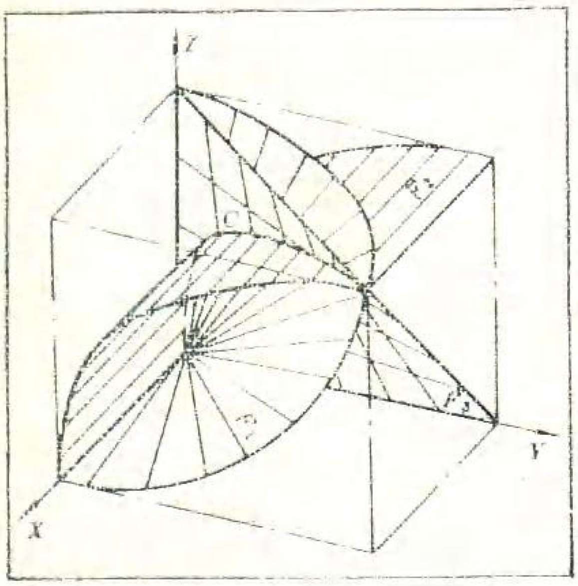
高等画法几何学



国防工业出版社

高等画法几何学

叶玉驹　简召全 等编著

國防工業出版社

内容提要

本书涉及到工程图学理论与应用的一些主要领域，是一本在工科高等院校工程图学的基础上进一步提高性的著作。

全书共分六篇。第一篇几何变换，阐述了各种线性的和非线性的变换理论，为图解画法几何的度量问题和位置问题提供了各种简化的方法。第二篇曲线曲面，为曲线曲面的几何性质分析、曲线曲面拟合以及用画法几何方法分析微分几何问题、为工程领域中曲面设计提供了理论基础和图解作图方法。第三篇多维画法几何，概述了多维几何的基本概念，阐述了四维以至多维画法几何的图示图解理论和方法，并介绍了它在图解多组分和多变量问题（如线图、相图、曲面设计、线性规划）中的实际应用。第四篇轴测投影，提供了系统的轴测投影理论，为解度量和位置问题提供了作图方法，并讨论了多维轴测投影的理论和四维轴测图的画法。第五篇空间角度的计算与度量，介绍了空间角度计算、度量的各种方法（着重在极射赤平投影图及球面三角的方法），介绍了机械产品和工艺设备（如刀具、夹具）的设计与制造中常遇到的、由歪斜轴线或平面构成的空间角度的图解、计算、度量的理论和方法。第六篇 n 维逻辑空间图像，把图学的研究与应用范畴从连续对象扩展到离散对象，可用于图解有关布尔代数、数理逻辑等方面的问题以及逻辑线路的设计。

本书在图示图解方面加深了理论、扩大了方法，并均附有应用实例。可适用于高等院校及中等专业学校的教师、研究生、高年级学生以及工程技术人员作为参考书或教材。

高等画法几何学

叶玉驹　简召全　等编著

责任编辑　张仁杰

*

国防工业出版社出版、发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（政编码100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16　印张$47^{5}/_{8}$　插页 2　1116千字

1990年6月第一版　1990年6月第一次印刷　印数：0,001—1,600册

ISBN 7-118-00371-9/O24　定价：26.90元

科技新书目　218-045

前　言

“高等画法几何”一词，近年来在我国工程图学界已开始流传，但对其含义和范畴的理解不尽相同。本书定名为《高等画法几何学》是考虑到本书较普通《画法几何学》有本质上的发展。这主要表现在如下几方面：

1）从把空间形体看成为刚体，由它的运动（或不动）辅以投射达到变换图形的目的，发展到把空间形体看成为弹性体，以更为抽象的映射概念进行几何变换，从而达到变换图形的目的。

2）在曲线、曲面上，由二次代数曲线、曲面发展到三次或更高次；由用图解法解一般几何问题，发展到解微分几何问题；并为曲面设计打下基础。

3）在空间的维数上，由三维发展到四维或更高维。这就为用画法几何方法，图解科技中的多组分、多变量问题打下了基础。

4）在轴测投影上，由着重画法发展到讨论轴测理论，由图示发展到图解；由平行轴测投影发展到中心轴测投影；由三维轴测投影发展到四维轴测投影。

5）在空间角度的图解与计算上，由利用正投射与解析几何相结合的方法，发展到利用极射赤平投影与球面三角相结合的方法。

6）把图学研究和应用的范畴，由连续的对象发展到离散对象。

全书共分六篇，各篇在内容上有一定的联系，但每一篇都自成系统，有相对的独立性。读者可根据需要，学习全部内容或部分篇章。

本书的内容涉及到数学，尤其是几何学（如解析几何、射影几何、微分几何，多维几何等等）的各个领域。读者在阅读本书时，为了加深理解，必要时可参阅这些方面的教材或参考书。读者如果有这些方面的基础，就为阅读本书创造了更为有利的条件。

本书是在为培养研究生和高等院校教师进修使用的讲义的基础上整理而成的，在编著过程中曾参阅过国内外有关著作和文献，以及作者近年来的研究成果。

本书的各位作者作了如下的分工。第一篇：叶玉驹；第二篇：周克绳；第三篇：简召全；第四篇：齐信民；第五篇：陈英梁；第六篇：张云鹤。并由叶玉驹、简召全主编。

限于水平，书中可能有不少缺点、错误，恳请批评指正。

目　录

第一篇　投射方法和几何变换

第二篇　曲线　曲面

第三篇　多维画法几何

第四篇　轴测投影

第六篇　n维逻辑空间图像及其应用

第一篇 投射方法和几何变换

在一个投射系统中有三个基本要素：空间形体、投射线和投影面。

在相互垂直的两（或三）投影面体系中，将确定位置的空间形体向基本投影面进行正投射，就得到基本投影图。

这样得到的基本投影图，对于解决画法几何中的度量问题和定位问题往往是不方便的。为了使解题简化，就需要作出便于解题的辅助投影图。为此，可从投射三要素的变换中寻找解决问题的途径。

1．空间形体的变换

有两类变换。一类是空间形体作刚体运动，从而得到空间形体相对于投影面有利的位置。如传统变换法中的旋转法、平移法、重合法等。

另一类是使空间形体得到有规律的弹性变形（变换），从而可得到便于解题的投影图。

2．投影面的变换

通常都是采用平面作为投影面。当在基本投影面上不能直接得到便于解题的投影图时，可以选定新的辅助投影面。新投影面可以与基本投影面垂直（例如传统变换法中的换面法），也可以是一般位置的。

此外，还可选用曲面作为投影面。

3．投射线的变换

通常采用的投射线为直线。

在采用平行投射法时，为了得到新投影，可以变换投射方向。新的投射方向可以垂直于新选定的投影面（直角辅助投射），也可倾斜于选定的投影面（斜角辅助投射）。

还可以变换投射方法。采用中心投射法，用以得到便于解决问题的新投影。

此外，还可变换投射线的性质，即采用曲线作为投射线（曲线投射法）。

上述对三个投射要素的变换可以单独进行，也可结合进行。

所谓几何变换，主要是指空间形体连同它所在的空间的变换。

在本篇中除阐述四种常用的几何变换法之外，还介绍了两种辅助投射法。至于传统的变换法（指旋转法、换面法等）已在普通画法几何学中有过详细的讨论，这里就不再重复。

第一章　直线辅助投射法

在解决画法几何问题时，为了得到便于解题的投影形式，经常需要画出辅助投影图。当以直线作为投射线，向选定的任意位置平面（其中包括基本投影面）进行投射，从而得到有利于解题的辅助投影图，这种方法就称为直线辅助投射法。

根据采用的所有投射直线在空间都交于一个固有点，或交于非固有点，这种辅助投射法分为中心辅助投射法和平行辅助投射法。

在平行辅助投射法中，又包括斜角辅助投射法和直角辅助投射法。

本章将分别讨论这几种辅助投射法的原理、作图规律及其应用。

§1-1　斜角辅助投射法

一、基本概念

设已知投射方向 S 和辅助投影面 P。要求空间任意点 A 沿方向 S 在 P 面上的辅助投影，只要过点 A 作平行于 S 的投射线 S_A，S_A 与 P 面的交点 A_1 即为点 A 在 P 面上的斜角辅助投影。因此可以按照求线面交点的方法求出空间任意点的斜角辅助投影。

如图1-1 所示，已知投射方向 S，辅助投影面 P 由相交两直线 L_1 和 L_2(交点为 P_0) 确定。可按下述步骤求出任一点 A 在 P 面上的斜角辅助投影：

1）过点 A 作投射线 $S_A//S$；

2）包含 S_A 作铅垂辅助面 R；

3）求平面 R 与 P 的辅助交线 $1K$。在图中 P_F 为平面 P 在Ⅱ、Ⅳ分角平分面 F 上的迹线（$P\cap F=P_F$），所以辅助交线 $1K$ 的两投影的交点（$k\equiv k'$）一定在 P_F 上；

4）先求出 $s'_a\cap 1'k'=a'_1$，再利用投影关系求出 a_1（$a_1\in 1k$）。a'_1，a_1 即为点 A 在 P 面上斜角辅助投影 A_1 的两个投影。

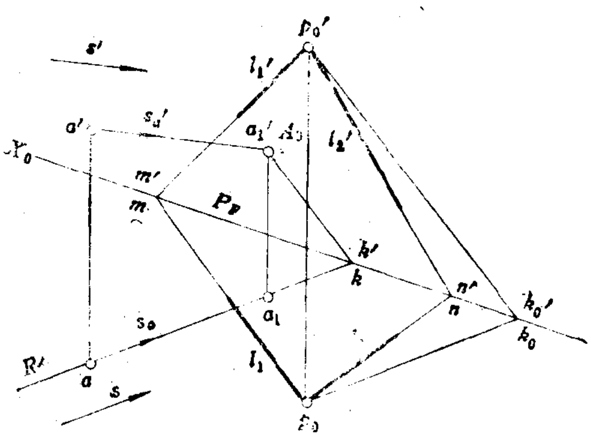


图　1-1

在解决具体问题时，由于只要知道 A_1 的 V 投影 a'_1 即可，所以一般情况下不再求出 a_1。同时，我们就把 A_1 的 V 投影 a'_1 称为点 A 的斜角辅助投影，并标记为 A_0。

在上述作图过程中应注意到两点：

1）辅助交线 $1K$ 的两投影一定交于 P_F 上（$K\in P_F$，$k'\equiv k$）；

2）因为辅助交线的 H 投影，$1k\equiv s_a$，所以为了求出点 A 的辅助投影 A_0，剩下的主要是求出该交线的 V 投影 $1'k'$。又因 $k'\equiv k\in P_F$，所以只要知道 $1'k'$ 的方向，就很容易画出 $1'k'$。求 $1'k'$ 的方向是不难的。在图1-1中自 p_0 作 $p_0k_0//s$(也$//1k$)，$p_0k_0\cap P_F=k_0\equiv k'_0$，连 $p'_0k'_0$ 即为 $1'k'$ 的方向（$1'k'//p'_0k'_0$）。

有了 $p'_0k'_0$ 以后，实际上不求出公共点 1 也可作出辅助交线的 V 投影。

因为点A的辅助投影A_0一定在$1'k'$上；所以我们把$1'k'$称为载影线。而$p_0'k_0'$则为载影线的方向。

因为投射线的H投影s_a与载影线的交点$k(k')$一定在P_F上，P_F实际上起着投影轴的作用，所以把它称为辅助投影轴，并标记为X_0。

图1-2所示为任一点A沿方向S，向一般位置的辅助投影面（由点P_0和Ⅱ、Ⅳ分角平分面的迹线P_F确定）投射，求其辅助投影A_0的基本图解图。

由图1-2可见，求A_0的过程包括四个环节，其中环节①③分别为投射线的H、V投影；环节②为载影线；环节④为辅助投影轴$X_0(\equiv P_F)$。

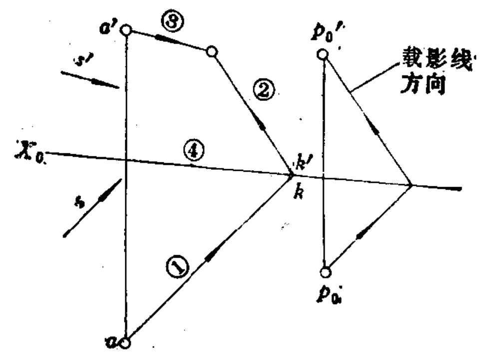


图 1-2

图1-2的右侧为载影线方向的图解图。

应当注意到，空间任意点沿同一投射方向，向同一辅助投影面进行辅助投射时，所有的点都有共同的辅助投影轴X_0（环节④），而相应于各点的环节①②③都应是相互平行的。

二、直线的斜角辅助投射

求出直线上任意两点的斜角辅助投影，即可得到直线的斜角辅助投影。如图1-3所示，已知投射方向S，辅助投影面P（由点P_0和P_F确定），求已知直线AB的辅助投影的过程已清楚地表示在图上。

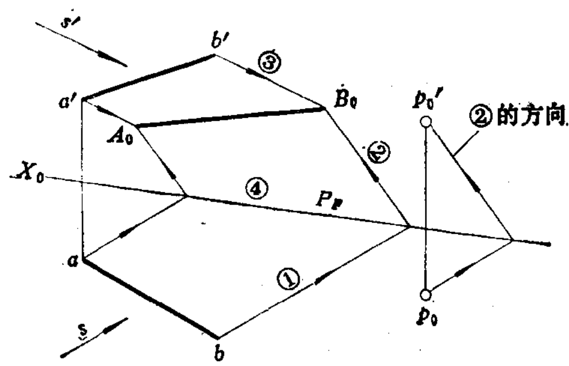


图 1-3

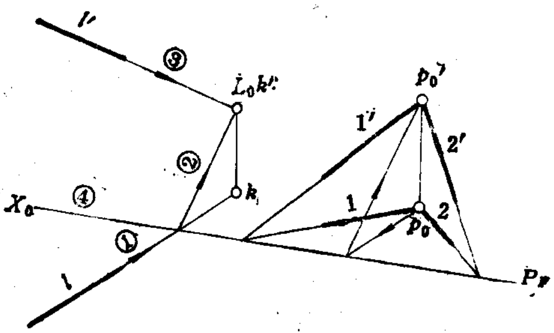


图 1-4

当解决具体问题时，往往要求使直线在某平面上投射为点，此时只要选择该直线的方向作为投射方向即可。

例 求直线L与平面P（由相交二直线1和2确定）的交点K（图1-4）。

解： 该问题可转化为直线L沿它本身的方向，向已知平面P进行辅助投射，求直线L在P面上的辅助投影L_0的问题。实际上，因L_0有聚积性，所以它也就是所求交点K的V投影k'。

在图1-4上，首先求出P_F，也就是辅助投影轴X_0（环节④），并求出载影线②的方向。然后按照求辅助投影过程的四个环节，求出直线L的辅助投影L_0。而$k'\equiv L_0$，由k'即可求出k。

三、平面的斜角辅助投射

将确定平面的几何元素（点或直线）进行斜角辅助投射，就可得到平面的辅助投影。

如果要使已知平面对已选定的辅助投影面成为投射面，只要选择已知平面上任意一条直线的方向作为投射方向即可。

如图1-5 所示，已选定的辅助投影面为P（由点P_0和P_F确定），为使$\triangle ABC$平面成为对P的投射面，在图中选择了与AB边平行的方向S作为投射方向。在此条件下，$\triangle ABC$平面在P面的投影为直线$A_0B_0C_0$，有积聚性。其作图过程已如图示。

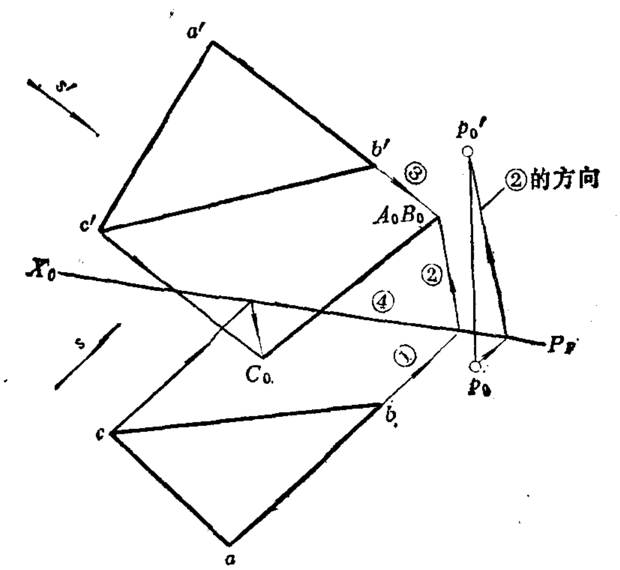


图 1-5

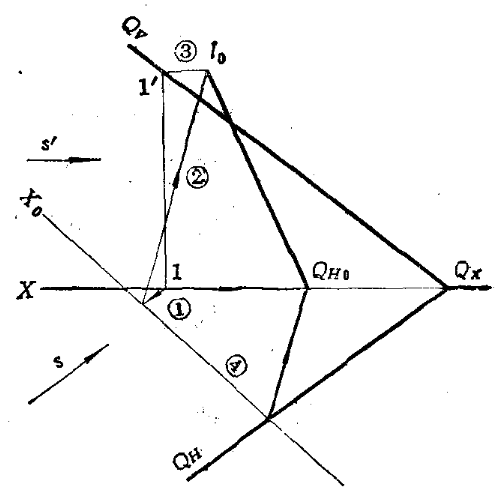


图 1-6

在解决实际问题时，往往会遇到要求将已知平面变换为投射面，但并未指定辅助投影面的问题。此时，如无其它要求，只要以已知平面上的任一条直线的方向为投射方向S，则已知平面在任意平面（不平行于已知平面）上都将被投射成为直线，亦即变换成为投射面。因此，此时辅助投影面可以任意选择。

如图1-6 所示，要求把平面Q变换为投射面。在图上取Q面上的水平线方向作为投射方向S。由于辅助投影面可以任意选定，所以可以根据作图方便，图面清晰，在图的适当位置任选一辅助投影轴X_0；同样载影线②的方向也可以任选。在图1-6中，根据选定的轴X_0和②的方向，求出了Q面的迹线Q_H的辅助投影Q_{H0}（积聚为点）和Q面上任一点**1**（1'，1）的辅助投影1_0。因而也就求出了Q面的辅助投影Q_0（积聚为直线）。

例 已知相交两直线AB、AC确定一平面α，平行两直线M、N确定一平面β。求平面α和平面β的交线（图1-7）。

解： 将已知平面α和平面β中的任何一个变换为投射面，就可使解题简化。解题步骤如下：

1）为使β面变换为投射面，取投射方向$S//$直线M；

2）在图纸的适当位置，以适当的方向画出辅助投影轴x_0（环节④），并选定环节②的方向。这样也就确定了辅助投影面；

3）作出平面β的辅助投影。此时β面被投射成为直线M_0N_0，有积聚性；

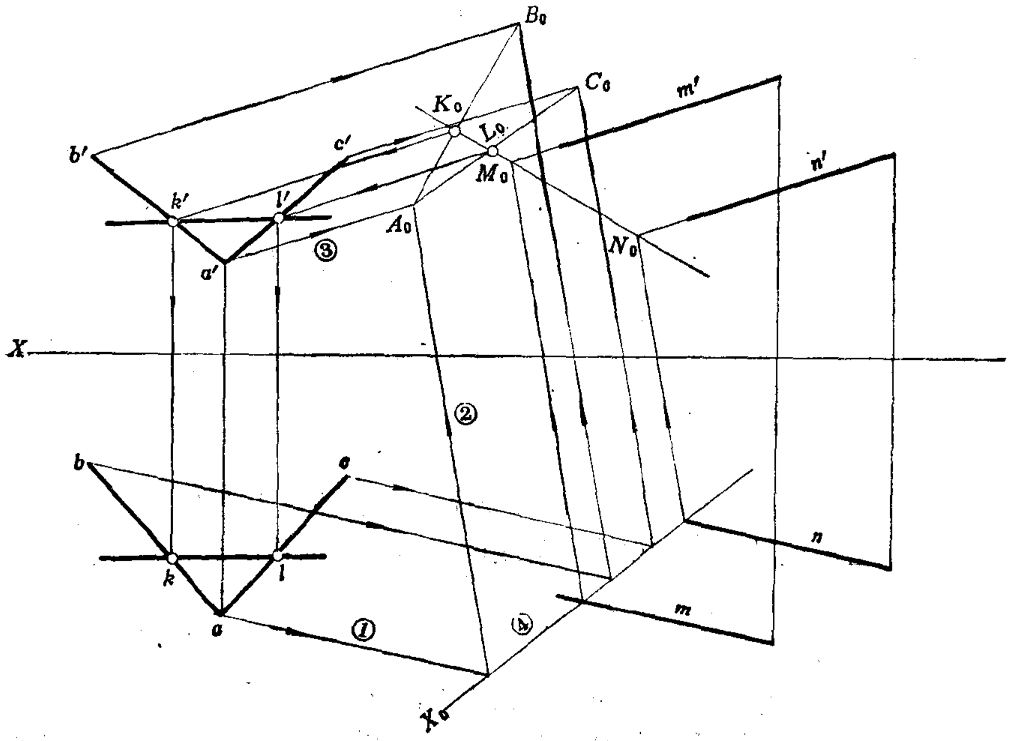


图 1-7

4）作出平面α的辅助投影 $B_0A_0C_0$；

5）$A_0B_0 \cap M_0N_0 = K_0$；$A_0C_0 \cap M_0N_0 = L_0$。K_0L_0即为两平面α和β交线的辅助投影；

6）进行反向投射，即可根据K_0L_0求出所求交线的V投影 $k'l'$。再利用投影关系求出它的H投影 kl。

四、向特殊位置平面进行斜角辅助投射

前面谈到的斜角辅助投射，所选投影面都是一般位置的平面。在解题时，如果对投影面的位置没有特殊要求时，选择特殊位置平面作为辅助投影面往往可以使辅助投影的作图更为简化。我们经常采用的辅助投影面包括：铅垂面、基本投影面和Ⅰ、Ⅳ分角的平分面F。

1. 向铅垂面进行斜角辅助投射

设铅垂面P为辅助投影面，S为投射方向（如图1-8）。欲将任一点A向P面进行辅助投射。

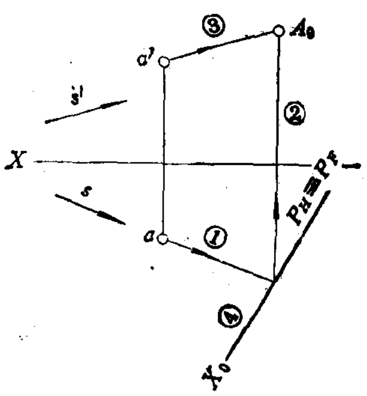


图 1-8

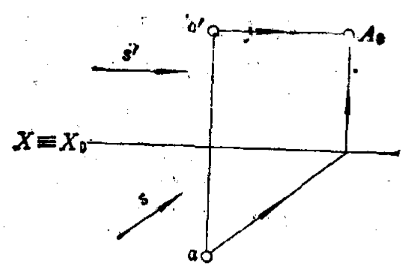


图 1-9

在此条件下，由于P_H有积聚性，所以P面在Ⅱ、Ⅳ分角平分面F上的迹线$P_F\equiv P_H$，亦即辅助投影轴X_0与P_H重合。

此外，由于P面是铅垂面，因此包含过点A的投射线所作辅助铅垂面R（图1-8中未作图，可参阅图1-1）与P面的交线一定是铅垂线。亦即，在此条件下，作图环节②的方向一定是铅垂方向。

求点A在P面上的辅助投影A_0的作图过程在图1-8上已表示清楚，不再详述。

2．向基本投影面进行斜角辅助投射

基本投影面V实际上可看作为一个特殊的铅垂面，因此向V面进行斜角辅助投射，其作图与上述基本上是相同的，所不同的是，向V面投射时，其辅助投影轴$X_0\equiv X$（如图1-9）。

由图1-9的作图可见，求任一点A沿已知投射方向S，在V面上的辅助投影A_0的作图过程，实际上与求过点A所作的投射线的V面迹点的作图过程是完全一样的。因此，在已知投射方向S的条件下，求任意点在V面上的辅助投影，实际上也就是求出相应投射线在V面上的迹点。

同理，我们也可以利用H面作为辅助投影面，求出任意点在已知投射方向S下，在H面上的辅助投影。与前面不同的是，此时是以该点在投射方向S下，在H面所得投影的H投影作为该点的辅助投影（见图1-10），其作图各环节也作相应的改变。由图1-10可见，求任意点A的辅助投影A_0的作图过程，与求过该点所作投射线的H面迹点的过程是一样的。

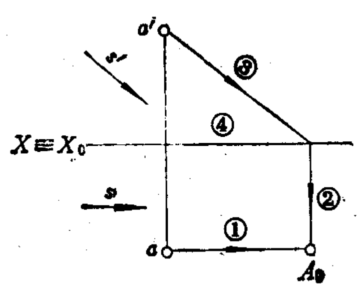


图 1-10

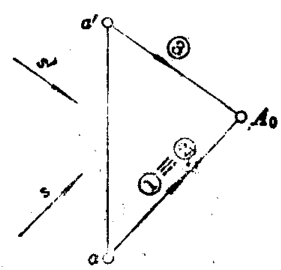


图 1-11

3．向Ⅱ、Ⅳ分角平分面F进行斜角辅助投射

设投射方向为S。当点A向F面进行辅助投射时，过点A的投射线与F面的交点即为点A在F面的辅助投影A_0。因此过点A作投射线，该投射线两投影的交点A_0即为所求辅助投影（如图1-11）。

此时，因辅助投影面就是F面，所以环节②与环节①重合。

五、应用举例

例1　求三棱柱1 2 3和三棱锥S 4 5 6的相贯线（图1-12）。

解：将三棱柱变换成为投射位置，就很容易在变换后的辅助投影上确定相贯线的投影，然后反向投射，就可在原投影上确定所求相贯线的投影。

为此，取三棱柱棱线的方向作为投射方向，而辅助投影面则可任意选择。考虑到图面清晰（投影不重叠）和布置紧凑，在图1-12中采用了一般位置的辅助投影面。辅助投影面X_0和载影线方向如图所示。

在选定投射方向和投影面以后，首先求出已知三棱柱和三棱锥的辅助投影$1_02_03_0$和

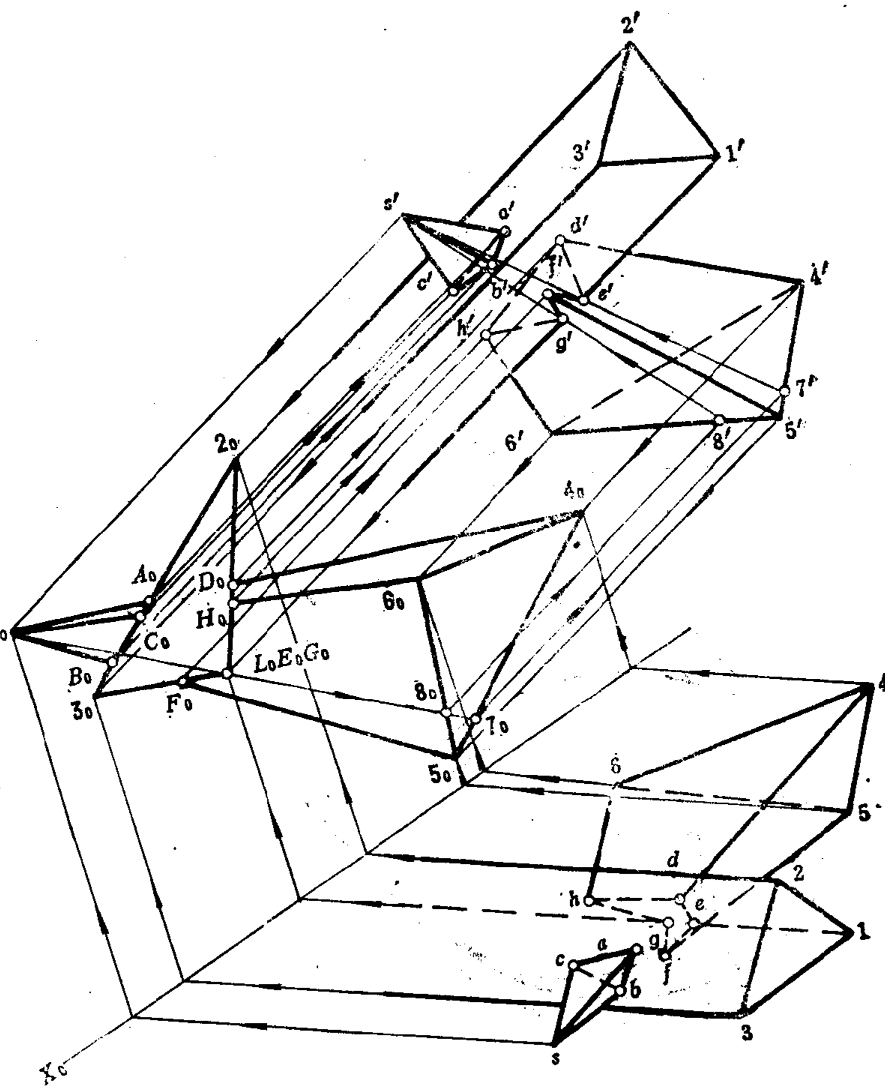


图 1-12

$S_04_05_06_0$。在辅助投影中，由于三棱柱各棱面的投影有积聚性，所以很容易确定三棱锥各棱与三棱柱的贯穿点 A_0、D_0；B_0、F_0；C_0、H_0。同样，利用三棱柱棱线 1 的辅助投影1_0的积聚性，求出该棱与三棱锥棱面 $S45$ 和 $S56$ 的贯穿点的辅助投影 E_0和G_0。

再利用反向投射就可确定各贯穿点在原投影中的位置。其中贯穿点E、G在投射线 1 上，所以需要先在三棱锥的相应棱面上作出辅助线 $S7$ 和 $S8$，然后才能求出 e'、g'。

例 2 求平面P与椭圆锥的截交线（图1-13）。

解：将截平面变换为投射面，使P面的辅助投影有积聚性；这样就很容易求出锥面的素线与P面交点的辅助投影。然后把求得的一系列这样的交点返回到原投影图上，就可完成截交线的作图。

为了便于作图，解本题时采用P面上水平线的方向为投射方向，选用V面为辅助投影面。此时平面P的辅助投影 $P_0 \equiv P_V$，椭圆锥的辅助投影为 $S_0C_0D_0$（见图 1-13）。

为求出P面与锥面的截交线，需作出锥面的一系列素线，求出它们与P面的公共点。

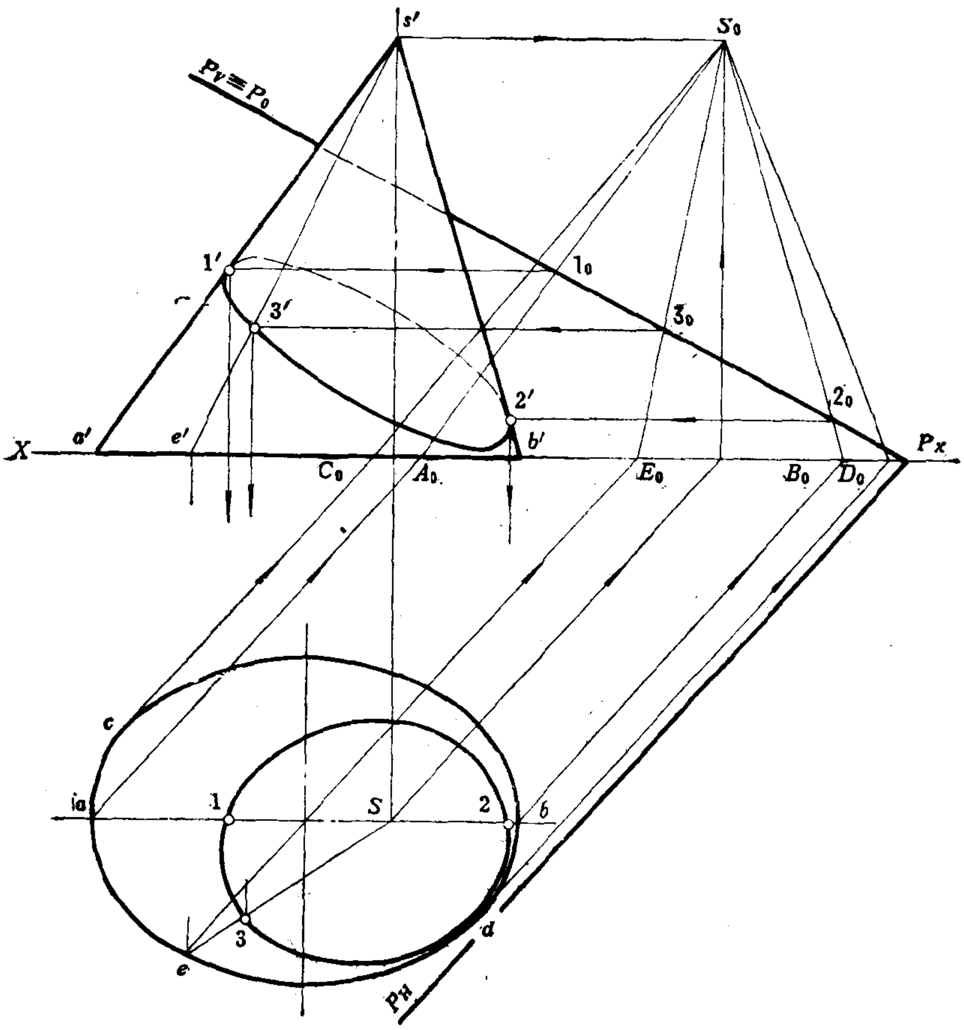


图 1-13

在图 1-13 中，只表示了V投影轮廓素线SA、SB以及一般的素线SE与P面的公共点 1 、 2 、 3 的作图过程。

例 3　求斜椭圆柱与圆环面的相贯线（图 1-14）。

解：本例只采用辅助面法解题是比较困难的。如图 1-14 中以水平面P为辅助面，P面与环面交于半径为r的圆，但与柱面交于椭圆，作图不便。我们注意到，如果采用柱面母线的方向为投射方向，向H面进行辅助投射时，由于柱面的辅助投影有积聚性，所以，P面与柱面截交的椭圆在H面的辅助投影与柱面底椭圆的原H投影重合。此时P面截交环面所得的圆的辅助投影仍为圆，半径不变（仍为r），但圆心则为原圆心O的辅助投影O_0。

由图 1-14 可见，以O_0为圆心，以r为半径所作的圆与柱面底椭圆交于K_0和L_0两点，该两点即为两个公共点的辅助投影。反向投射就可在原投影上求出l、k和l'、k'。

继续上述过程，求出一系列公共点，就可完成相贯线的作图。

例 4　已知一斜椭圆柱面β由三条素线 1 、 2 、 3 确定，其中 1 、 3 为对V面的轮廓素线。试过点A作该椭圆柱面的切平面（图 1-15）。