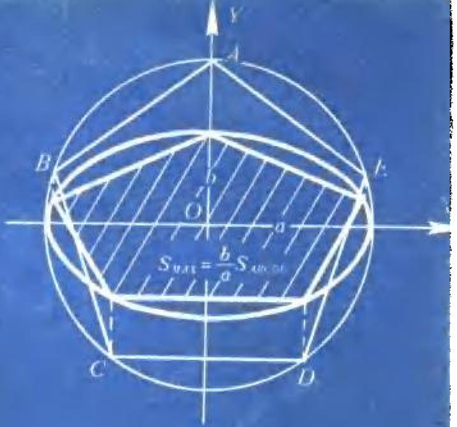
数学进修用书



余汶　月治　委言

函数的最大最小值

ANSHU DEZUI DAZUIXIAOZHI

浙江人民出版社

数 学 进 修 用 书

函数的最大最小值

余汶・月治・委言

浙 江 人 民 出 版 社

内 容 提 要

本书以初等数学为基本工具，较系统地介绍求函数的极值，函数的最大、最小值的基本知识与方法以及技能技巧.内容由浅入深，在常见的初等方法的基础上，逐步推广、补充、深化. 书中所配例题，涉及范围较广，有一定的典型性，并重视分析方法的介绍，对培养综合运用初等数学知识，提高分析和解决问题的能力有一定的帮助，可供教学参考.

数学进修用书

函数的最大最小值

余汶・月治・委言

*

浙江人民出版社出版

（杭州武林路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥堍）

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 10 字数228,000

1981年7月第 一 版

1981年7月第一次印刷

印数：1—11,000

统一书号：7103・1171

定 价：0.81 元

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的。随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加。在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务。当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切。本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料。编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实。同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学。丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学。

前　言

在日常生产和生活中，经常会遇到这样一类问题：例如将一根圆柱形木料锯成一条载重能力最强的横截面为矩形的梁；化学实验中，一定量的萃取剂，分几次操作，在什么情况下，每次取多少用量，萃取效果最好；在电学中已知电源电压及其内阻，负载电阻多大，它的输出功率最大；农业试验中，如何确定试验对象的代表值，使试验所得的n个观测值误差的平方和为最小……等等，都涉及到建立有关因素间的函数关系，寻求有关因素的最佳值问题。

本书主要是帮助读者解决前面所说的归结为具体函数关系的那类问题——即函数的极值问题。解决函数的极值问题，涉及的方法和知识是非常广泛的，笔者试图以初等数学为基本工具，对函数的极值问题作一些初步的研究和讨论。

全书首先介绍中学数学中常用于求解极值问题的一些基本方法，使读者对应用初等数学处理函数极值问题有个比较系统的了解，同时也把"极值"、"最大（或小）值"的概念严格区分开来。其次把常遇到的几类函数的极值问题，以及一般处理方法和特点，分别进行讨论，进而拓宽基本方法的使用范围，指出一些易犯的错误。然后，又提出有关多元函数的条件极值问题及处理中常用的初等方法，并介绍如何用求解多元函数的条件极值问题的方法来处理一些一元函数的极值问题。此外还补充一些利用光学原理、对称原理等，来求解极值问题的基本手

段，其中根据命题结构利用数学的推理方法，处理一些较难的，但结论往往又是很明显的极值问题时，具有很多的优越性。由于前面主要偏重于基本方法的介绍，因而在解题过程中，对一些影响结论正确性的注意点未特别加以强调，读者一般也容易忽视，所以特辟第五章予以介绍。基于实际的极值问题归结为数学问题时，常常会较多地联系到所谓几何极值问题，故而又设第六章介绍一些可用于解极值问题的几何事实。这方面的内容很多，限于篇幅，这里只好作个“开篇”。内中有关寻找特殊点的这类思想方法，在处理极值问题（不仅是几何问题）时，是具有一般意义的。最后，简略地谈一下高等数学中常见的用以处理函数极值问题的基本方法，这只是一般性的，在对待具体问题上，它不能，也不可能替代前面所论及的那些初等方法。

由于偏重方法的介绍，因此所选用的例题的解法并不一定是该题的最优解法。同样，为练习所作的提示，也并不一定是最优方法。其中有一些，还是某种处理方法的介绍，如用数学归纳法解题之类。此外，用初等方法解极值问题，实际上要涉及到代数、几何、三角、解析几何等初等数学的各部分知识的综合运用，因此，适当地在中学数学教学中穿插些这方面的问题，是有利于培养学生综合运用所学知识和分析问题、解决问题的能力的。

目　　录

第一章　基本知识 ………………………………………………(1)

§ 1　一元函数的概念 ………………………………………(3)

§ 2　一元函数的最大值和最小值 …………………………(14)

第二章　几类一元函数的极值 ……………………………(30)

§ 1　关于整式函数的极值 …………………………………(30)

§ 2　关于有理函数、无理函数与三角函数的极值 …………(47)

§ 3　应用例 …………………………………………………(67)

第三章　条件极值 ………………………………………………(83)

§ 1　条件极值的概念 ………………………………………(83)

§ 2　利用不等式(Ⅰ)：$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ ……(91)

§ 3　利用恒等式及其它的不等式 …………………………(98)

§ 4　条件极值例选 …………………………………………(107)

第四章　关于求极值问题的基本方法的补充 ……………(131)

§ 1　利用几何量之间的不等关系 …………………………(131)

§ 2　利用光学原理、对称原理 ……………………………(135)

§ 3　利用间接论证的方法 …………………………………(144)

§ 4　利用逐次考虑几个单变量的极值求多元函数的极值 ……………………………………………………………(148)

§ 5　应用例 …………………………………………………(158)

第五章　解极值问题的几个注意点 ………………………(171)

§ 1　注意待求量的多种可能情况 …………………………(171)

§ 2　注意变量的确切变化范围 ……………………………([illegible])

§ 3　注意求解途径的正确性 ……………………………………（197）
第六章　求极值中的特殊手段 ……………………………………（213）
§ 1　利用斐洛线、斐马点和托勒密定理 ……………………（213）
§ 2　利用寻找特殊点的手段解极值问题 ……………………（227）
§ 3 *　利用导数求函数的极值……………………………………（251）
练习答案与提示 ………………………………………………………（265）

第一章　基本知识

在数学上常将那种表现为求某些量的极端值（最大或最小值）的一类问题，统称为极值问题．例如

【问题 1】　在梯形木板上，以图 1.1 所示方式锯取 n 个矩形木条．现在要问：对于某一个确定的正整数 n，应如何安排与底边平行的锯线，才能使得到的 n 个矩形木条的面积之和为最大？

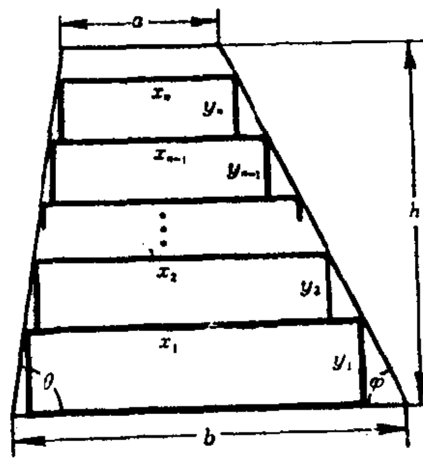


图1.1

若以 S 表示这 n 个矩形木条的面积之和，设梯形上底为 a，下底为 b $(b>a)$，高为 h，两底角分别为 θ 和 φ，且设 n 个矩形木条的长和宽依次为 x_1, y_1；x_2, y_2；…；x_n, y_n，则由图1.1得

$$x_i=b-(y_1+y_2+\cdots+y_i)(\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi),$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$

从而得到

$$S=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[b-(y_1+y_2+\cdots+y_i)\cdot(\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi)]\cdot y_i,$$

其中　　$0<y_1+y_2+\cdots+y_n\leqslant h.$

于是，本问题归结为求上式中 S 的最大值及其对应的 $y_i(i=1,$

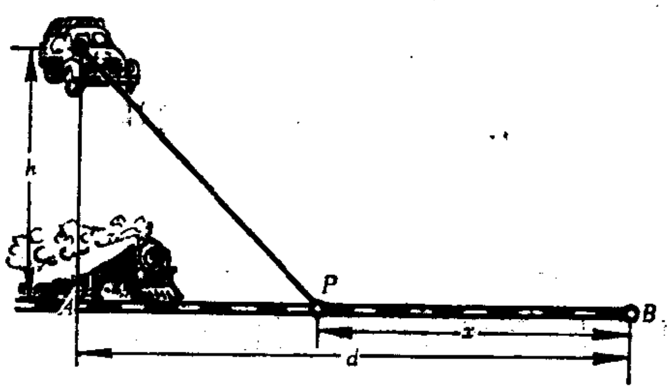


图1.2

$2, \cdots, n)$.

【问题 2】 如图1.2. AB 为铁道，CP 为公路，已知汽车和火车的速度分别是 v_1 和 v_2 ($v_1<v_2$)，那么，将物资由 C 运往 B 至少需要多少时间，且为此，转运站 P 应设在何处？

若设转运站 P 离 B 的距离为 x，由 C 经 P 至 B 所需时间为 T，则

$$T=\frac{x}{v_2}+\frac{\sqrt{h^2+(d-x)^2}}{v_1},$$

其中 $0\leqslant x\leqslant d.$

式中 h 为 C 到铁道的垂直距离 CA，d 为 AB 段铁道长. 于是，本问题便归结为求上式 T 的最小值及对应的 x. 顺便指出，如果本问题中的 v_1 和 v_2 分别表示汽车和火车的吨公里运费，那么，上面的表达式 T，就是表示每吨物资由 C 至 B 的运费，因而 T 的最小值就表示最少的运费了.

由上可见，极值问题不仅在数学上有理论意义，而且又有实践意义，是值得我们探讨的. 虽然解决有关函数的极值问题的一般方法，要应用高等数学，并且有一个数学分支——变分学来研究它. 但是，综合应用中学数理知识，却也能解决一部分. 本书着重用初等数学来研究有关函数的极值的一些理论和解法. 为此，本章先概述一下有关函数的极值的基本知识.

§ 1　一元函数的概念

上面两个例子分别归结为要寻求表达式S的最大值和T的最小值，并且〔问题2〕中的T可有两种不同的意义——所需的时间或运费．因此，为了进行一般的讨论，有必要与实际背景相分离，仅讨论所得表达式——函数——的极值．为了能开展有关函数的极值的讨论，必须搞清与极值有关的一些概念，首先是函数的概念．

1．函数的定义　我们来看〔问题2〕中的关系式

$$T=\frac{x}{v_2}+\frac{\sqrt{h^2+(d-x)^2}}{v_1},$$

其中　　$0\leqslant x\leqslant d.$

易知，给定一个$x(0\leqslant x\leqslant d)$值，由上式就有一个确定的$T$值与之对应．这种$x$与$T$之间的对应关系，便是读者熟悉的所谓函数关系．一般地，有如下定义：

定义　*设有两个变量x,y，如果对于变量x，在它的变化范围内的每一个值，按照某一法则或规律，变量y都有一个确定的值和它对应，那么，我们把变量y就叫做变量x的函数.*

通常，我们把“*变量y是变量x的函数*”这句话，用“$y=f(x)$”，“$y=\varphi(x)$”等来表示．记号“f”、“φ”等表示定义中所说的法则或规律，叫做**对应律**，并把变量x叫做**自变量**，y叫做**因变量**．自变量变化的范围——自变量的值所成的集合叫做**函数的定义域**，而函数值所成的集合叫做**函数的值域**．

2．函数概念的两要素　由定义可见，自变量和因变量间的对应律和自变量的定义域是函数概念的两个要素．随着它们的

确定，函数也就给定了．每一个函数都有它自己的对应律和定义域，这一点，在研究函数时应加以注意．此外，还应指出：

（1）函数的对应律有三种主要的表示方法，就是读者已熟知的列表法、图象法和公式法——解析法．在科学实验中，往往先通过试验，把变量间的函数关系用列表法和图象法表示，然后，再设法得出表达函数关系的公式．今后，我们将致力于讨论由公式表示的函数．此外，用公式法表示函数的对应律，不限于只用一个公式来表达．例如

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & (\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}); \\ x^2, & (\text{当 } x<0 \text{ 时}). \end{cases}$$

也确定了函数关系①．

（2）函数的定义域一般要由实际问题的意义来确定．例如〔问题2〕中的 $0\leqslant x\leqslant d$．但当我们研究的函数 $y=f(x)$ 是用一个公式表示时，如果未加说明，那么，此时函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合．例如，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的定义域就是一切实数 x；函数 $y=\beta x+\dfrac{\alpha}{x}$ $(\alpha\neq 0)$ 的定义域就是除 $x=0$ 外的一切实数 x．

在研究函数的定义域和值域的时候，经常要用到“数区间”的概念．所谓数区间，是指介于某两个实数之间的全体实数．那两个实数叫做区间的端点．具体地，

设 a,b 是两个实数，且 $a<b$．我们把由不等式 $a\leqslant x\leqslant b$，$a<x<b$，$a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$ 等给定的实数 x 的四种集合，分别表作 $[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$．它们分别叫做以 a，b 为端点的闭区间，开区间和半开区间（指后二种）；在数轴上分别表成如图1.3所示的形式．

注：①这种函数常叫做分段函数．

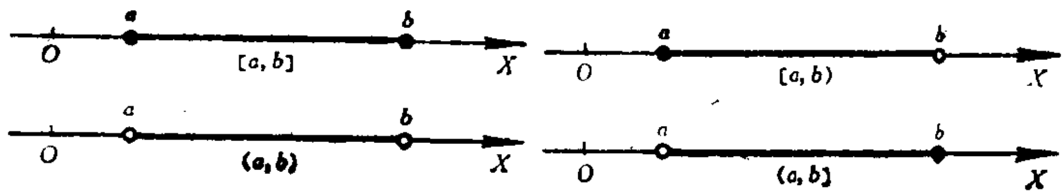


图1.3

我们用$(-\infty, +\infty)$表示全体实数x的集合，$(-\infty, +\infty)$叫做无限区间．“∞”读作“无穷大”，它不是一个数①；但认为“$-\infty$”表示小于任何实数，“∞”表示大于任何实数．同样，由不等式$x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$等所表示的实数x的集合，分别记成$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$，它们也叫做无限区间．

例如，函数$y=\sqrt{x-1}$的定义域是$[1, +\infty)$，值域是$[0, +\infty)$，

又例如，函数$y=\dfrac{1}{\cos x}$的定义域是$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中$k=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$，而值域是$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$．

3．函数的单调性　如果对函数$y=f(x)$定义域内的某个区间（可以是闭的、开的或半开的）内的任意两个自变量的值x_1和x_2：

（1）若当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则我们称函数$f(x)$在这个区间内是增函数（图1·4）；

（2）若当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，则我们称函数$f(x)$在这个区间内是减函数（图1·5）．

在某一区间内的增函数或减函数统叫做在这个区间内的单调函数．这个区间就叫做是相应的函数的单调区间．如果函数

注：①有些书上把“$+\infty$”、“$-\infty$”认作为“广义的数”．

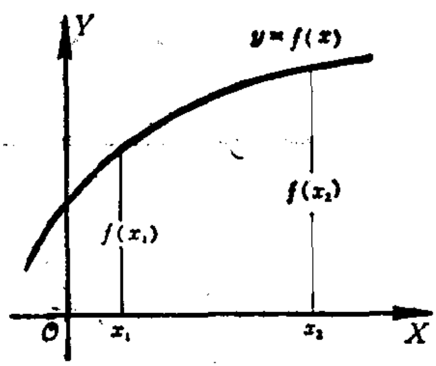


图1.4

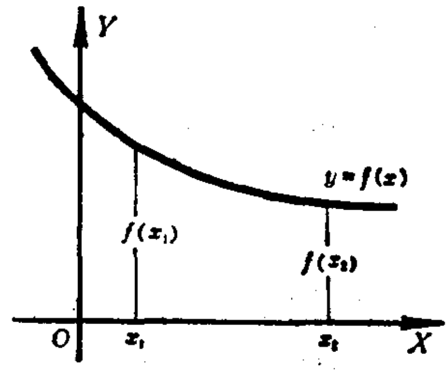


图1.5

$y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为增（或减）函数，我们也可简单地说成函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内为单调递增（或减）.

此外，对于闭区间，如 $[a,b]$，当自变量取端点值时，函数仍保持单调性不变，为表明这一点，我们常简单地说成函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上为单调函数. 对于半开区间，如 $(a,b]$（或 $[a,b)$）为表明自变量取端点值 b（或 a）时，函数仍保持其单调性，也常采取类似的说法.

例如，函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$、$\left[\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right]$ 上是单调递增的，而在闭区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$、$\left[\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right]$ 上是单调递减的. 这个性质读者是很熟悉的.

又例如，函数 $y=\alpha(x-\beta)^2+r$ 在区间 $(-\infty,\ \beta]$ 和 $[\beta,\ +\infty)$ 上分别是单调的. 事实上，我们不妨先考虑 x_1，x_2 是属于区间 $(-\infty,\ \beta]$，且 $x_1<x_2\leqslant\beta$，于是有

$$y_2-y_1=\alpha(x_2-\beta)^2-\alpha(x_1-\beta)^2$$
$$=\alpha(x_2-x_1)(x_1+x_2-2\beta).$$

因为 $\qquad x_1<x_2\leqslant\beta$,

故 $\qquad x_2-x_1>0,\ x_1+x_2-2\beta<0,$

从而 $$(x_2-x_1)(x_1+x_2-2\beta)<0.$$
由此知：

当 $\alpha>0$ 时， $y_2-y_1<0$；

当 $\alpha<0$ 时， $y_2-y_1>0$.

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ \beta]$ 上，当 $\alpha>0$ 时为减函数；当 $\alpha<0$ 时为增函数.

同样的讨论可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[\beta,+\infty)$ 上，当 $\alpha>0$ 时为增函数；当 $\alpha<0$ 时为减函数.

再例如，若 $\alpha,\beta>0$，则函数 $y=\beta x+\dfrac{\alpha}{x}$ 在区间 $\left(0,\ \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right]$ 上是减函数；在区间 $\left[\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}},\ +\infty\right)$ 上是增函数. 对于这个结论，先考虑 $0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$，则 $x_2-x_1>0$，$0<x_1x_2<\dfrac{\alpha}{\beta}$. 于是有

$$\begin{aligned}y_2-y_1&=\left(\frac{\alpha}{x_2}+\beta x_2\right)-\left(\frac{\alpha}{x_1}+\beta x_1\right)\\&=\beta\,(x_2-x_1)-\frac{\alpha(x_2-x_1)}{x_1x_2}\\&=\frac{\beta(x_2-x_1)}{x_1x_2}\cdot\left(x_1x_2-\frac{\alpha}{\beta}\right)<0,\end{aligned}$$

此即表示函数 y 在区间 $\left(0,\ \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right]$ 上是减函数. 同样可证得函数 y 在区间 $\left[\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}},\ +\infty\right)$ 上是增函数.

需要指出，考察函数的单调性区间，对于讨论极值是有重要的作用的. 例如函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b]$ 与 $[b,\ c)$ 上分

别是单调递增（或减）和单调递减（或增），如图1·6和图1·7

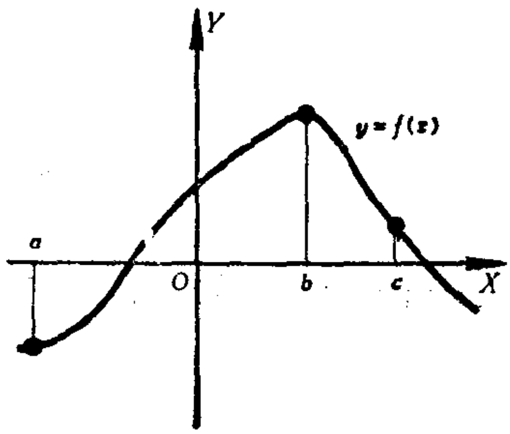


图1.6

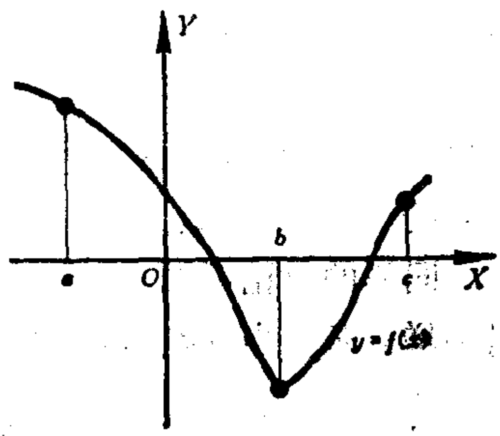


图1.7

所示，那么，对于任意的 x：$a<x<c$，均有

$$f(b)\geqslant f(x) \quad [\text{或} \quad f(b)\leqslant f(x)].$$

这就是说，函数 $f(x)$ 在区间 (a,c) 内，当 $x=b$ 时，达到最大（或最小）值①.

4.反函数　若两个变量之间存在函数关系，那么，在函数关系中，究竟哪一个是自变量，哪一个为因变量，要由讨论的问题的条件而定．例如，已知球的半径求球的体积，则

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

这里 V（体积）是 r（半径）的函数，而 r 是自变量，V 是因变量．但反过来，通过球的体积来计算球的半径时，则

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}},$$

这时 V 是自变量，而 r 恰是因变量了．因果关系在一定的条件下可以转化，反映在函数关系上，自变量和因变量的地位也可

注：①最大（最小）值定义见本章§2.1

以转化.

由单值函数 $y=f(x)$ 的定义,对于函数定义域 X 中任一个确定的 x,必与函数的值域 Y 中的一个确定的 $y(=f(x))$ 对应,但是,反过来,对于 Y 中的任一个确定的 y,对应 X 中的 x 就可能不止一个了. 例如图 1.8 所示为函数 $y=x^2$ 的图象,易见,对于 Y(即 $y\geqslant 0$)中任一个 y 值,对应 X(即 $-\infty<x<+\infty$)中的 $x_1=\sqrt{y}$ 及 $x_2=-\sqrt{y}$ 对于这种情况,我们就说:**x 是 y 的多值反函数**①. 特别地,如果总只有 X 中的一个确定的 x 与之对应,那么,我们说:**x 是 y 的单值反函数**. 为了表明反函数是与函数 $y=f(x)$ 密切联系的,常用记号"$x=f^{-1}(y)$"来表示 x 是 $y=f(x)$ 的反函数. 由上可见:

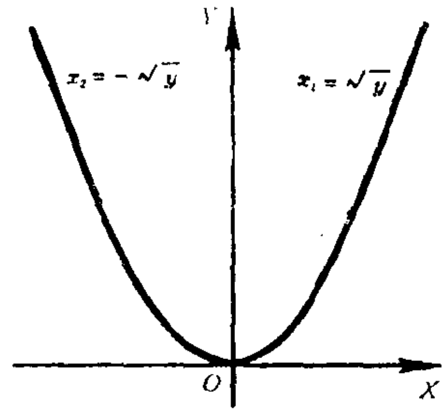


图1.8

	定义域	值域
函数 $y=f(x)$	X	Y
反函数 $x=f^{-1}(y)$	Y	X

我们今后研究的是单值函数的极值,并且,在讨论中常要考虑有关函数的单值的反函数. 一般来说,如果函数 $y=f(x)$ 的反函数存在的话,那么,只要把函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 分成若干部分,使在某一部分内,对应于值域 Y 内的任一个值均有、且只有 x 的一个值与之对应,这样,便可得到函数 $y=f(x)$

注:①部编高中数学课本中,不提多值反函数概念.