统计物理学习题集

[苏] В. М. Варикаш 等编

张建树　彭匡鼎 译

高等教育出版社

1 9 8 7

内 容 提 要

本书系根据苏联明斯克«Выцэйшая Школа»出版社1979年出版的 В. М. Раrикаш, А. И. Болсун和В. В. Аксенеов 合编的«СБОРНИК ЗАДАЧ по статистичекой физике»一书译出.

本书取材广泛,题型多样,难度适中,解法规范,在一定程度上反映了统计物理学的近代成就,有利于提高读者分析、解决问题的能力与技巧.

本书可作为高等学校理工科物理、化学、半导体器件、电介质等类专业的教学参考书,也可供有关科技工作者参考.

统计物理学习题集

[苏] В. М. Ворикаш 等编

张建树 彭匡鼎 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张7.5 字数188 000

1938年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数 0001— 2 480

ISBN7-04-000299-X/O·299

定价 3.10 元

序 言

本书汇集了作者多年来在明斯克无线电工程学院为“半导体与电介质”专业学生讲授统计物理学习题课时所解过的习题.

作者编撰本书的目的是把分散在不同教材、教学参考书及专著中的习题汇集成统一的整体,加以分类,编成参考书,以减轻学生掌握课堂讲授内容的负担. 高等学校的工作经验表明,学生的最大困难是如何将物理学的普遍原理应用于具体问题. 本书有助于学生巩固理论知识,并为他们研究一些专门学科作准备.

书中安排了不同难度的习题,其中一部分可供学生在习题课中当堂解答,其余的可作为家庭作业. 大量的各种类型的题目可使教师在习题课中有选择的自由. 为使学生获得并提高解题的技能和素养,所有的习题,包括简单的题,全部给出了解答. 显然,学生应首先尝试独立解题,只有这样做了之后,才可看书中的解答. 在解题尝试失败后,找出自己错误所在,是具有明显教育意义的. 因为解答这些习题是在学过相应的理论材料之后进行的,所以对每章开头部分的基本公式仅作了少许解释. 这些绝不能视为逻辑严密地叙述理论问题. 本书运用了统计物理学常用的各种数学方法和手段. 解题所需的数学知识不超出高等院校微积分的范围.

本习题集与半导体与电介质专业“统计物理学”课程的教学大纲相适应,内容深受该大纲的影响. 比如,书中包含部分热力学习题. 由于量子力学与统计物理学这两门课程同时讲授,因而在此习题集中要求用量子力学计算的习题较少.

本书难免有缺点,作者十分感谢读者提出的批评意见. 对莫斯科无线电、电子及自动化学院固体物理教研室 A. C. 西果夫

(A. C. Сигов) 副教授的批评意见和宝贵建议，作者愉快地表示诚挚的感谢，这些意见和建议在许多方面促进了本书的完善.

作　者

译者前言

本书系根据苏联明斯克高等学校出版社1979年出版的B. M. Варцкаш 等编著《统计物理学习题集》(Сборник задаи по Статистической Физике)一书译出.该书是近几年来出版的一本较好的热力学与统计物理学参考书,它取材广泛,题目类型多样,并在一定程度上反映了现代统计物理学的新成就.所有题目都给出了详细解答,方法规范.章节安排循序渐进,紧密配合教学.

本书的主要目的在于帮助学生学习热力学与统计物理学并为掌握相应的方法提供指导,以便提高学生分析、解决问题的能力,减轻学习负担.

本书第一至第四章及相应解答由彭匡鼎翻译,第五至第九章及相应解答由张建树翻译,全文由我们两人共同商讨并相互进行了校改.书中凡发现的印刷错误、疏漏和计算错误,我们都作了改正,除个别修改量较大的部分外,一般未另加注.原书各题虽经我们一一重新验算,但由于业务水平所限,欠妥甚至错误之处恐亦难免,诚恳希望读者批评指正.

在翻译过程中,汪志诚教授、李中辅、杨自天付教授、海彦合和罗耀煌同志提出了许多宝贵意见,使本书增色不少.另外还得到了江仁寿、王治梁教授的热情支持,在此谨表示由衷的谢意.

译　　者

目　录

第一章　分析力学基础　拉格朗日和哈密顿形式的运动方程

相空间

若孤立系统由N个粒子(质点)所组成,则第 i 个粒子的运动方程(牛顿第二定律)为

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}=\dot{\boldsymbol{p}}_i=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}, \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{p}_i$ 为第 i 个粒子的动量,$\boldsymbol{F}_{ki}$ 为第 k个粒子对第 i 个粒子的作用力.

在系统中存在约束① 的情况下,不是所有的方程(1.1)都相互独立,因为在质心系中不是诸粒子的所有坐标 r_i 都相互独立②.当约束给予的限制可写为等式

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N,t)=0 \tag{1.2}$$

时,该约束称为**完整约束**. 上式中 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N$ 为系统中粒子的坐标,t 为时间,N 为粒子数

若有 m 个表为方程(1.2)形式的完整约束加在系统上, 利用它们可以从 3 N 个坐标中消去 m 个,这样就得到$3N-m$ 个独立坐标. 随后可以引入 $3N-m$ 个独立变量 q_1, q_2, $\cdots$, q_{3N-m}(广义坐标),用这些独立变量,把系统粒子的坐标 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{r}_N$ 表示为:

---

① 不完整约束并不使独立坐标数减少 ——译者注

② 注意坐标系的选择不影响系统的独立坐标数. ——译者注

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(q_1,q_2,\cdots,q_{3N-m},t)\\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2(q_1,q_2,\cdots,q_{3N-m},t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{r}_N=\boldsymbol{r}_N(q_1,q_2,\cdots,q_{3N-m},t)\end{array}\right\}$$

对于任一力学系统可以引入**拉格朗日函数**①

$L(q_1,q_2,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s;t)=L(q;\dot{q};t)$，式中 q_i 为广义坐标，$\dot{q}_i=\dfrac{dq_i}{dt}$为广义速度，$s=3N-m$ 为自由度数.

在这种情况下，粒子系统的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_i}(i=1,2,\cdots,s),$$

称为**第二类拉格朗日方程**②.

在保守系的情况下，可以引入系统的势能 $U(q)$，这时，拉格朗日函数为

$$L(q;\dot{q})=T(q;\dot{q})-U(q)$$

式中 $T=\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{m_iv_i^2}{2}$，为系统的动能.

对统计力学更方便的一种运动方程形式，是通过引入**广义动量** $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$**和哈密顿函数** $H(p,q)$而建立的运动方程. 这就是**哈密顿形式的运动方程**：

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

在保守系的情况下，哈密顿函数是系统的总机械能，

$$H(q,p)=T(q,p)+U(q).$$

---

① 关于普遍力学体系的拉格朗日函数，请参看 Ф.Р. 甘特马赫，《分析力学讲义》§ 11，人民教育出版社，1963 年. ——译者注

② 普遍力学体系(特别是不完整系)的拉格朗日方程可和上式不同，或上式右边还有附加项，或表现为其他形式. ——译者注

为了描述力学系统的运动，引入所有广义坐标 q_i 和所有广义动量 p_i 构成的多维空间．这样的 $2s$ 维空间称为**相空间**①或**Γ空间**．在相空间中系统的状态用某一点(**代表点或相点**)表示．相应于一个分子的相空间，称为**μ空间**②．单原子分子的 μ 空间是六维空间．

当代表点在相空间中沿着相轨道运动时，相空间体积元 $d\Gamma=dq_1\cdots dq_s\cdot dp_1\cdots dp_s$ 的形状将随时间以任意方式变化，但在这种情况下该体积元的大小保持不变．这个结论称为**刘维定理**，写为

$$\frac{d\rho}{dt}=0.$$

式中 $\rho(q,p,t)$ 为**代表点的分布函数**或**密度**．

1.1．试求自由粒子动能的齐次性的幂次数．

1.2．说明如何由外力场中粒子的拉格朗日方程推导出牛顿第二定律．

1.3．试求电磁场中带电粒子的拉格朗日函数．

1.4．写出一维谐振子的拉格朗日方程．

1.5．试求解谐振子的哈密顿方程．

1.6．试求谐振子动能和势能的平均值．

1.7．试确定谐振子的相轨道．

1.8．试就惯性运动的质点验证刘维定理．

1.9．两个半径为 r 的弹性球无摩擦地沿着水平槽运动．在速度平面 (v_1,v_2) 上描绘碰撞前和碰撞后相体积元 dv_1dv_2 的状况，并证明

$$dv_1dv_2=dv_1'dv_2',$$

---

① 为避免混淆，常称为系统相空间．——译者注

② 由描述单个分子运动状态的广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 所构成的相空间，称为 μ 空间．——译者注

式中 v_1' 和 v_2' 为质点碰撞后的速度.

1.10. 试就两球的完全非弹性碰撞检验刘维定理.

1.11. 试就沿一直线运动的两个粒子的弹性碰撞情况，验证刘维定理的正确性.

1.12. 试就如下三个谐振子验证刘维定理：

$$x_1=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}\sin\omega t,\quad x_2=\sqrt{\frac{2(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{m\omega^2}}\sin\omega t,$$

$$x_3=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\delta).$$

第二章　几率论基础

如果事件总数N中某事件发生n_k次，则该事件的几率w_k由下式定义：

$$w_k=\lim_{N\to\infty}\frac{n_k}{N}. \tag{2.1}$$

系统某个状态i的几率可由下式定义：

$$w_i=\lim_{T\to\infty}\frac{\Delta t_i}{T} \tag{2.2}$$

式中Δt_i为系统处于状态i的时间，T为观察时间.

随机量x可以在x到$x+dx$区间内取值的几率$dw(x)$为

$$dw(x)=\rho(x)dx,$$

式中$\rho(x)$为**统计分布函数**或简称**分布函数**. 分布函数$\rho(x)$也称为**几率密度**，因为就随机量变化的单位间隔来说，$\rho(x)=\dfrac{d\omega(x)}{dx}$具有几率的意义.

表征一系统的任一物理量$f(p,q)$的平均值由下式定义：

$$\overline{f(p,q)}=\int f(p,q)\rho(p,q)dpdq.$$

由于关系式(2.2)，该平均值也可写为：

$$\overline{f(p,q)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^{T}f(t)dt,$$

这里$f(p,q)$和$f(t)$分别为相应的分布函数，q及p分别为广义坐标及广义动量，t为时间

分布函数$\rho(x)$应该满足**归一化条件**：

$$\int\rho(p,q)dp\,dq=1,$$

式中积分是对整个相空间取的.

用**方均偏差**或**散差**作为随机量偏离平均值的度量:

$$\overline{(\Delta x)^2}=\overline{(x-\bar{x})^2}=D(x),$$

式中$\Delta x=x-\bar{x}$,为观测量对平均值的偏差.

如果系统的两个状态 A 和 B **不相容**,那末系统处于这两个互相排斥的状态之一的几率,等于系统处于这两状态中每一状态的几率之和,

$$w(A+B)=w(A)+w(B).$$

由(2.1)导出的这个结论称为**几率的加法定理**,它可推广到任意多个互不相容事件的场合 几率的归一化条件是几率加法定理的结果,在某量的值为分立谱的情况下

$$\sum_k w_k=1,$$

在某量的值为连续谱的情况下

$$\int dw(p,q)=\int\rho(p,q)dp\,dq=1.$$

两事件A和B**同时发生**所构成的事件称为这两个事件的**乘积**,记为 AB。

为了描述**互相依赖**的事件,可引入**条件几率**. 例如,$w(A/B)$为在事件B已发生的条件下事件A的几率,于是,

$$w(AB)=w(A)w(B/A)=w(B)w(A/B).$$

两个统计**独立**事件之积的几率等于这两个事件的几率之积:

$$w(AB)=w(A)w(B).$$

2 1. 粒子位于宽度为 a 的一维无限深势阱中. 若认为粒子的运动是经典的,试求粒子位于$[x,x+dx]$区间内的几率.

2.2. 如果粒子在一维抛物线形势阱内运动,试求粒子位于$[x,x+dx]$区间内的几率.

2.3. 证明:随机量之和的平均值等于这些量的平均值之和,即 $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$.

2.4. 证明：两个相互独立的量的乘积的平均值等于此二量的平均值之积，即$\overline{xy}=\bar{x}\,\bar{y}$.

2.5. 设有由N个统计独立的全同粒子组成的系统. 设这些粒子中的一个处于状态p的几率等于p，试求n个粒子处于状态p的几率.

2.6. 在“罗托”① 游戏中，试求从49个数字中猜中3个数字及6个数字的几率.

2.7. 设在2.5题的N粒子系统中$N\gg n$. 试研究两种情况：a) $N\to\infty$，b) $n\to N$.

2.8. 在掷骰子游戏中，骰子的各个面都以相同几率出现. 现在研究掷五颗这样的骰子的游戏. 试求在下列情况下的几率：a) 一颗骰子出现六点，b) 至少一颗骰子出现六点，c) 同时两颗骰子出现六点.

2.9. 由于元件k损坏或两个元件k_1和k_2一起损坏，电路可能发生断路. 这三个元件的损坏是相互独立的，相应的几率各为0.3，0.2及0.2. 试求电路断路的几率.

2.10. 在时间T内计算机的第k个构件损坏的几率为w_k ($k=1,2,\cdots,n$). 如果所有构件是独立的，试求在上述时间间隔内这台计算机的n个构件中至少有一个构件损坏的几率.

2.11. 设以随机方式选择23个人，至少发现两个人有同一生日的几率如何？

2.12. n台仪器中有k台废品. 求在任意选出的m台受检仪器中，正好碰上l台废品的几率.

2.13. 一点沿圆周匀速转动，试求其角分布函数ρ.

2.14. 一系统用几率分布

$$dw\sim xy\,dx\,dy$$

---

① 罗托游戏：每人由袋中取出号码牌，放在手中纸板上标有相同号码处，以纸板号码先摆满者为胜. ——译者注

来描述，其中 x 及 y 分别位于区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 及区 间 $0\leqslant y\leqslant b$ 内. 试将此几率归一化.

2.15. 量 y 与 x 的关系为 $y^2=x$，如果 $dw(x)=\text{const}\cdot e^{-ax}dx$，试求量 y 的几率分布.

2.16. 一次掷一颗骰子，试求出现的点子的平均数.

2.17. 当量 x 在 a 到 b 之间均匀分布时，试求 $\bar{x}$ 和 $\overline{x^2}$ 的值.

2.18. 当量 x 在 a 到 b 的区间内均匀分布时，试求散差 $\overline{(\Delta x)^2}$.

2.19. 证明泊松分布 $\dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$ 满足归一化条件.

2.20. 试求服从泊松分布的随机量的平均值.

2.21. 仪器包含 2000 个可靠元件，每一个元件出故障的几率均等于 0.0005. 如果即使其中一个元件出故障仪器就会发生故障，问这仪器出故障的几率如何？假设出故障的元件数的分布服从泊松分布.

2.22. 对归一化的高斯分布

$$f(x)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,e^{-ax^2}(-\infty<x<+\infty),$$

试求 $\bar{x}$，$\bar{x}^2$ 和 $\overline{(\Delta x)^2}$.

2.23. 船舶左右摇晃的振幅是随机的，其几率分布密度为[列里伊(Релей)定律]

$$f(x)=\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}},\ (x\geqslant 0),$$

其中 a 为船舶的最大偏斜. 试求船舶摇晃时的偏斜平均值.

第三章　热力学基础　热力学函数

系统的平衡态用**内能**E来描述，内能仅依赖于系统的热力学状态．对孤立系，$E=\text{const}$.

如果系统与别的系统相互作用，它从一个状态变到另一个状态，则系统内能的变化可写为

$$\Delta E=W+Q, \tag{3.1}$$

其中W为由于外参量变化对系统所作的宏观功，Q为系统所吸收的热量．式(3.1)表示了**能量守恒定律**.

系统的宏观平衡态可以用态函数S来描述．S称为**熵**并具有如下性质：

1．在状态的任何无穷小准静态变化的情况下，当系统吸收热量δQ时，它的熵改变量

$$dS=\frac{\delta Q}{T},$$

式中T为系统的绝对温度.

2．在任何实际过程中，当孤立系统从一个宏观态过渡到另一个宏观态时，它的熵增加，即$dS\geqslant 0$.

当$T=0$时系统的熵等于零或常数.

热力学与统计物理学用下式联系起来：

$$S=k\ln\Omega(E)$$

式中$\Omega(E)$为系统可达到的状态数，k为玻耳兹曼常数.

亥姆霍兹自由能F（或简称自由能）、**吉布斯热力势**G（或简称热力势①）和**焓**H定义如下：

---

① 我国有些教科书上简称为吉布斯函数或自由焓．——译者注

$$F=E-TS, G=F+pV, H=E+pV.$$

自由能F的物理意义是，在等温过程中自由能的变化等于系统能够完成的最大功的负值.

如果系统处在等温等压下，则它的吉布斯热力势G不增加，相应地，平衡态是吉布斯热力势为极小值的状态.

3.1. 证明功的微分表达式 pdV 不是全微分.

3.2. 试从关系式

$$dU=TdS-pdV, dF=d(U-TS),$$

$$dH=d(U+pV), dG=d(U+pV-TS),$$

导出麦克斯韦关系式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S=\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p=-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T, \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V=\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T.$$

3.3. 试求定容热容和定压热容之间的关系.

3.4. 如果系统的熵由式

$$S=R\frac{V_0}{V}\left(\frac{T}{T_0}\right)^a$$

给出，其中 V_0，T_0，a 为已知常数. 试求系统的自由能及物态方程.

3.5. 对于任何无穷小可逆过程，熵的变化由式

$$dS=\frac{\delta Q}{T}$$

定义，其中 S 的微分是全微分. 证明： a）对任何过程 $\int_A^B\frac{\delta Q}{T}\leqslant S(B)-S(A)$； b）绝热系统的熵永不减小.

3.6. 证明：理想气体的内能不依赖于体积和压强，而仅是温度的函数.

3.7. 证明下列关系式：

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p.$$

3.8. 证明：对于内能仅是温度函数的物质，物态方程为 $p=Tf(V)$，式中 $f(V)$ 为某个表征该物质特性的体积函数.

3.9. 实验证明，某种气体的压强 p 和比容 v 的乘积仅依赖于温度，同样内能也只是温度的函数. 从热力学观点看，关于这样的气体的物态方程，可以说明些什么？

3.10. 证明：对于内能 E 不依赖于体积 V 的物质，定容热容 C_V 仅依赖于温度.

3.11. 证明关系式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}.$$

3.12. 利用偏导数形式的热力学方程，证明：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S > \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T,$$

这就是说，在 p-V 图上绝热线比等温线更陡.

3.13. 证明关系式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

3.14. 系统的热容 C_p 和体积 V 可用以下方程表示：

$$C_p = \alpha T^3 \ln p, \quad V = \frac{\beta T^4}{p},$$

式中 α 和 β 为常数. 试求系统的焓.

3.15. 如果

$$C_V = \alpha V T^3, \quad p = \beta T^4,$$

试求系统的热力势 G.

3.16. 系统的热力势为