

数 学
物 理
方 程

蔡天亮 编

上海科学技术文献出版社

数学物理方程

蔡天亮 编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

数 学 物 理 方 程

蔡天亮 编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号 邮政编码 200031)

全国新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 201,000

1996 年 1 月第 1 版 1996 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—2,950

ISBN 7-5439-0553-1/O·099

定 价:14.50 元

目 录

第一章 定解问题	1
第一节 二阶线性偏微分方程	1
第二节 典型方程	7
第三节 数学模型	15
复习题	24
习题	25
第二章 分离变量法	27
第一节 齐次方程的混合问题	27
第二节 非齐次方程的混合问题	37
第三节 二维边值问题	45
第四节 分离变量法的基础	57
复习题	66
习题	67
第三章 贝塞尔函数	71
第一节 贝塞尔方程的通解	71
第二节 贝塞尔函数的性质	77
第三节 傅立叶-贝塞尔级数	82
第四节 贝塞尔函数的应用	88
复习题	94
习题	95

第四章 正交多项式	98
第一节 勒让德方程的通解.....	98
第二节 勒让德多项式的性质.....	104
第三节 连带勒让德函数.....	110
第四节 勒让德函数的应用.....	113
第五节 厄密特多项式.....	121
复习题.....	130
习题.....	131
第五章 积分变换法	133
第一节 傅立叶变换的概念.....	133
第二节 傅立叶变换的性质.....	139
第三节 傅立叶变换的应用.....	143
第四节 拉普拉斯变换的概念.....	146
第五节 拉普拉斯变换的性质.....	154
第六节 拉普拉斯变换的应用.....	162
复习题.....	166
习题.....	167
第六章 格林函数法	170
第一节 δ -函数.....	170
第二节 发展型方程的格林函数法.....	181
第三节 第一边值问题的格林函数法.....	190
复习题.....	198
习题.....	199
第七章 差分法	201
第一节 差分格式.....	201
第二节 热传导方程的差分解法.....	208
第三节 波动方程的差分解法.....	214
第四节 拉普拉斯方程的差分解法.....	218
复习题.....	225
习题.....	225
习题答案	227

第一章 定解问题

在本章中，我们先讲述偏微分方程的概念，然后通过一些具体例子，说明如何将物理问题，根据有关定律建立起相应的数学模型，由此引出数学物理方程中的定解问题。

第一节 二阶线性偏微分方程

一. 偏微分方程的概念

在《高等数学》中，我们已经知道，含有未知函数的导数或微分的方程，称为微分方程；如果未知函数是一元函数，那末该方程称为常微分方程；如果未知函数是多元函数，那末该方程称为偏微分方程。含有多元函数 $u = u(x, y, \dots)$ 的偏微分方程的一般形式为(这里记号 u_x, u_y, \dots 为偏导数： $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$)

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0. \quad (1.1)$$

偏微分方程中未知函数的偏导数的最高阶数，称为该方程的阶。例如

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (1.2)$$

$$u_x^2 + u_y^2 = (x^2 + y^2)(1 - u^2), \quad (1.3)$$

都是一阶偏微分方程。又如

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (1.4)$$

$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \quad (1.5)$$

$$u_t - u_{xx} = u|u|, \quad (1.6)$$

都是二阶偏微分方程。

如果偏微分方程中各项关于未知函数及其各阶偏导数都是一次的，那末该方程称为线性方程，否则称为非线性方程。如果非线性方程中所有的最高阶偏导数都是一次的，那末该方程称为拟线性方程。

例如，方程(1.2),(1.4)及(1.5)都是线性方程，而方程(1.3)及(1.6)都是非线性方程，且(1.6)还是拟线性方程。

线性方程经常记为

$$L[u] = f, \quad (1.7)$$

这里记号“ L ”表示某个线性算符， f 是自变量的已知函数，叫做方程(1.7)的自由项。如果 $f = 0$ ，那末方程称为齐次线性方程；否则，(1.7)又叫做非齐次线性方程。

例如，方程(1.2)及(1.5)都是齐次方程；方程(1.4)是非齐次方程。

下面，我们主要讨论来源于物理问题的二阶常系数线性偏微分方程(简称方程)。

设方程(1.1)为 n 阶偏微分方程，如果某函数 u 在给定的区域内具有直到 n 阶的连续偏导数，并且将 u 代入(1.1)式的左端其值都恒等于零，那末函数 u 称为在区域 D 内 n 阶方程(1.1)的解(或叫做古典解)。例如，在 xoy 平面上，函数 $u = \sin kx \sin ky$ 是二阶齐次线性方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.8)$$

的解，其中 k 为任意常数。

我们知道， n 阶常微分方程的通解依赖于 n 个任意常数，然而对于 n 阶偏微分方程，一般地说，其“通解”将依赖于 n 个任意函数。下面通过具体例子加以说明。

例1 试求方程 $u_x = 0$ 的解。

解 给定方程是一阶偏微分方程，它说明所求函数 u 不依赖于 x 。因此方程两端对 x 积分，得所求的解

$$u = g(y),$$

这里 $g(y)$ 是自变量 y 的任意连续可微函数.

例2 试求方程 $u_{xy} = 2x^2y$ 的解.

解 给定方程是二阶偏微分方程. 方程两端对 y 积分, 得

$$u_x = x^2y^2 + f_1(x),$$

其中 $f_1(x)$ 是自变量 x 的任意连续函数. 再对 x 积分, 得所求的解

$$u = \frac{1}{3}x^3y^2 + f(x) + g(y),$$

这里 $f(x) = \int f_1(x)dx$ 及 $g(y)$ 是两个任意的二阶连续可微函数.

例3 试求方程 $u_{xy} - u_x = 0$ 的解.

解 记 $v = u_x$, 原方程化为一阶方程

$$v_y - v = 0, \quad \text{或} \quad \frac{v_y}{v} = 1.$$

对 y 积分, 得

$$u_x = v = e^y f_1(x),$$

其中 $f_1(x)$ 是 x 的任意连续函数. 再对 x 积分, 得所求的解

$$u = e^y f(x) + g(y),$$

这里 $f(x) = \int f_1(x)dx$ 及 $g(y)$ 是两个任意的二阶连续可微函数.

例4 试求方程 $uu_{xy} - u_x u_y = 0$ 的解.

解 因为

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_x}{u} \right) = \frac{u_{xy}u - u_x u_y}{u^2} = 0,$$

所以对 y 积分, 得

$$\frac{u_x}{u} = f_1(x),$$

再对 x 积分, 得所求的解

$$u = f(x)g(y),$$

这里 $f(x) = e^{\int \frac{dx}{f_1(x)}}$ 及 $g(y)$ 是两个任意的二阶连续可微函数.

例5 试求方程 $u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 0$ 的解.

解 令 $u = e^{\lambda x + \mu y} v(x, y)$, 其中 λ, μ 为待定常数, 则

$$\begin{aligned}u_x &= \lambda e^{\lambda x + \mu y} v + e^{\lambda x + \mu y} v_x \\&= (\lambda v + v_x) e^{\lambda x + \mu y}, \\u_{xy} &= (\lambda v_y + v_{xy} + \mu(\lambda v + v_x)) e^{\lambda x + \mu y}, \\u_y &= (\mu v + v_y) e^{\lambda x + \mu y}.\end{aligned}$$

将以上各式代入原方程, 得

$$[v_{xy} + (2 + \mu)v_x + (1 + \lambda)v_y + (2 + 2\lambda + \mu + \lambda\mu)v] e^{\lambda x + \mu y} = 0.$$

选取 $\mu = -2, \lambda = -1$, 则上式化为

$$v_{xy} = 0.$$

仿照例2 推导, 得

$$v = f(x) + g(y),$$

这里 $f(x)$ 与 $g(y)$ 是两个任意的二阶连续可微函数. 于是给定方程的解为

$$u(x, y) = e^{-x-2y} [f(x) + g(y)].$$

二. 二阶线性偏微分方程的分类

二阶线性偏微分方程根据它的“特征”进行分类, 这里我们只讨论含有两个自变量 x, y 的二阶偏微分方程:

$$L[u] = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (1.9)$$

其中系数 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ 及自由项 f 都是区域 D 内 x, y 的连续函数.

显然, 在 D 内每一点 (x_0, y_0) 处, 方程(1.9) 中二阶偏导数的三个系数的值, 与实的对称二阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

或二次型

$$A(\bar{t}) = a_{11}\tau_1^2 + 2a_{12}\tau_1\tau_2 + a_{22}\tau_2^2 \quad (1.10)$$

建立一一对应关系. 我们规定, 如果方阵 A 的两个特征值同号, 即(1.10)是正定二次型或负定二次型, 那末方程(1.9)称为椭圆型方程; 如果方阵 A 的两个特征值异号, 即(1.10)是满秩的不定二次型, 那末方程(1.9)称为双曲型方程; 如果方阵 A 的一个特征值为零, 即(1.10)为降秩二次型, 那末方程(1.9)称为抛物型方程(对含有二个以上自变量的二阶偏微分方程, 也是按其相应的二次型的特性分为这三种类型.)

以上的分类是由解析几何中关于二次曲线分类而启发的:
二次代数方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0,$$

按照判别式

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

是负、是正与是零分为椭圆、双曲线与抛物线, 这里对应于方阵 A 的两个特征值分别是同号、异号与一个特征值为零.

例如, 特里谷米(Tricomi)方程

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

它对应方阵

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值为 y 及 1 . 因此, 当 $y > 0$ 时, 给定方程是椭圆型方程; 当 $y < 0$ 时, 是双曲型方程; 当 $y = 0$ 时, 是抛物型方程.

类似于线性代数中通过线性变换, 将二次型化为标准形那样, 我们可以利用自变量的可逆变换, 将线性方程(1.9)化为标准形式.

设新的自变量为 ξ, η , 它们与 x, y 的变换式为

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (1.11)$$

这里 $\xi(x, y)$ 与 $\eta(x, y)$ 都是二阶连续可微函数, 并且函数行列式

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

在所考虑的区域 D 内不为零. 可以证明: 存在互为单值的可逆变换(1.11), 将方程(1.9)化为如下的标准形式:

椭圆型方程:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.12)$$

双曲型方程:

$$u_{\xi\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.13)$$

或

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.14)$$

抛物线方程:

$$u_{\xi\xi} = F_4(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.15)$$

或

$$u_{\eta\eta} = F_5(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.16)$$

可见三类方程的标准形式是完全不同的. 以后我们将会发现不同类型的方程具有迥然相异的物理特性.

三. 线性偏微分方程的迭加原理

我们知道, 线性常微分方程的解具有迭加性质. 对于线性偏微分方程的解, 在一定条件下, 也成立着类似的迭加原理.

设函数 u_i 是方程

$$L[u] = f_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.17)$$

的解, 如果级数

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \quad (1.18)$$

收敛, 且可以逐项微分两次, 其中 $c_i (i = 1, 2, \dots)$ 是常数, 那末 (1.18) 的和函数 u 是方程

$$L[u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \equiv f \quad (1.19)$$

的解, 这里假设右端的级数收敛于 f .

特别是, 设 $u_i (i = 1, 2, \dots)$ 是齐次线性方程

$$L[u] = 0 \quad (1.20)$$

的解. 如果 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 收敛, 且可逐项微分两次, 那末 u 也是方程 (1.20) 的解 (见复习题第 3 题).

在今后的求解过程中, 我们将会经常应用这个广义迭加原理.

第二节 典型方程

一. 波动方程

一维波动方程是指如下方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (2.1)$$

其中 a 为正常数, 它属于双曲型方程. 方程

$$u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t) \quad (2.2)$$

与

$$u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z, t) \quad (2.3)$$

分别称为二维与三维波动方程. 这些方程来自振动波、电磁波与声波等物理现象. 这里 t 是时间坐标, x, y 及 z 是空间坐标, 未知函数 u 是有关的物理量. 下面我们举例说明这些方程的建立

例1 设有均匀柔软的弦在铅直平面上作微小横振动, 试确定弦的振动规律(这方程是历史上最早出现的数理方程, 它是英国数学家Taylor 在1715年提出来的.)

解 首先建立坐标系与选取一个物理量来描述弦的振动过程. 我们取弦的平衡位置为 ox 轴(横轴), 在某确定时刻 t , 弦在所处的铅直平面上的偏位移 u (向量数值化)为 ou 轴(纵轴). 于是弦上任一点 x 在任一时刻 t 的偏移量 $u = u(x, t)$ 完全描述了弦的振动过程.

其次, 根据Newton 第二运动定律来推导 $u(x, t)$ 所满足的关系式. 我们采用物理学中的“元素分析法”, 在弦上任取一微小弧段 MM' (图1-1), 分析这弧段的受力情况, 从中找出弦振动的一般规律.

假设弦是柔软的, 所以它有弹性, 不会抵抗弯曲, 要它呈什么形状均可, 从而在弧段 MM' 两端所受的内应力——张力是沿着弦的切线方向. 又因为假设弦是作微小横振动, 所以弦的切线的倾角 α 及 α' 很小, 即有

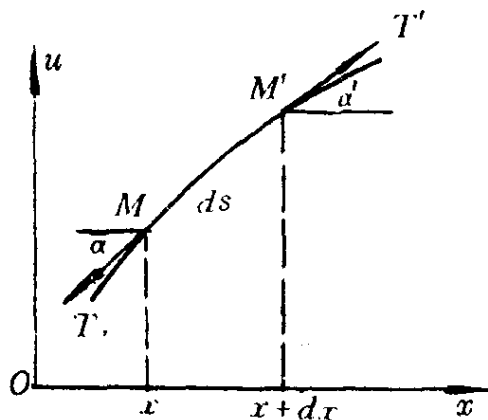


图1-1

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= u_x|_{(x,t)} \approx 0, \\ \operatorname{tg} \alpha' &= u_x|_{(x+dx,t)} \approx 0. \end{aligned}$$

于是, 一方面弧段 MM' 沿水平方向所受的合力为零(只作横振动):

$$T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = 0.$$

又因为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx 1, \quad \cos \alpha' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \approx 1,$$

所以 $T' = T$, 即张力与弦上点的坐标 x 无关.

另一方面在时刻 t , 弧 MM' 的长度 ds 近似等于 dx :

$$ds = \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx dx.$$

这说明在振动过程中, 弦长不随时间变化. 根据Hooke 定律: 物体伸长与应力成正比, 可见张力也不随时间变化.

因此, 根据弦是柔软的且作微小横振动的假定(事实上, 这是为了抓住事物的本质, 添加的理想化条件), 我们得出弦上各点处在任一时刻的张力的的大小是常数 T .

弧段 MM' 沿铅直方向所受的合力为

$$T \sin \alpha' - T \sin \alpha - \rho g ds,$$

其中 g 为重力加速度, ρ 为弦的线密度(由于弦是均匀之设, 可知 ρ 为常数). 按Newton 第二运动定律: 合力等于质量乘以加速度, 得

$$T \sin \alpha' - T \sin \alpha - \rho g ds = \rho ds \cdot u_{tt}(x, t). \quad (2.4)$$

将 $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx u_x(x, t)$, $\sin \alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' \approx u_x(x + dx, t)$ 及 $ds \approx dx$ 代入(2.4) 式, 得 u 满足的关系式:

$$T[u_x(x + dx, t) - u_x(x, t)] - \rho g dx = \rho u_{tt}(x, t) dx.$$

根据微分中值定理(也可利用微分近似增量)

$$u_x(x + dx, t) - u_x(x, t) = u_{xx}(x + \theta dx, t) dx,$$

($0 < \theta < 1$) 上式化为

$$T u_{xx}(x + \theta dx, t) dx - \rho g dx = \rho u_{tt}(x, t) dx.$$

因为 $u_{tt} \gg g$, 所以上式左端第二项可略去. 令 $dx \rightarrow 0$, 整理可得齐次线性方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (2.5)$$

其中常数 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 它与弦的质地有关.

通常把(2.5) 式叫做弦的自由振动方程.

如果弦在振动过程中受到外力密度为 $F(x, t)$ —— 在 x 处 t 时刻单位长度上所受的外力(方向平行 ou 轴, 向上取正值, 向下取负值), 那末相应于(2.4) 式的关系式为

$$F(x, t) dx + T \sin \alpha' - T \sin \alpha - \rho g ds = \rho ds u_{tt}(x, t).$$

通过类似的推导, 可得非齐次线性方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (2.6)$$

其中 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$. 通常把(2.6)式叫做弦的强迫振动方程, 这时自由项(右端项) $f(x, t)$ 与外力有关. 可见(2.5),(2.6)都是一维波动方程.

同样, 对于薄膜(如鼓面)的微小横振动, 其偏位移 $u(x, y, t)$ 满足二维波动方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t), \quad (2.7)$$

这里 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $f(x, y, t) = \frac{1}{\rho} F(x, y, t)$, 其中 T 为膜的张力, ρ 为均匀膜的面密度, $F(x, y, t)$ 为外力密度——单位面积上所受的(方向平行 ou 轴).

对于交变电场(或磁场)

$$\vec{E} = E_1(x, y, z, t)\vec{i} + E_2(x, y, z, t)\vec{j} + E_3(x, y, z, t)\vec{k},$$

其各分量 $E_l(x, y, z, t)$ ($l = 1, 2, 3$) 在无源的空间部分满足三维波动方程:

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0,$$

这里常数 $a = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}}$, 其中 ϵ, μ 分别为真空中的介电系数与磁导率.

例2 设有一对(一来一往)输电线, 试确定电路的变化规律.

解 我们知道, 电路的变化规律是由电路中任一点 x 处在任一时刻 t 的电流强度 $I = I(x, t)$ 或电压 $V = V(x, t)$ 来描述的.

为找出电流与电压变化的一般规律, 我们在电路中任取一微小间隔 $(x, x + dx)$, 设想这一小间隔是一个集中参数系的线性电路(图1-2), 且以 R, L, C, G 分别表示该回路中每单位长度上的串联电阻、串联电感、分布电容(两导线间的电容)与分布电导(两导线电损耗).

根据Kirchhoff 第一定律(节点电流定律): 流经节点A 的电流之代数和为零, 即有

$$I(x, t) - I(x + dx, t) - CdxV_t - GdxV = 0. \quad (2.8)$$

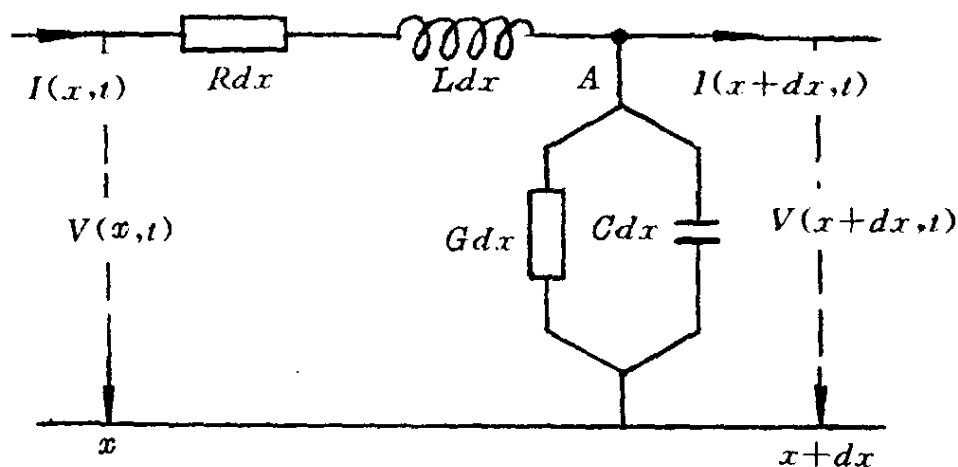


图1-2

另外, 按Kirchhoff 第二定律(回路电压定律): 回路中电压降之和等于电动势的代数和, 即有

$$RdxI + LdxI_t + [V(x + dx, t) - V(x, t)] = 0. \quad (2.9)$$

令 $dx \rightarrow 0$, 按偏导数的定义(也可仿照例1, 利用微分中值定理或微分近似增量), (2.8) 与 (2.9) 式分别化为

$$\begin{cases} I_x + CV_t + GV = 0, & (2.10) \\ V_x + LI_t + RI = 0, & (2.11) \end{cases}$$

这就是电路中电流 I 及电压 V 满足的偏微分方程.

由 (2.10) 与 (2.11) 所构成的方程组叫做电报方程组.

如果略去 R 与 G (例如, 海底电缆的导线质地优良, 即 $R \approx 0$, 且绝缘良好, 即 $G \approx 0$), 那末, 由电报方程组可得(通过微分等运算)

$$I_{tt} - a^2 I_{xx} = 0 \quad (2.12)$$

及

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, \quad (2.13)$$

其中常数 $a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. 这两个方程叫做高频传输线方程, 它们也是一维齐次波动方程.

二. 热传导方程

一维热传导方程是指如下方程:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (2.14)$$

其中 a 为正常数, 它属于抛物型方程. 方程

$$u_t - a^2 (u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t) \quad (2.15)$$

与

$$u_t - a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z, t) \quad (2.16)$$

分别称为二维与三维热传导方程. 这些方程来自热量在传热体中的流动, 物质的扩散等物理现象.

例3 热量在均匀且各向同性的传热体中流动, 试确立热量流动规律.

解 在传热体中, 由于各点的温度不同, 将发生热量从高温区向低温区流动. 因此在传热体内的任一点 (x, y, z) 处在时刻 t 的温度 $u = u(x, y, z, t)$ 的分布, 完全描述了热传导的一般规律. 仿照例1 的推导过程, 我们在传热体内任取一微小立体 V , 其封闭表面记为 S , 它的外法线方向记为 \vec{n} , dS 为曲面元(图1-3).

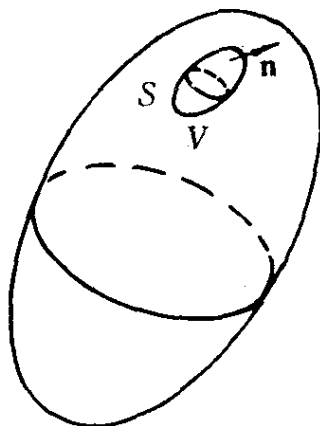


图1-3

下面分析 V 中各类型的热量. 设传热体内具有热源发出热量, 它的强度为 $F = F(x, y, z, t)$ (单位时间单位体积发出的热量), 则在微小立体 V 中在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内热源发出的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(x, y, z, t) dV dt. \quad (2.17)$$

在热学中, 成立 Fourier 热流定律: 在 dt 时间内通过曲面元 dS 的热量 dQ 与 dt 、 dS 及温度梯度的大小成正比, 即