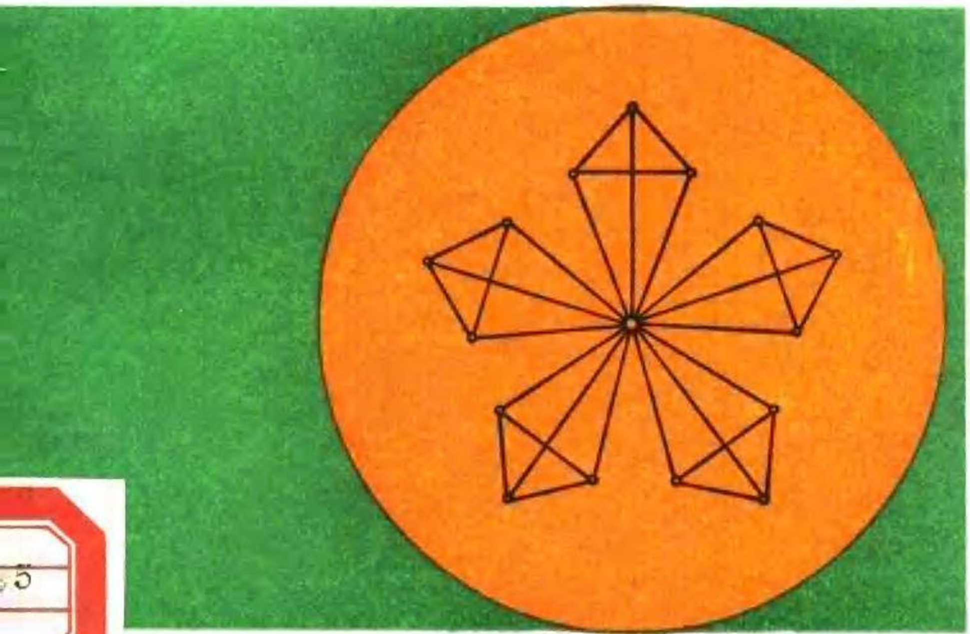
优美图

马克杰 编著



北京大学出版社

优 美 图

马克杰　编著

北 京 大 学 出 版 社

登记证号：（京）159号

优 美 图

马克杰 编著

责任编辑：刘 勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 8.125印张 175千字

1991年10月第一版 1991年10月第一次印刷

印数：0001—3,000册

ISBN 7-301-01543-7/O·251

定价：4.50元

内容简介

优美图是图论中极有趣的重要内容，有着较好的应用价值和广阔的研究前景。作者以多年的科研经验，系统地总结了国内外优美图研究的重要成果，并提出了新的研究问题和研究方向，为从事优美图研究的人员和图论爱好者提供了大量的前沿信息。全书共分七章，内容包括：图的基本知识，优美图的概念、性质和应用等。

本书自成体系，预备知识完备，叙述深入浅出，简明易懂，具有知识性和趣味性。各节配有适量习题，书末附有答案，便于教师和学生使用。本书可作为理工大学、高等师范院校大学生或研究生图论课的教学参考书，也可供图论科技工作者、中学数学教师和图论爱好者阅读。

序　言

图论虽然有200多年的历史，也曾被历史上颇负盛名的数学家Cayley，Euler和Hamilton等人好奇地，然而富有决定意义地关心过，但是在过去很长一段时间里发展得十分缓慢。直到五十年代末期，由于电子计算机的出现和广泛使用，图论才得到突飞猛进地发展。近三十年来，图论发展的客观事实已表明，它已成为当今数学科学中一门引人注目的新兴学科。无论从从事图论研究的人数上和每年刊出的论文数量上看，或是从图论杂志的种类之多和应用之广来看，都说明图论不仅已成为数学的一个分支，而且还是一个相当不小的分支。

图论与数学的其它分支不同，它不象群论、拓扑等学科那样有一套完整的理论体系和解决问题的系统方法。图论所涉及的问题比较广泛，而解决问题的方法千变万化，非常灵活，常常是一种问题一种解决方法，而这些方法之间又毫无联系。因此，解决图论中的问题不仅需要知识，而且更需要智能和灵活深入的思考。所以学习图论不仅是培养和提高人们的思维能力的好途径，而且会感到是一大乐趣。

优美图是图论中极有趣的研究课题之一，由于它的趣味性和应用性，自60年代中期被提出来后，很快得到了人们的重视。最近十年来，这一课题非常活跃，有关论文不下数百篇。由于文章分散在各种刊物上，所以重复性的工作不时发生，特别在国内资料还很不齐全的情况下，迫切需要这样一

本比较系统的材料。

本书是国内外第一部优美图方面的专著。作者翻阅了大量的资料，以自己十余年来的研究体会，系统地总结了国际上已有的重要成果，并提出了一些新的研究问题和研究方向。无疑这将为从事这一课题研究的读者提供了极为丰富的资料。

本书所涉及的基础知识较浅，几乎所有的证明方法都是构造性的，读起来比较容易、直观。然而当你读完之后，在回味这些妙趣横生的构造方法之时，不免要问：这些五花八门的构造方法是怎样想出来的？它们有什么规律性没有？要解决优美图的判定性问题能否开辟新的途径？这就迫使读者要开动脑筋深入思考，并亲自动手试一试。通过试验就会提高兴趣，就有可能得到新的发现，这也是本书所希望的。

我深信优美图的趣味性和应用性，将会吸引更多的数学爱好者投入到图论的研究中来，为我国图论事业的深入发展做出更大贡献！

刘 振 宏

1989年8月于北京

作者前言

本书前身是作者编写的《图论》讲义，曾在曲阜师范大学数学系和运筹学研究所多次讲授。通过长期教学实践，根据学生的反映，以及作者近几年的科研心得，对讲义作了修改和增删。

本书共七章。除第一章介绍图的基本知识外，其余六章分别介绍了优美图的概念、性质和应用。在取材上以介绍基础理论和研究成果为主，并联系生产实际。注意内容之间的联系，力求主次分明，由易到难，循序渐进。文字力求简明易读。每节附有一定数量的习题，书末附有提示或解答，它们对理解书中内容和掌握书中所介绍的方法，以及引导读者对优美图研究得到新的发现是有帮助的。

需要说明的一个问题是关于所用的术语。因为图论是一门新兴的学科，优美图研究的历史较短，世界上各国学者所用术语有很大差别，我国图论工作者也各自用自己所习惯的一套术语．本书中所用的术语基本上按照J.A.邦迪、U.S.R.默蒂著的《图论及其应用》一书。对于某些特殊术语或符号都是在用它们之前给出了定义，这些术语索引在书末的名词索引中可以查到。希读者注意。

本书可供理、工、师范院校的数学、物理专业师生教学参考，也可供科技工作者和图论爱好者参考。

本书在编写中，承刘振宏先生的热忱帮助和指导，并为本书作序。曲阜师范大学给予了科研经费资助，使本书顺利

出版。在此我谨向各方致以深切的感谢。

由于文献资料的限制和限于水平，书中定有欠妥或错误之处，敬请读者批评。

马克杰

1989年6月

目　　录

第一章　图的基本知识

本章介绍图的一些基本概念和术语，它们是我们进一步讨论的基础知识。

§1.1　图的概念

1.1.1　引例

现实世界的许多事物(有限或无限)或社会上许多现象，事物与事物之间，现象与现象之间，或事物与现象之间有某种联系，我们要研究这些联系，从中找出规律，这就是所谓图论的研究内容。其中用点表示事物或现象，若事物之间，现象之间或事物与现象之间有某种联系，便用一条线把它们联系起来，这便形成一个图，表示要研究的对象及其内在的联系。下面是图的两个例子。

例1.1.1　水电供应问题．有三家住户 A,B 和 C,与水、电、煤气站 D,E 和 F 之间的关系如图 1.1-1 所示,其中线表示管道或线路。

例1.1.2　循环球赛．设有六个球队进行循环比赛，每个队都有胜有负．我们可以把比赛情况简单地表示出来．用六个点表示六个球队，两队比赛，一胜一负，我们用一条带箭头的线从胜队引向负队，这样就得到了一个图(叫做**有向图**)，见图 1.1-2。

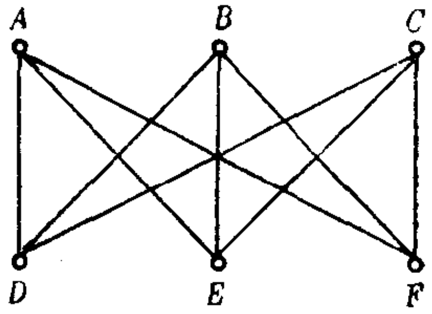


图 1.1-1

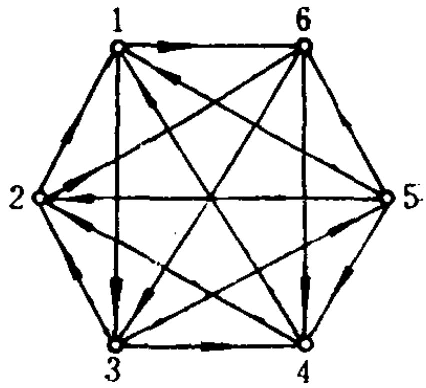


图 1.1-2

表示事物的点称为图的**顶点**，两点间的连线称为图的**边**。a,b 两点间的边用 (a,b) 或 ab 表示。a,b 称为这条边的**端点**。

从上面图的直观概念可以看到，表示顶点的点和表示边的线的相对位置并不重要，人们主要感兴趣的是：两点是否被一条线所连接。因此，图的本质内容是顶点和边之间的关联关系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线段来表示，则是无关紧要的。也就是说，图的概念可以抽象化。

1.1.2 集合的积与二元关系

集合的积与二元关系的概念在图的抽象定义中起着重要作用。因此在抽象地定义图之前，我们先来讨论这两个概念。

定义1.1.1 两个事物 a 和 b 按照一定的次序排列，a 在前，b 在后，记成 (a,b)，则称 (a,b) 为一个**有序对**。

日常生活中有许多事物成对出现，而且这种成对出现的事物具有一定的顺序。例如：上、下；左、右；$5>3$；李宁高于赵明；平面上点的坐标等。它们可以分别记成有序对(上,下)；(左,右)；$(5,3)$；(李宁，赵明)；(a,b) 等。

有序对可以看作具有两个元素的集合。但它与一般集合

不同的是有序对具有确定的次序。在集合中，$\{a,b\}=\{b,a\}$，但有序对$(a,b)\neq(b,a)$。

定义1.1.2 设A和B是两个集合。由$a\in A,b\in B$所组成的形如(a,b)的所有有序对构成的集合，叫做A和B的**笛卡儿积**(Cartesian product)，或叫做**有序积**，记作$A\times B$。

笛卡儿积$A\times B$的一个子集合，称为A到B的一个**二元关系**(binary relation)。特别地，当$A=B$时，集合A到B的二元关系称为集合A上的一个二元关系。

例1.1.3 已知 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，求$A\times B$，$B\times A$，$A\times A$，$B\times B$，$(A\times B)\cap(B\times A)$。

解 $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$，

$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$，

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$，

$B\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$，

$(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$。

由例1.1.3可以看出，$A\times B\neq B\times A$。

我们约定：若$A=\varnothing$或$B=\varnothing$，则$A\times B=\varnothing$。

集合$\{a,b\}\times\{1,2,3\}$的一个子集，例如，$\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,3)\}$是$\{a,b\}$到$\{1,2,3\}$的一个二元关系。

集合A到集合B上的一个二元关系，是A中与B中有关系的元素的直观描述。如果R是A到B的一个二元关系，并且有序对$(a,b)\in R$，那么元素a和b有某种关系。

上面我们是针对有序对来讨论的。如果组成元素偶的两个事物a和b与次序无关，也就是说元素偶(a,b)和元素偶(b,a)相同，则称这种元素偶为**无序对**，记作$\{a,b\}$。

无序对的概念在实际中也经常用到。例如，在一次乒乓

球女子双打比赛中，无序对$\{a,b\}$表示获得冠军的一对选手，那么$\{a,b\}$和$\{b,a\}$表示同一对选手。

定义1.1.3 设A和B是两个集合。由$a\in A, b\in B$所组成的无序对构成的集合，叫做A和B的**无序积**，记作$A\&B$。

无序积$A\&B$的一个子集，称为A和B的一个二元关系。当$A=B$时，A和B的二元关系称为A上的二元关系。

例1.1.4 设$A=\{a,b,c,d\}$，求$A\&A$。

解 $A\&A=\{\{a,a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,c\},\{c,d\},\{d,d\}\}$。

对于例1.1.4中的集合A，无序积$A\&A$的一个子集$\{\{a,a\},\{b,c\},\{c,d\}\}$是$A$上的一个二元关系。

1.1.3 图的定义

定义1.1.4 一个图G定义为一个元素偶(V,E)，记作$G=(V,E)$。其中，V是一个集合，它的元素叫做顶点；E是无序积$V\&V$的一个子集合，它的元素叫做边。集合$V\&V$中的元素在E中出现可以不止一次。

我们用$V(G)$和$E(G)$表示图G的顶点集合和边集合。如果$V(G)$和$E(G)$都是有限集，则称G为**有限图**；否则称为**无限图**。本书只研究有限图。

图$G=(V,E)$的顶点个数记作$|V(G)|$，叫做图的阶(order)。边数记作$|E(G)|$。本书若不特别声明，总是用p表示图的阶，用q表示图的边数。

当$q=0$时的图称为**空图**(empty graph)，记作$\varnothing$。$p=1$，$q=0$时的图称为**平凡图**(trivial graph)。所有其它的图称为**非平凡图**。

在图$G=(V,E)$中，若两点之间多于一条边，则称为多

重边。连接两个相同顶点的边的条数叫做边的**重数**。含有多重边的图称为**多重图**。

一条边的端点，称为与这条边相**关联**(incident)。反过来讲也一样，也称这条边与它的端点相关联。

与同一条边关联的两个顶点称为是**邻接**的(adjacent)。对有公共顶点的两条边也采用这种说法。即有公共顶点的两条边，称为是邻接的。

由此可见，在一个图中，点与边之间的基本关系是关联或不关联；点与点，边与边之间的基本关系是邻接或不邻接。

在图中，端点重合为一点的边叫做**环**(loop)。

没有环，也没有重数大于1的边的图叫做**简单图**(simple graph)。

由图的定义可知，一个集合V和V上的一个二元关系就是一个图。因此图的最本质的内容就是一个二元关系，也就是顶点和边的关联关系。一个系统或一个结构若具有二元关系便可用图作为数学模型。

习　题

1.1.1　从日常生活中举出能自然地引出图的五个事例。

1.1.2　设$A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，确定下面集合：

(a) $A\times B$ 和 $B\times A$。

(b) $A\times A$ 和 $B\times B$。

(c) $A\&B$ 和 $A\&A$。

1.1.3　证明：

(a) 若 $A\times A=B\times B$，则 $A=B$。

(b) 若 $A\times B=A\times C$ 且 $A\neq\varnothing$，则 $B=C$。

1.1.4 证明：若G是简单图，则$q\leqslant\binom{p}{2}$。

§1.2 子图和图的运算

1.2.1 子图

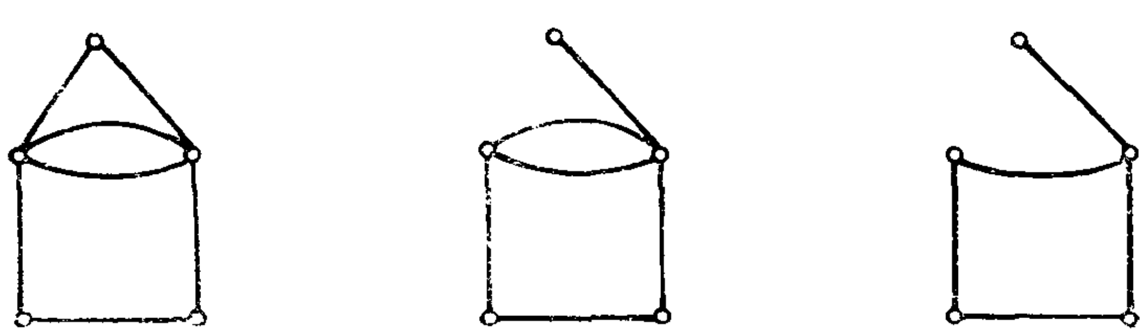
在研究和描述图的性质以及图的局部结构中，子图的概念占有重要地位。

定义1.2.1 已知图$G=(V,E)$和$H=(V',E')$，如果$V'(H)\subseteq V(G)$，$E'(H)\subseteq E(G)$，并且H中边的重数不能超过G中对应边的重数，则称H是G的**子图**（subgraph），记作$H\subseteq G$。

如果H是G的子图，并且$H\neq G$，则称H是G的**真子图**（proper subgraph），记作$H\subset G$。

定义1.2.2 已知图H是图G的子图，并且$V(H)=V(G)$，则称H是G的**生成子图**（spanning subgraph）。

在图1.2-1中，(b)和(c)都是(a)的生成子图，同时(c)也是(b)的生成子图。



(a)　　(b)　　(c)

图 1.2-1