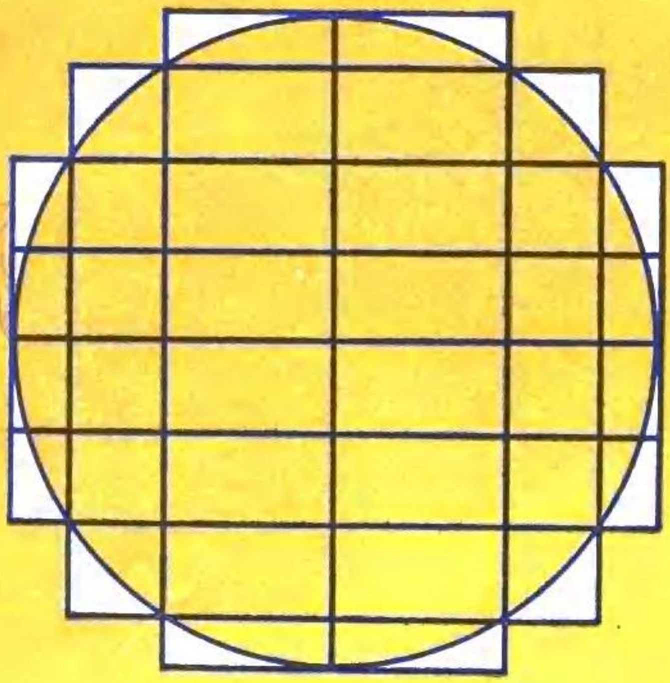
有限元法概论

YOUXIANYUANFA
GAILUN



湖南科学技术出版社

有限元法概论

〔美〕J. N. REDDY 著

邹仲康　吴瑞林　秦惟敏
廖双莲　邝美美　陈颖初
何益斌　译

湖南科学技术出版社

有限元法概论(美)
邹仲康　吴瑞林等译
责任编辑：陈一心
*
湖南科学技术出版社出版发行
(长沙市展览馆路3号)
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1988年6月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米 1/32 印张：21.5 字数：669,000
印数：1—1,400
ISBN 7—5357—0273—2
O·37　**定价：6.25元**
湘目87—41

目　录

---

* 概论性课程中可将带星号的内容删去，不影响课程的连续性。

译 者 序

有限元法是大型复杂结构或多自由度体系分析的有力工具，近20年来已广泛地用于工程结构、传热、流体运动、电磁等连续介质的力学分析中，并在气象、地球物理、医学等领域得到应用和发展。电子计算机的出现和发展，使有限元法在许多实际问题中的应用变成现实，并具有广阔的前景。

在我国，计算机正在各个领域得到推广应用。作为一个科学技术工作者，了解有限元法的基本知识，掌握计算机程序的编制方法和计算机的使用方法，就能使自己的工作出现飞跃。

由美国弗吉尼亚工学院和州立大学工程与力学教授J. N. Reddy所著的《有限元法概论》(1985年国际学生版)一书，是他多年来在工程、气象、地球物理、医学、数学等领域内，给学生讲授有限元课程和解决许多实际问题的基础上写成的。在本书的绪论、变分公式和近似计算方法，以及一维问题有限元分析等章节中，阐明了有限元的数学、力学基础和有限元法的基本概念与方法；在以后的章节中，进一步研究了二维问题及其它高等的问题，并提供了计算杆系结构和平面问题的三个典型的实用计算机程序。本书深入浅出，通俗易懂，是大学生、研究生以及工程技术人员学习有限元法和计算机应用技术的一本较新较好的教科书和参考书。

本书由邹仲康、吴瑞林、秦惟敏、廖双莲、陈颖初、邝美美、何益斌等同志翻译，由沈蒲生教授审校。由于我们水平所限，错误之处在所难免，欢迎批评指正。

译 者

1987年9月

作 者 序

导致写这本书的动机，来自在工程、气象、地质和地理、物理以及数学等许多领域给学生讲授多年的有限元课程。由于我是在大学和工业部门的学生和同事的一个主管和顾问，他们要求解答许多有关有限元方法的数学概念，这使我获得了经验，有助于我介绍解算许多科学研究和工程领域出现的微分方程的基本技巧。我与那些在固体力学和结构力学方面无基础知识的学生们的许多讨论，导致我决定写一本书，它应该弥补一些著作中相当不幸的缺陷。

本书为已修线性代数和微分方程的高年级大学生和一年级研究生而写。然而，材料力学、流体流量及热传导方面的额外课程（或对于所涉及的课题）应该使学生对本书所讨论的实例感到比较轻松。

在这本书中，有限元法是作为解微分方程的变分基本技巧来介绍的。以一个等效的变分方程代替由微分方程所描述的一个连续的问题，其近似解假定为近似函数ϕ_j的线性组合 $\Sigma c_j\phi_j$。参数c_j由有关的变分方程式确定。有限元方法为推导对于简单的子域的近似函数提供了一个系统的方法，用子域可以表示一个几何上复杂的域。在有限元法中，该近似函数是分段的多项式（即该多项式仅在子域上确定，该子域称为单元）。

本书采用的方法有时介乎纯数学方法和结构力学方法之间。从我作为一个工程师和自学应用数学的亲身经验，我知道，如果已知一个“公式”，但是对于这个问题及其近似性没有较深的洞察力，可能会出现多么不幸的后果。即使是最完善的理论导致的某

种准则（例如哪一种变分式是适当的，哪种单元是合乎需要的，什么是近似的特性等），没有一定的变分法的理论知识，我们就不能充分了解各个公式、有限元模型及其限制。

在变分法和有限元法的学习中，为了简便起见，有意回避高深的数学。然而，在第一章和第二章中包括起码的数学方法看来是必要的。在第二章中特别注意变分式的构成，因为这种练习在微分方程的有限元式中反复出现。本章涉及二个方面：第一，选择符合边界条件的近似函数；第二，获得用待定参数表示的代数方程的方法。因此，第二章不仅给读者准备在第三章和第四章中需要的一定的概念和方法，而且还启发他们考虑建立近似函数的系统方法，它是有限元法的主要特点。

第三章和第四章在介绍有限元方法时，我们回避传统的固体力学方法，而采用“微分方程”方法。“微分方程”方法较单个的特殊情况有更广的解释。但当要考虑特定的例子时，要阐明问题本身的基本情况。由于大量的物理问题可用二阶或四阶常微分方程来描述（第三章）或用二维拉普拉斯算子描述（第四章），我们对有限元的公式、插值函数的推导以及用这些方程式描述的问题的解给予了较大的关注。一些有代表性的例题都是取自各种工程实际，并依据热传导、流体力学和固体力学理论。由于本书是用来作为有限元法的基本课程的教科书，象非线性问题、壳体以及三维分析高等课题均将省去。

由于有限元法的实际应用最终取决于你在数字计算机上实现该方法的能力，书中设计的例题和习题引导读者用计算机实际地计算各种问题的解。第三章和第四章中提供了用计算机实现有限元法的详细论述。介绍了三个标准程序（FEM1D，FEM2D和PLATE），并通过几个例子来说明其应用。这些计算机程序很容易理解，因为它们都是按与书中的理论相同的思路而设计的。

书中提供了许多例题，其中大多数是将基本概念用于工程和应用科学的各个方面的具体问题。用符号■来表示这些例题的结论。在书中相当的范围内，还包含大量的习题来验证和补充对详述

概念的理解。对于希望获得本书中所研究问题更多知识的读者，在每章后列了许多参考书和研究论文。

在第一次阅读本书时，有些章节可不看（这些章节加了星号），到需要时再去读。

使用本教材作概论课程时，建议采用下列安排：

大学生		研究生	
第一章	自学	第一章	自学
第二章	2.1节（自学）	第二章	2.1节（自学）
	2.2节		2.2节
	2.3.1节—2.3.3节		2.3节
第三章	3.1节—3.4节	第三章	3.1节—3.7节
	3.6节—3.7节	第四章	4.1节—4.8节
第四章	4.1节—4.4节	第五章	学期论文
	4.7节		
	4.8.1节—4.8.4节		

由于3.5节和4.6节、3.6节和4.7节以及3.7节和4.8节之间的密切关系，它们可以一齐包括在内，还建议将3.6和3.7节（因而4.7节和4.8节）包括在3.2节之后。

作者要感谢为改进本书提出过意见和批评的所有学生和同事。作者还要感谢V. McCoy熟练地打印手稿，感谢N. S. Putcha先生和K. Chandrashekhara先生校对全文，以及感谢M. Slaughter和S. Hazleftt 编辑在本书出版中的帮助和合作。

J. N. Reddy

第一章　绪　论

1-1　概述

自然界中不论是生物、地质还是力学的每一现象，实际上都可借助于物理定理，按照与各种主要量相联系的代数方程、微分方程或积分方程来描述。确定具有奇特形状的孔洞、许多加劲杆以及承受静力、热力和空气动力的一个压力容器中的应力分布，查明在海水或空气中污染物质的浓度，以及为了求解并预示形成龙卷风和雷暴雨的机理而模拟大气中的气候，这些都是许多重要实际问题中的几个例子。推导这些问题的控制方程式虽然不是十分的困难，但要用精确分析方法对它们求解却是一个棘手的任务。这时，近似分析方法提供了求解的另一种手段。在这些近似方法中，有限差分法和变分法，诸如Ritz法和Galerkin 法，在文献中都是最经常采用的。

在一个差分方程的有限差分近似式中，以差商来代替方程式中的导数，该差商包含了在域中各个网格点上解得的值。引入边界条件后解这些方程式，可得各网点处的数值。有限差分法在概念上虽然简单，但它具有一些缺点。最明显的缺点是近似解的导数不准确、沿非线性边界难于引入边界条件、几何上复杂的域难于精确表达以及不适用于非均匀和非矩形的网格。

在微分方程的变分解中，将微分方程换成一个等效的变分式，然后假定其近似解为已知的近似函数ϕ_j的组合（$\Sigma c_j\phi_j$），参数c_j按变分式确定。变分法的缺点是对于具有任意域的问题难以建立

近似函数。

有限元法由于提供了推导近似函数的系统步骤，因此它克服了变分法的困难。这个方法优于其它方法，它具有两个基本特点：第一，以一批几何上简单的子域（称为有限元）表示一个几何上复杂的域；第二，对每一个有限元运用基本的概念推导近似函数。这个概念是用一个线性的代数多项式组合来表达一个任一连续的函数。按插值理论的概念推导近似函数，因此称它为插值函数。于是有限元法可解释成是变分法的一个逐段应用（例如Ritz法和加权残数法）。其中，近似函数是代数多项式，而待定参数代表边界上和单元内部有限个预定点（称为节点）处的解答值。由插值法理论可以发现插值函数的阶数（或次数）取决于单元中节点的数目。

1-2 发展简史

用一些离散的单元代表一个给定的域，并不是有限元法的新概念。人们发现古代数学家将一个内接于圆的多边形逼近圆的周长来估算π值。将圆看作一个有限个边长的多边形，预测的π值几乎精确到40位数字。在现代，该想法存在于航空结构的分析中，例如机翼和机身都看作是许多纵梁、壳和切边的板的组合。1941年Hrenikoff 提出了所谓网格法，它将平面弹性体看成是一批杆件和梁。在一个子域上采用逐段连续函数来确定接近未知函数的是Courant（1943）的著作。Courant 使用了一组三角形单元和最小势能原理去分析St. Venant 扭转问题。尽管在Hrenikoff（1941）和Courant（1943）的著作中可以找到有限元法的肯定的关键特性，正式的有限元法的文献则应归功于 Argyris和Kelsey（1960），以及归功于Turner、Clough、Martin和Topp（1956）。然而“有限元”这个名词是Clough于1960年第一次使用。从此以后，有限元应用的著作按指数规律地增多，现在有许多杂志主要地致力于有限元法理论的发展和应用。考察历史的发展和有限元法的基本理论，可以找到

专门致力于有限元法的介绍和应用的很多教科书（见各章末的参考文献）。文献中一些参考论文的述评和有限元法的计算机程序也列在有关文章的后面。

1-3 有限元法的基本概念

本节通过两个例题来介绍为有限元法打基础的基本概念。

1. 用三角形方程确定圆面积。

2. 确定不规则物体的质量(或重力)中心。

1-3-1 例题1

现在来考虑确定以一批三角形来表示半径为 R 的一个圆的面积。假定三角形的面积可以计算（即我们已知一个三角形的面积的方程式，见图1.1)。圆面积的近似值是用于表示圆的各三角形面积的总和。虽然这是一个很普通的例子，仍说明了有限元法的一些(不是全部)概念，我们将概述计算近似面积的步骤。为此，介绍一些用于任一问题的有限元分析的术语。

1. 有限元离散化。首先将连续的区域(即圆)看作是有限个数目 n 的子域(比方说三角形)的集合，称之为用三角形将域离散化。将每一个子域称为单元，将单元的集合称为网格。在上述情况下，我们将圆分成为5个 ($n=5$)三角形的网格，这样两种离散化示于图1.1a。由于所有单元尺寸相同，称该网格是均匀的网格。

2. 单元方程。取出一个典型的单元(即三角形 T_e)，并计算其性质(即面积)。我们将引入单元的基本方程（即计算面积的方程式）来计算要求的特性。在网格1中，令单元 e 的面积为 a_e，在网格2中，令单元 e 的面积为 $\bar{a}_e$，对于单元 e 可得：

$$a_e=\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\qquad \bar{a}_e=R^2\tan\frac{\pi}{n}\tag{1.1}$$

式中，R 为圆的半径。上述方程式称为单元方程。

3. 单元方程的集合与解。将单元特性相加，可得到圆的近似面积；这个过程称为单元方程的集合。在现在的情况下，该集

合依据于简单的想法，即集合的单元的总面积等于各个单元面积的和：

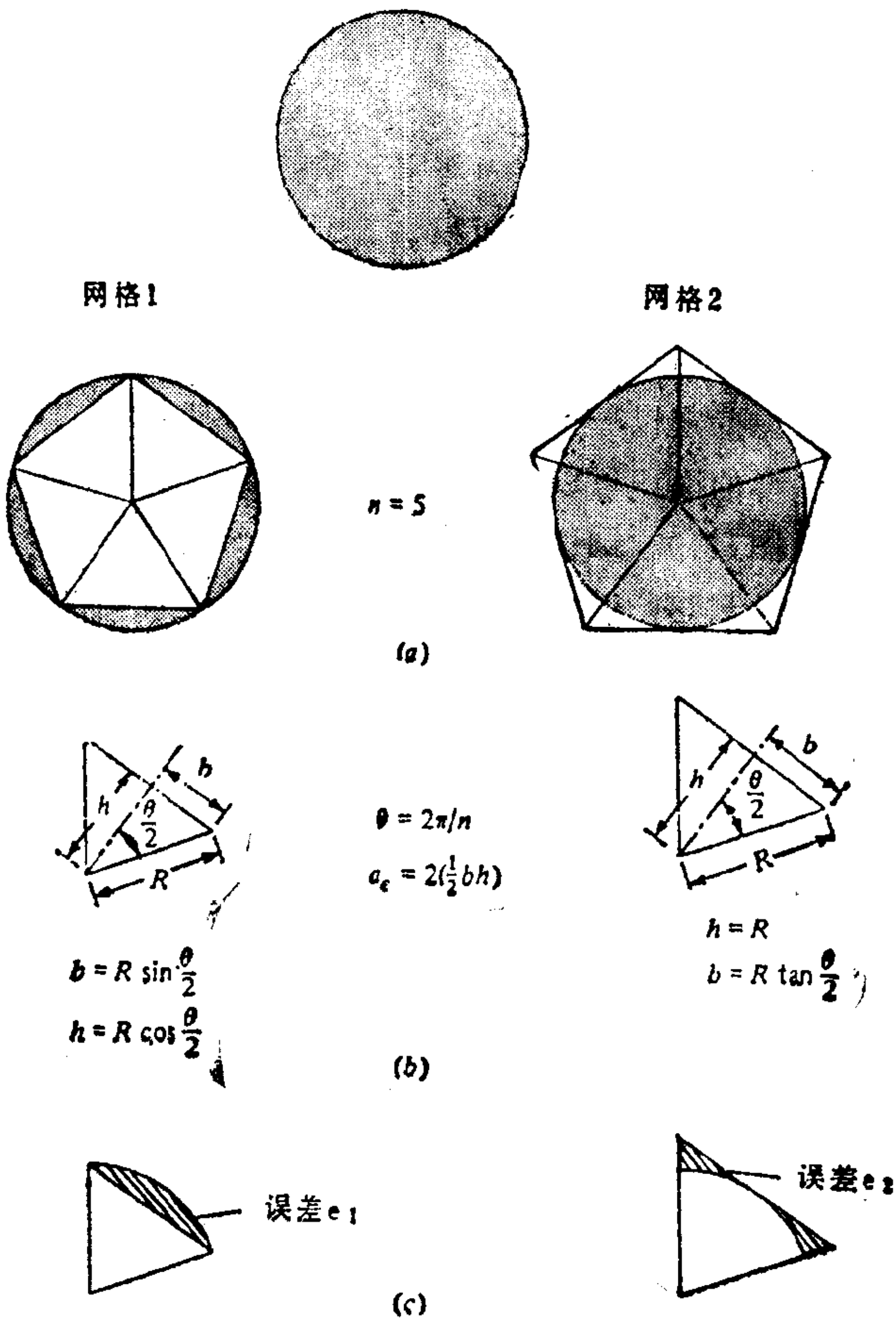


图1.1　圆的有限表示

(a) 有限元离散化；(b) 典型单元；(c) 边界的近似误差

$$A_1=\sum_{e=1}^{n}a_e \qquad A_2=\sum_{e=1}^{n}\bar{a}_e \tag{1.2}$$

由于网格是均匀的，在该网格中，对于每一个单元，其 a_e和$\bar{a}_e$是相等的，得

$$A_1^{(n)}=n\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\qquad A_2^{(n)}=nR^2\tan\frac{\pi}{n}\tag{1.3}$$

4. 收敛性和误差估算。对于这种简单的问题我们知道其精确解：$A_0=\pi R^2$。我们可以估计近似法中的误差，且证明当 $n\to\infty$ 时该近似解收敛于精确值。考虑典型单元e，近似法的误差等于扇形之差：

$$e_1=|S_e-a_e|\qquad e_2=|S_e-\bar{a}_e|\tag{1.4}$$

式中，$S_e=\frac{1}{2}R^2\theta$ 为扇形面积。因此，对于网格1和网格2中的单元其误差为：

$$\begin{aligned}e_1&=R^2\left(\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\e_2&=R^2\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\pi}{n}\right)\end{aligned}\tag{1.5}$$

将n乘e_i得总误差（称为总的误差）：

$$\begin{aligned}E_1^{(n)}&=R^2\left(\pi-\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\pi R^2-A_1^{(n)}\\E_1^{(n)}&=R^2\left(n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)-\pi\right)=A_2^{(n)}-\pi R^2\end{aligned}\tag{1.6}$$

现在来证明E_1和E_2随$n\to\infty$而趋近于零。令 $x=\frac{2}{n}$，得

$$A_1^{(n)}=R^2\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=R^2\ \frac{\sin\pi x}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_1^{(n)}=\lim_{x\to 0}R^2\ \frac{\sin\pi x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\pi R^2\ \frac{\cos\pi x}{1}=\pi R^2$$

同样　令$y=\frac{1}{n}$，得