$．但是如果沿虚 y 轴让 $\Delta z\to 0$，那么 $\Delta z=i\Delta y$，因此 $\Delta z^*=-i\Delta y=-\Delta z$，所以 $f'(z_0)=-1$．因为在任何 z 点，当 $z\to z_0$ 时的极限都与趋近的方向有关，所以函数在任何点都不是可微的，即不是解析的．[作为一般规则，$\dfrac{\Delta z^*}{\Delta z}=e^{-2i\theta}$，其中

$$\theta=\tan^{-1}(\Delta y/\Delta x),$$

因此在取极限时，它明显地涉及趋近的方向 (θ)]．

许多实数分析的可微性定理，在复数分析中也有其类似的定理．例如，

1．一个常数作为函数是解析的．

2．$f(z)=z^n(n=1,2,\cdots)$ 是解析的．

3．两个解析函数的和、积和商是解析的，但在商的情况下，要求分母在所考虑的域内处处不为零．

4．一个解析函数的解析函数也是解析的．

这些定理的证明过程完全类似于实数情形．

现在我们确定一个函数 $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在某点上可微的充分必要条件．首先我们假设 $w(z)$ 在某 $z=z_0$ 点实际是可微的．那么

$$w'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}+i\frac{\Delta v}{\Delta z}\right).$$

因为 $w'(z_0)$ 存在，它与 $\Delta z \to 0$ 如何趋近无关，也就是与 $\Delta y/\Delta x$ 之比无关. 如果我们沿实轴取极限，$\Delta y = 0$，$\Delta z = \Delta x$. 这时

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

另一方面，如果我们沿虚轴趋近原点，$\Delta x = 0$，$\Delta z = i\Delta y$. 则有

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

但是由可微性假设，这两个极限必须相等. 因此，分别让实部和虚部相等，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6.1}$$

式(6.1)就是人们所知的柯西-黎曼方程. 它给出可微性的必要条件. 我们是从可微性要求的两个特殊情况出发推导这个条件的，因此毫不奇怪，这个条件不是充分的.

$w(z)$ 在 z_0 可微的充分条件是：(一) 柯西-黎曼方程在该处成立，(二) $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的一阶偏导数在 z_0 点存在且连续.

证明是简单的. 首先，u 在 (x_0, y_0) 连续，因为它在该处是可微的. u 的偏导数按假设也是连续的. 由这些假设，我们可以从多变量函数的微积分[1)]得到

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,\end{aligned}$$

其中 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 是偏导数在 (x_0, y_0) 处的值，且当 Δx 及 Δy 二者都趋于零时，式中的 ε_1 和 ε_2 也趋于零. 同时利用对于 $v(x, y)$ 的类似的公式，我们得到

---

1) 例如看 G. B. Thomas, Jr. *Calculus and Analytic Geometry*, 4th Ed. Addison-Wesley Publishing Co., 1968 第 15-4 节 p. 503 (4) 式. 或 W. Kaplan, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Co., 1953 第 2-6 节 p. 84.

$$\Delta w = w(z_0 + \Delta z) - w(z_0) = \Delta u + i\Delta v$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$
$$+ i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y\right).$$

现在利用柯西-黎曼方程,[按假设,它在 (x_0, y_0) 点是成立的],我们有

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)$$
$$+ \Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4).$$

因此

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}$$
$$+ (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

因为

$$|\Delta z| = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2}, \quad |\Delta x| \leqslant |\Delta z|, \quad |\Delta y| \leqslant |\Delta z|,$$

因此

$$|\Delta x/\Delta z| \leqslant 1, \quad |\Delta y/\Delta z| \leqslant 1.$$

因为这些因子有界,而当 Δz 趋于零时, ε_1、ε_2、ε_3 和 ε_4 都趋于零,所以上式中的最后两项随 Δz 而趋于零. 因此在 z_0 处,有

$$w'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6.2}$$

这个极限与所取的路径无关,所以导数存在. 利用柯西-黎曼条件,我们也有

$$w'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{6.3}$$

例 考虑函数 z^3,我们有

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = u + iv.$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

所以柯西-黎曼方程处处成立．又因为偏导数是连续的，所以函数 z^3 的确是处处解析的．一个函数若在整个复平面上都是解析的，称作整函数．z^3 的导数可以利用式(6.2)或式(6.3)来求得，我们得到

$$\frac{\partial z^3}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3[(x^2 - y^2) + 2ixy] = 3z^2,$$

这是一个满意的结果．作为第二个例子，留给读者证明：函数

$$|z|^2 = zz^*$$

仅在原点可微，因此处处不解析．

从柯西-黎曼方程可以直接导出一个与物理有关的重要结论．如果该方程在某域内成立，且假如二阶偏导数连续，使我们能在混合偏导数中交换微分的次序，那么就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0. \tag{6.4}$$

用同样的方式可以得出函数 v 也满足二维拉普拉斯(Laplace)方程．因此一个解析函数的实部和虚部，如果有连续的二阶偏导数，就都满足二维拉普拉斯方程．在后面我们将利用积分理论证明，一个解析函数的二阶偏导数必然是连续的，因此这个限制可以去掉．(有趣的是，这些关于导数的定理只能通过积分来证明．)任何满足 $\nabla^2\phi = 0$ 的函数 ϕ 都称为**调和函数**．如果 $f = u + iv$ 是一个解析函数，那么 $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$，而 u 和 v 称为**共轭调和函数**．

给出两个共轭调和函数中的一个，利用柯西-黎曼方程可以找到另一个，准确到相差一个常数．例如函数

$$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2,$$

容易看出它是调和的．为了找出它的共轭调和函数，我们采取下面的步骤：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x),$$

其中 $\phi(x)$ 是 x 的某个函数．现在再利用另一个柯西-黎曼方程，

我们得到

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow -6xy+\phi'(x)=-6xy\Rightarrow \phi'=0$$

因此，$\phi(x)$ 必定是一个常数，而 u 的共轭调和函数是

$$v=2y-3x^2y+y^3+\text{常数}.$$

注意，函数 $w=u+iv=2z-z^3+c$ 是解析函数，我们知道这是必然的.

在结束柯西-黎曼条件的讨论前，我们利用作为物理学家的机会，对于这个条件给出另一更简短的推导，它是基于利用无穷小量而得到的. 设 $w=u+iv$，而 $w'=p+iq$，那么 $\delta w=w'\delta z$，或者取实部和虚部，得到

$$\delta u=p\delta x-q\delta y,\quad \delta v=p\delta y+q\delta x.$$

由此直接得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=p\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=q.$$

这些方程与柯西-黎曼方程 (6.1) 是相同的.

继续运用这种非正式的精神，我们可以推导出另一个密切相关的结论，它提供了对解析性含义的一些深入的理解. 仍令

$$w(z)=w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y).$$

我们现在证明：当且仅当柯西-黎曼方程成立时，$\partial w/\partial z^*=0$. 我们将不来说明这个对于 z^* 的导数是什么意思，而只是进行形式地微分，把导数作为一个符号来处理. 利用表示式

$$x=(z+z^*)/2 \text{ 及 } y=(z-z^*)/2i,$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z^*}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{1}{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(-\frac{1}{2i}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

如果柯西-黎曼方程成立. 最后的这个表示式为零. 反过来，如果

$\partial w/\partial z^* = 0$，上面最后一式的实部和虚部都必须为零，因此柯西-黎曼方程成立.

这个纯粹形式化的结论（它可以严格地被证明）试图说明，解析函数与 z^* 是无关的：它仅是 z 的函数. 因此解析函数确实是复变量的函数，而不是含两个实变量的复函数（见习题1），一般说来含两个实变量的复函数将按照关系：

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2}\right),$$

同时与 z 和 z^* 有关.

§6.2 一些基本的解析函数

在复数域内最有用的函数之一是指数函数，我们将它定义为：对于 $z = x + iy$，

$$e^z \equiv e^x(\cos y + i \sin y). \tag{6.5}$$

很容易由这个定义和我们前面的讨论得知，e^z 是一个整函数，且

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

从式(6.5)，很容易得到其他熟悉的指数函数的性质，例如 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. 我们也注意到 e^z 是周期为 $2\pi i$ 的周期函数：

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

从式(6.5)，我们看到

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

由此可得

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

这些关系式提示，对于任意复变量 z，我们可以定义

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{6.6}$$

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{6.7}$$

因为

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z,$$

计算 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的导数是很容易的，我们得到

$$\frac{d}{dz}\cos z=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=-\sin z,$$

$$\frac{d}{dz}\sin z=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}=\cos z,$$

这正是我们按照实变数情况下的经验所预期的结果．利用式(6.6)和式(6.7)，很容易证明所有我们熟悉的三角恒等式，如

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,$$

对于复变量的情形仍然成立．

复变函数正弦和余弦自然可以写成 $u(x,y)+iv(x,y)$ 的形式．例如

$$\begin{aligned}\sin z&=\frac{1}{2i}\left[e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right]\\&=\frac{1}{2i}e^{-y}(\cos x+i\sin x)-\frac{1}{2i}e^{y}(\cos x-i\sin x)\\&=\sin x(e^y+e^{-y})/2+i\cos x(e^y-e^{-y})/2.\end{aligned}$$

因此

$$\sin z=\cosh y\sin x+i\sinh y\cos x. \tag{6.8}$$

类似地，

$$\cos z=\cosh y\cos x-i\sinh y\sin x. \tag{6.9}$$

令 $x=0$，我们就得到有用的关系式：

$$\sin(iy)=i\sinh y \quad 和 \quad \cos(iy)=\cosh y.$$

我们也看到，柯西-黎曼条件是处处满足的．我们知道这是必然的．从式(6.8)和式(6.9)直接得到的其他性质是：

$$(\sin z)^*=\sin(z^*),$$

$$\sin(-z)=-\sin(z),$$

$$\sin(z+2\pi)=\sin(z).$$

利用正弦和余弦函数，我们定义其他熟悉的三角函数．例如