空调负荷计算理论与方法

陈　沛　霖
曹　叔　维　编　著
郭　建　雄

同济大学出版社

前　言

负荷计算是空调设计的基础。近年来对负荷计算的理论与方法愈来愈重视，因为：

1．设计负荷的大小直接影响空调设备的规模和初次投资。

2．随着研究工作的深入，对空调负荷的形成过程有进一步的认识，在理论上和计算方法上将得热量和负荷作为两个不同的概念而予以区分。

3．当前节能问题引起广泛的重视，对一个空调系统的技术经济分析不能仅按设计工况进行，尤其对能耗分析还应按实际运行工况分析。这就要求不仅能作设计工况下的负荷计算，还要能作全年逐时负荷的计算。

于是从本世纪六十至七十年代以来出现多种新的计算方法。当然这些新的方法的出现也不是偶然的，它是与现代科技的发展和电子计算机的广泛应用紧密联系在一起的。

冬季供暖负荷的计算相对来说比较单纯一些，所以本书着重介绍夏季冷负荷的计算。当然这些方法同样可以用于冬季负荷的计算。

近年来国内外科技界在空调负荷计算方面的科研成果，本书中尽可能予以反映。

为了便于阅读，本书对某些必要的数理基础作了简要的介绍。本书原为研究生学习需要而编写的，经数次使用和修改才形成目前的书稿，为了便于应用，本书还提供了一些用于微型计算机的计算程序。限于水平，错误在所难免，敬请读者批评指正。

李悟令先生审阅了全文，提出了非常宝贵的意见，在此表示感谢。

编　者

1987年3月

内容提要

本书系统地叙述了经典的和近年来发展起来的空气调节负荷计算的理论和方法。内容包括空调负荷计算理论的数理基础、三种平壁不稳定传热计算方法的推导和计算实例、通过玻璃窗从室外进入室内的得热量的计算方法、扰量分析、得热与负荷的关系与冷负荷计算方法、动态负荷计算原理等，并介绍了国内外近年来的研究成果和计算机在空调负荷计算中的应用。

本书可作为有关专业的研究生课程或大学生选修课程的教材或大学生"空气调节工程"课程的参考书，也可供有关工程技术人员参考。

责任编辑　方　芳

封面设计　王肖生

空调负荷计算理论与方法

陈沛霖　曹叔维　郭建雄　编著

同济大学出版社出版

（上海四平路1239号）

新华书店上海发行所发行

上海市群众印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：13.25字数：339千字

1987年6月第1版　　1987年6月第1次印刷

印数：1—4500　　科技新书目：141—243

统一书号：15335·037　定价：2.30元

目　录

第1章　线性系统的基本概念

新的空调负荷计算方法引进了热力系统，因此系统的传递函数成了解决问题的关键。这里有必要先介绍与线性系统有关的一些基本概念，特别是传递函数，它是研究平壁不稳定传热的工具。

1.1　系统及数学模型

1.1.1　系统及分类

这里所说的系统是指在错综复杂的宇宙万物中，作为研究对象而隔离出来的一组事物。它们与其它事物的联系可概括为"输入"(外界对系统——这组事物的影响)和"输出"(系统对外界的影响)，以便于研究。据此可以说：系统是指一组事物，它具有以下两个特性：其一，它受其他事物的影响，但这种影响只能通过特定的途径(称为"输入")而发生作用；其二，它对其他事物施加影响，但这种影响也只能通过特定的途径(称为"输出")发生作用。

系统的概念是最基本的概念之一。就空调负荷计算来说，在考虑平壁传热时，将平壁经过一定的简化，作为一个系统。作用在平壁一侧的温度和热流作为输入；另一侧的温度和热流作为输出。再进而考虑由平壁传热所引起的房间冷负荷时，就需要把由房间的各个内表面、家具表面及包围之空气等当作一个系统，作为前一个系统输出的传热量，现在作为输入，为防止室温升高而要由空调设备排除的热量便作为输出。

类似这样的系统都是物理系统，它遵循一定的物理规律。通过这些物理规律可以找出描述系统变化的数学表达式，它们通常是一些微分方程，这些方程称为系统的数学模型。如果系统的数学模型是线性方程，那么该系统就称为线性系统，否则就称为非线性系统。线性系统的一大优点是适用迭加原理。在线性系统中有一类系统称为线性定常系统，它的特点是描述系统的微分方程不仅是线性的，而且方程的系数都是常数。

如果所考察的系统只有一个自变量，比如时间变量 t，则称这种系统为一元系统，描述一元系统的微分方程自然是常微分方程。类似地，可将具有多个自变量的系统称为多元系统，相应的数学模型是偏微分方程。当系统只有一对输出、输入时称为单变量系统；有多对输出、输入时称为多变量系统或称多输入、多输出系统。

1.1.2　系统的串联耦合

一个复杂的系统往往由多个小系统组合而成，这些小系统通常称为大系统的环节。每个环节都有自己的输入、输出和表征系统特性的传递函数(传递函数的定义后面再详细讨论)。各环节之间的联接方式有串联耦合、并联耦合和反馈耦合三种。热力系统所涉及的主要是串联耦合，这里就介绍一下系统的串联耦合，至于并联耦合和反馈耦合，可参见有关文献。

系统的耦合可用方块图来表示，每一个小方块代表一个系统或一个环节，指向方块的箭头代表输入，从方块出发的箭头代表输出。图1.1所示的系统是由两个环节以串联耦合方式组成的。系统的输入 I 即是第一个环节的输入，系统的输出 O 是第二个环节的输

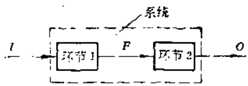

图1.1　串联耦合

出，而第一个环节的输出F就是第二个环节的输入。

空调负荷计算中的多层平壁传热问题，可认为是串联耦合的热力系统。每层平壁是系统中的一个环节。

1.2 系统的特征函数和传递函数

本节先用一元n阶系统来引进线性定常系统的几个重要概念，然后再对其他情况作推广。首先要讨论的是传递函数。

1.2.1 传递函数的定义

假定系统的数学模型为一个一元n阶常系数的常微分方程：

$$A_n\frac{d^n x(t)}{dt^n}+A_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+A_1\frac{dx(t)}{dt}+A_0 x=f(t) \tag{1.1}$$

对于这样的一元系统来说，方程的自由项$f(t)$就是系统的输入，它亦叫作激励、扰量或驱动函数，而未知函数$x(t)$是所要考虑的系统的输出，亦称为响应函数或反应函数。

自由项函数$f(t)$也可以是另一函数$I(t)$的高阶微分表达式：

$$f(t)=B_m\frac{d^m I(t)}{dt^m}+B_{m-1}\frac{d^{m-1}I(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+B_1\frac{dI(t)}{dt}+B_0 I(t) \tag{1.2}$$

这里函数$I(t)$代替$f(t)$被称为系统的输入。

讨论一个系统常希望知道它的输出，也就是要求解系统的数学模型。对常微分方程(1.1)来说，要求出具体的解，还必须带有一组初始条件。为了真正反映出系统的内在特性，我们始终假定方程的初始条件为零，即设式(1.1)带有以下的定解条件：

$$x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-1)}(0)=0 \tag{1.3}$$

对方程(1.1)取拉普拉斯变换，记$L[x(t)]=\bar{x}(s)$，$L[f(t)]=\bar{f}(s)$，注意到式(1.3)，可有：

$$(A_n s^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_1 s+A_0)\bar{x}(s)=\bar{f}(s) \tag{1.4}$$

令式(1.4)左边$\bar{x}(s)$的系数多项式为零，即得式(1.1)的特征方程：

$$A_n s^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_1 s+A_0=0 \tag{1.5}$$

这方程有n个复根s_1、s_2、…、s_n，称为原微分方程的特征根。这个由复变量s多项式所组成的函数：

$$V(s)=A_n s^{n-1}+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_1 s+A_0 \tag{1.6}$$

称为微分方程(1.1)或相应系统的特征函数。

由式(1.4)可知$V(s)$不因输入$\bar{f}(s)$或输出$\bar{x}(s)$的不同而改变，它独立于输入和输出函数，只反映了方程所描述的物理系统的特性（但不表示系统的物理属性。因为不同物理内容的系统可以用相同的微分方程来描述，例如研究分子在液体中的扩散现象时，溶质的浓度c同样满足热传导方程的形式）。

如果利用特征函数来定义一个新函数$G(s)$：

$$G(s)=\frac{1}{V(s)} \tag{1.7}$$

则由式(1.4)就能将系统的输出表示为：

$$\bar{x}(s)=G(s)\bar{f}(s) \tag{1.8}$$

此式表示输入$\bar{f}(s)$经过$G(s)$的变换而变成了输出$\bar{x}(s)$，因此函数$G(s)$通常称为方程所描述

之系统的传递函数。

当系统的输入是以函数 $I(t)$ 的某个微分式 (1.2) 表示时，系统的特征函数仍为式(1.6)表示的 $V(s)$，但此时联系输出与输入的传递函数是两个 s 多项式之比，因为此时对方程取拉普拉斯变换的结果有：

$$(A_ns^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_0)\bar{x}(s)=(B_ms^m+\cdots+B_0)\bar{I}(s)$$

其中$\bar{I}(s)=L[I(t)]$，那么当：

$$G(s)=\frac{B_ms^m+\cdots+B_0}{A_ns^n+\cdots+A_0}$$

时，仍可有形如式(1.8)的关系：

$$\bar{x}(s)=G(s)\bar{I}(s)$$

据此，定义线性系统的传递函数为系统输出和输入函数的拉普拉斯变换之比：

$$G(s)=\frac{\bar{x}(s)}{\bar{f}(s)} \tag{1.9}$$

传递函数如同特征函数一样，只取决于系统的特征，而独立于输入和输出函数。显然在研究一个系统的时候，传递函数有着特殊的作用。一旦知道了传递函数 $G(s)$ 就能把系统的反应简洁地表示出来。

1.2.2 多变量系统的传递函数

多变量系统的数学模型是一个方程组。为了讨论方便，我们以一组两个方程的一元系统为例来推广传递函数的概念。设系统的数学模型为如下的方程组：

$$\begin{cases} A_{1k}\dfrac{d^kx_1(t)}{dt^k}+\cdots+A_{10}x_1(t)+A_{2l}\dfrac{d^lx_2(t)}{dt^l}+\cdots+A_{20}x_2(t)=f_1(t) \\ B_{1m}\dfrac{d^mx_1(t)}{dt^m}+\cdots+B_{10}x_1(t)+B_{2n}\dfrac{d^nx_2(t)}{dt^n}+\cdots+B_{20}x_2(t)=f_2(t) \end{cases} \tag{1.10}$$

仍然假定系统带有零初始条件。对上式取拉普拉斯变换可有：

$$\begin{cases} (A_{1k}s^k+\cdots+A_{10})\bar{x}_1(s)+(A_{2l}s^l+\cdots+A_{20})\bar{x}_2(s)=\bar{f}_1(s) \\ (B_{1m}s^m+\cdots+B_{10})\bar{x}_1(s)+(B_{2n}s^n+\cdots+B_{20})\bar{x}_2(s)=\bar{f}_2(s) \end{cases}$$

其中：

$$\bar{x}_1(s)=L[x_1(t)], \qquad \bar{x}_2(s)=L[x_2(t)]$$
$$\bar{f}_1(s)=L[f_1(t)], \qquad \bar{f}_2(s)=L[f_2(t)]$$

并把未知函数的多项式系数简记为：

$$V_{11}(s)=A_{1k}s^k+\cdots+A_{10}$$
$$V_{12}(s)=A_{2l}s^l+\cdots+A_{20}$$
$$V_{21}(s)=B_{1m}s^m+\cdots+B_{10}$$
$$V_{22}(s)=B_{2n}s^n+\cdots+B_{20}$$

则有：

$$\begin{cases} V_{11}(s)\bar{x}_1(s)+V_{12}(s)\bar{x}_2(s)=\bar{f}_1(s) \\ V_{21}(s)\bar{x}_1(s)+V_{22}(s)\bar{x}_2(s)=\bar{f}_2(s) \end{cases} \tag{1.11}$$

式(1.11)不难用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) \\ \bar{x}_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{f}_1(s) \\ \bar{f}_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.11a}$$

比较式(1.4)与(1.11)可得，式(1.11)中的特征函数不是一个而是四个，它可用如上的矩阵来表示。把矩阵

$$\begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix} = \vec{V} \tag{1.12}$$

称作微分方程组(1.10)的特征矩阵。方程组的特征方程可由相应的行列式为0得到：

$$|\vec{V}| = \begin{vmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.13}$$

特征矩阵(1.12)一般应为满秩的(当 s 不是特征根时矩阵的行列式非零)，则其逆矩阵存在，设为：

$$(\vec{V})^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \vec{G}(s) \tag{1.14}$$

那么

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) \\ \bar{x}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_1(s) \\ \bar{f}_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

矩阵$\vec{G}(s)$的作用与传递函数完全一样，因此把矩阵 $\vec{G}(s)$称为微分方程组(1.10)或多变量系统的传递矩阵，该矩阵的元素 $G_{ij}(s)$ 仍称为系统的传递函数。

对于有 m 个输入 $f_1(t)$，…，$f_m(t)$；n 个输出$x_1(t)$，…，$x_n(t)$ 的多变量系统，系统的传递矩阵为：

$$\vec{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s)G_{12}(s)\cdots G_{1m}(s) \\ G_{21}(s)G_{22}(s)\cdots G_{2m}(s) \\ \vdots \\ G_{n1}(s)G_{n2}(s)\cdots G_{nm}(s) \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

它把输出和输入函数象式(1.8)一样地联系起来：

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(s) \end{bmatrix} = \vec{G}(s) \begin{bmatrix} \bar{f}_1(s) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(s) \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

1.2.3 串联耦合系统的传递函数

如前面所述，一个串联耦合系统是由若干个呈串联连接的环节所组成，每个环节都是一个小系统，有它自己的传递函数。这里来讨论串联耦合情况下，传递函数间的关系。

如图1.1所示，系统的总输入是$I(s)$，总输出是 $O(s)$，传递函数是$G(s)$。第一个环节的传递函数是$G_1(s)$，输入是$I(s)$，输出为$F(s)$；第二个环节的传递函数为$G_2(s)$，输入是$F(s)$，输出为系统的总输出$O(s)$。则依据传递函数的定义有：

$$G(s) = \frac{O(s)}{I(s)} \tag{1.18}$$

$$G_1(s) = \frac{F(s)}{I(s)} \tag{1.19}$$

$$G_2(s) = \frac{O(s)}{F(s)} \tag{1.20}$$

整理式(1.18)～(1.20)可得：

$$G_1(s)\cdot G_2(s) = \frac{F(s)}{I(s)} \cdot \frac{O(s)}{F(s)} = \frac{O(s)}{I(s)} = G(s)$$

即 $$G(s)=G_1(s)\cdot G_2(s) \tag{1.21}$$
不难将此结果推广到 n 个环节串联的系统上去。因此，串联系统的传递函数是各个环节传递函数的乘积。

1.3 系统的加权函数

借助于拉普拉斯变换很容易把系统的反应即方程的解表达成式(1.8)，但通常希望得到的是用时间变量表示的函数，这就要求出 $x(s)$ 的拉普拉斯逆变换。拉普拉斯逆变换有时并不容易求得，然而可以利用卷积积分把系统的反应直接表示为一个积分型的时间函数。为此，引入一个新的时间函数 $W(t)$，使其拉普拉斯变换就是传递函数 $G(s)$，即令
$$L[W(t)]=G(s) \tag{1.22}$$
或
$$W(t)=L^{-1}[G(s)] \tag{1.23}$$
由此改写式(1.8)为：
$$L[x(t)]=L[W(t)]L[f(t)] \tag{1.24}$$
再由卷积定理得：
$$x(t)=W(t)*f(t)=\int_0^t W(u)f(t-u)du \tag{1.25}$$

为解释卷积的意义，作如下讨论。

由式(1.22)和拉普拉斯变换的定义可知：
$$G(s)=\int_0^\infty W(t)e^{-st}dt \tag{1.26}$$
而
$$G(s)=\frac{1}{V(s)}=\frac{1}{A_ns^n+\cdots+A_1s+A_0} \tag{1.27}$$
若取 $s=0$，则从式(1.26)和式(1.27)可有：
$$\int_0^\infty W(t)\,dt=G(0)=\frac{1}{A_0},\quad (A_0\neq 0) \tag{1.28}$$
此式说明函数 $W(t)$ 在 0 到∞上的积分为一定值。现用此结果改写式(1.25)为：
$$\frac{x(t)}{G(0)}=\frac{\int_0^t W(u)f(t-u)du}{\int_0^\infty W(t)dt} \tag{1.29}$$
这是一个总权为 $\int_0^\infty W(t)$ 的加权平均值，$W(t)$ 为一加权函数。那么式(1.23)定义了微分方程(1.1)所描述之系统的一个加权函数。对一个线性系统来说，加权函数是用时间变量 t 表示的传递函数。如果把 $W(t)$ 从时间 t 域变到复数 s 域中便是传递函数 $G(s)$。也可以这么说：$W(t)$ 是用 t 语言表达的传递函数 $G(s)$。

式(1.29)与式(1.25)至多相差一个常数。特别在 $G(0)=1$ 时，两式完全相同。所以不妨把 $\int_0^t W(u)f(t-u)du$ 看作是一个加权平均值(严格地说，它应是在总权 $G(0)=1$ 时，函数 $f(t-u)$ 在 $[0,t]$ 上的加权平均值)。当把卷积看作为一个加权平均值时，可以把它解释为系统对

“输入”在现时刻 t 及以前时刻的“记忆”，系统的记忆能力就由加权函数 $W(t)$ 反映出来。

为了说明这一点，据式(1.25)作出图 1.2。取 U 轴(同样表示时间)与 t 轴反向使 U 轴的原点对着时刻 t，置整个 $W(u)$ 图象于 $f(t)$ 图象之上，再把 $W(u)$ 与 $f(t-u)$ 逐点相乘得到函数 $W(u)f(t-u)$ 的图象，将它整个地置于 $f(t)$ 图象之下。那么据积分的几何意义便知，在时刻 t，系统的输出 $x(t)$ 便是如图曲线 a 下的阴影部份的面积。

$W(u)$ 表示系统对输入量 $f(t-u)$ 的记忆情况，即对时刻 t 之前 u 时间的输入记牢了多少。而系统的输出 $x(t)$ 是系统在时刻 t 及 t 以前所有时间对输入 $f(t)$ 的不同记忆结果。在图1.3(a)、(b) 中画出了两种特殊情况：图(a)中的加权函数 $W(t)$ 说明了系统只对所考虑时刻之前 a 秒钟的输入有记忆，它的输出由此时的输入来决定。而图(b)中 $W(t)$ 表明该系统对所考虑时刻及该时刻之前很近的一段时间 b 内，系统的记忆力是一样的，而再往前则都“忘记”了，因此系统的输出就由现时及近前的输入决定。

空调负荷计算中的热力系统由于热惰性的关系具有这种对扰量“记忆”的特点，因此在空调负荷的计算式中常采用卷积的形式。

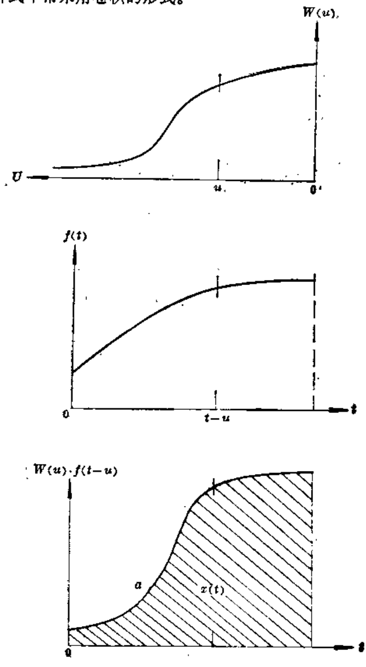

图 1.2 卷积的图解

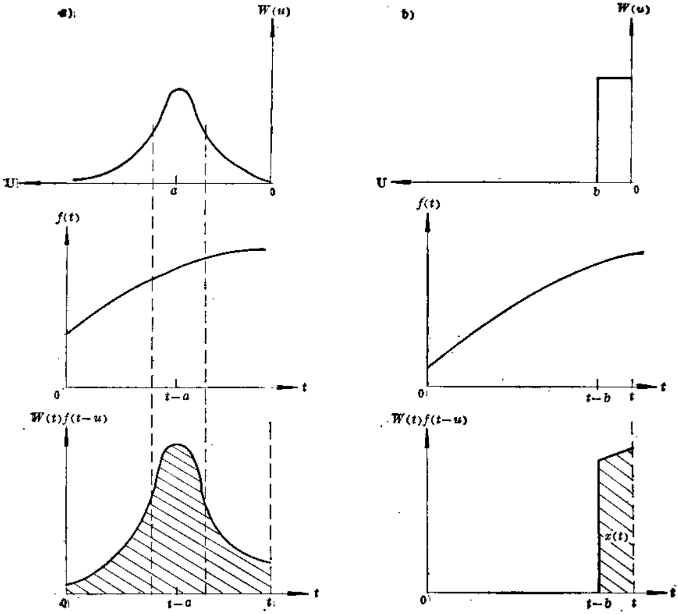

图1.3 系统的记忆

1.4 频率反应和脉冲反应

当输入函数具有不同的形式时，其反应也不同。这里讨论两种特殊输入下系统的频率反应和脉冲反应。

1.4.1 频率反应(正弦传递函数)

假定系统的输入为 $f(t)=ae^{st}$(a为常数)，容易验证

$$x(t)=G(s)ae^{st} \tag{1.30}$$

是方程(1.1)的一个特解。

现设输入为一正弦函数：

$$f(t)=a\sin\omega t \tag{1.31}$$

或为指数函数：

$$f(t)=ae^{i\omega t} \tag{1.32}$$

前者是后者的虚部，两者可统称为谐量。其中a、ω为实数，为方便起见，假定$a>0$和$\omega>0$，a

称为此正弦输入的振幅，ω 是它的角频率。

由式(1.30)，只要令传递函数 $G(s)$中的复变数 $s=j\omega$，便可得出系统的输出为：

$$x(t)=G(j\omega)ae^{j\omega t} \tag{1.33}$$

把复数$G(j\omega)$用其模和幅角表示为：

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\arg G(j\omega)}$$

则

$$x(t)=|G(j\omega)|ae^{j[\omega t+\arg G(j\omega)]} \tag{1.34}$$

从式(1.34)可以看出，当输入为一正弦函数(谐量)时，线性系统的输出也是一个谐量。输出的振幅为：

$$|G(j\omega)|a$$

是输入振幅的$|G(j\omega)|$倍。而输出相对输入的相位滞后了 $-\arg G(j\omega)$。因此这时的传递函数 $G(j\omega)$说明了在系统作用下输出谐量对于输入谐量的变化。根据$G(j\omega)$的这个意义，工程技术上常把它称为正弦传递函数，可以说它是输入为谐量时的系统传递函数。此时输出 $x(t)$ 也称作频率反应或频率反应函数。

当频率 $\omega\to 0$ 时，输入便是一个不变的常数 a，此时方程的解就是稳态解，频率反应为 $G(0)$，它是常量输入时系统的稳态解与输入量的比。常把$|G(0)|$称为系统的放大或增益，这就是传递函数 $G(s)$在 $s=0$ 时的物理意义。

1.4.2 脉冲反应

如果系统的输入为一个脉冲函数，即令：

$$f(t)=\delta(t)$$

由于$\delta(t)$的拉普拉斯变换为1，所以此时式(1.8)便为：

$$\bar{x}(s)=G(s) \tag{1.35}$$

或有：

$$x(t)=L^{-1}[\bar{x}(s)]=L^{-1}[G(s)]=W(t) \tag{1.36}$$

此式说明系统的加权函数 $W(t)$ 就是当输入为单位脉冲函数 $\delta(t)$时的输出或反应，也就是系统的脉冲反应。

当然根据系统分析的需要还可以对系统输入一些别的基本特殊函数，如单位阶跃函数 $U(t)$、单位矩形波函数$S(t)$、单位三角波函数 $T(t)$等，都可以得出系统相应的反应，并分别称之为单位阶跃反应、单位矩形波反应和单位三角波反应等。

1.5 多元系统的传递函数

迄今为止所讨论的都是一元时变系统，即用常微分方程描述的线性系统。但是以后要讨论的问题都与热传导方程有关，它至少有一个时间变量 t 和一个空间变量 x，是一个多元系统。描述多元系统的数学模型是偏微分方程，以及必要的初始条件与边界条件。实际上系统的数学模型是一个偏微分方程的定解问题。如果系统是单变量的，即只有一个输入和一个输出，那么数学模型只有一个偏微分方程；如果是多变量系统，有多个输入和输出，那么系统的数学模型便是一个偏微分方程组。无论哪一种情况，多元系统的传递函数都不能直接从方程的拉普拉斯变换得到。

传递函数的实质是把输入转变为输出。在常微分方程描述的系统中它可以定义为输入与输出的拉普拉斯变换之比，并以复数 s 的两个多项式之比的形式出现。

在多元系统中，对某两个特定量，它们都是时间的函数，例如对一个包含有时空变元的

系统,由边界条件给出的时间函数便是取定了空间变元的特殊量。如果取出这样两个特殊量,并把一个作为系统的输入，记作$I(t)$；另一个为待求的输出$O(t)$。当用拉普拉斯变换求解方程时（假定所有函数都可以取时间变元的拉普拉斯变换），函数中的变元t都被复数s代替,因此这两个特殊量也都成了s的函数。又假如仍可以用这两个函数的比来得到一个新的函数$G(s)$：

$$G(s)=\frac{\text{输出的}L\text{变换}}{\text{输入的}L\text{变换}}=\frac{\bar{O}(s)}{\bar{I}(s)}$$

那么这个比与输出和输入函数无关，只与系统本身特性有关。仍然可以得到如式（1.8）的关系：

$$\bar{O}(s)=G(s)\bar{I}(s)$$

从而仍称之为系统的传递函数。

上述这些假设对多元线性系统一般是行得通的。当然多元系统可能是多个输入和多个输出的多变量系统，它的传递函数不止一个而有多个，同样可以用传递矩阵表示。借助于传递矩阵同样可以来推广耦合系统的传递矩阵之间的关系。在讨论平壁热力系统时，将具体讨论这种情况。

1.6 采样数据系统

以前讨论的输入、输出信号，都是基于连续变量或连续函数，称相应系统为连续系统。但是实际问题中很大一类时间变量需要由观察得到，它们往往是一组不同时刻的离散数据。同时数字计算机的应用也要求某些变量取用离散数值的形式，因此就有离散系统或叫做采样数据系统。离散系统与连续系统的区别在于离散系统的信号是采样数据。

离散系统的离散值时间间隔$\varDelta$一般比较短暂,在离散值之间可以用简单的插值法来近似。据离散的时间间隔不同可以有不同的离散系统。如果采样是周期的，时间间隔为一常数，这样的采样数据可以看作一个整标函数，为原连续函数$f(t)$的一组采样值：

$$f(t)\big|_{t=n\varDelta}=f(n\varDelta)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$\varDelta$为采样时间间隔，也称为采样周期。此外还有多价采样和随机采样等情况，这里只讨论周期采样的情况。

研究采样系统的工具是函数的Z变换，它的作用如同连续系统中的拉普拉斯变换一样。

1.6.1 采样系统

采样系统可以由一个连续系统加上采样器和保持器两个基本元件构成。

1．采样器

采样器可以由理想开关充当，当采样器每隔一个采样周期$\varDelta$闭合一次时，输入信号$f(t)$通过采样器后的输出就是一串理想脉冲序列：

$$f(0),\ f(\varDelta),\ f(2\varDelta),\ \cdots,\ f(n\varDelta),\ \cdots$$

可以用一个单位脉冲序列$\delta_\varDelta(t)$

$$\delta_\varDelta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-n\varDelta)\tag{1.37}$$

来描述一个采样器的功能(见图1.4)。对连续函数$f(t)$的采样过程就是把这个脉冲序列作用到连续函数$f(t)$上去，因此：

$$f^*(t)=f(t)\delta_\Delta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f(t)\delta(t-n\Delta) \tag{1.38}$$

便是采样器的输出。$\delta(t-n\Delta)$是表示发生在时刻$n\Delta$的一个单位脉冲。在 $t=n\Delta$ 时有：

$$\begin{aligned} f^*(t)\mid_{t=n\Delta} &= \sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)\delta(n\Delta-n\Delta) \\ &= f(n\Delta)\,\delta(0) \end{aligned} \tag{1.39}$$

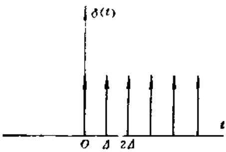

图 1.4

此时的脉冲强度即为 $f(n\Delta)$，是 $f(t)$在$t=n\Delta$ 时的一个采样值。$f^*(t)$便是如图 1.5 所示的一串强度为 $f(n\Delta)$的脉冲，也就是 $f(t)$的一组采样值。因此把 $f^*(t)$称作连续函数 $f(t)$ 的采样函数。式(1.39)中的 $\delta(0)=\delta(t-n\Delta)\mid_{t=n\Delta}$。当 $n=0,1,2,\cdots$时，式(1.38)中的 $f(t)$，即为$f(0)$，$f(\Delta)$，$f(2\Delta)$，$\cdots$。于是可改写式(1.38)为：

$$f^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta) \tag{1.40}$$

把采样器当作理想脉冲发生器是近似的，有条件的，就是说采样周期Δ应远大于采样的持续时间。这一点通常是可以满足的，但是采样周期Δ也不能太长，否则可能会漏掉部分信息。

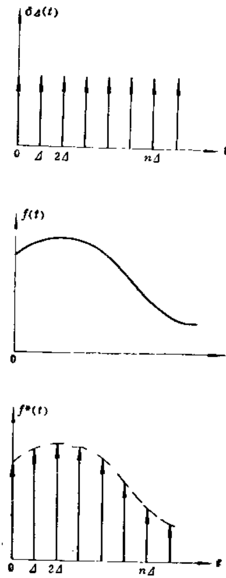

图 1.5

2. 保持器

在采样间隔上进行插值是由保持器来完成的。保持器能够将采样信号转变为连续信号，这个连续信号近似地重现了作用在采样器上的信号。保持器对采样时刻之间的信号值用一个常数或线性函数或其他多项式的时间函数去逼近。能够物理地实现的保持器都必须按现在时刻或过去时刻的采样值进行外推，而不能按将来时刻的采样值外推或内插。

最简单的保持器——0阶保持器能够将采样信号转变成在两个连续采样瞬时之间保持为常量的信号，即把$n\Delta$时刻的采样值不增不减地外推到下一个采样时刻$(n+1)\Delta$，因此对一个0阶保持器来说，如果对它输入一个单位脉冲$\delta(t)$，它的输出将是一个单位矩形波函数，即$S(t)=U(t)-U(t-\Delta)$。从而可知道0阶保持器的传递函数(见图1.6)：

$$G_S(s)=\frac{L[S(t)]}{L[\delta(t)]}=\frac{1-e^{-\Delta s}}{s} \tag{1.41}$$

连续函数$f(t)$经过采样器和保持器后所得的连续函数$f_S(t)$(见图1.7)与原函数是有差别的，且有相位差。但0阶保持器比较简单，容易实现。与一阶或高阶保持器相比，它的相位滞后较小，因此是经常采用的一种保持器。

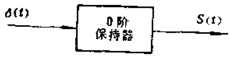

图 1.6

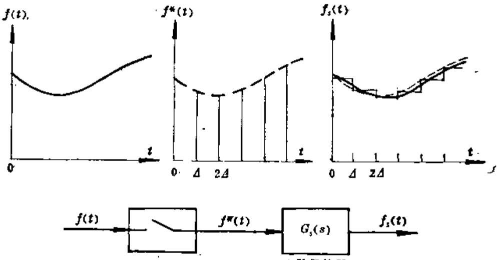

图 1.7

1.6.2 采样数据系统

对一个连续系统，若要考虑它的输入和输出都是采样数据时，就要把采样器和保持器引入到系统中去，而且输入和输出的采样是同步的。所谓同步是指它们的采样周期和采样时间相同，如图1.8所示。图中将保持器作为一个环节加入到原来的连续系统中去，显然它们与原系统成串联耦合。当把这个环节与原系统合并得到一个新系统时，新系统的s传递函数$H(s)$便为：

$$H(s)=G_S(s)\cdot G(s) \tag{1.42}$$

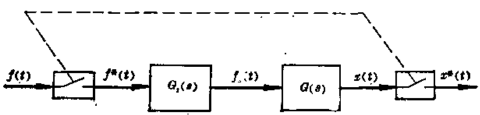

图 1.8

1.7 Z变换简介

拉普拉斯变换是研究连续系统的有力工具，当把拉普拉斯变换应用于上述的采样系统时，就可得到研究采样系统的工具——Z 变换。

1.7.1 Z 变换的引入和定义

连续函数 $f(t)$经过采样器的作用可得采样函数 $f^*(t)$，它相当于对 $f(t)$用 δ 函数进行脉冲分解。即：

$$f^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)$$

对此式取拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned}F^*(s)&=L[f^*(t)]=L\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)L[\delta(t-n\Delta)]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)e^{-n\Delta s}\end{aligned}$$

作复变数代换，令

$$e^{\Delta s}=z \tag{1.43}$$

即

$$s=\frac{1}{\Delta}\ln z \tag{1.44}$$

所以

$$L[f^*(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)z^{-n} \tag{1.45}$$

$f(t)$ 是已知函数，$f(n\Delta)$则是该函数的一组已知函数值。

$$z^{-n}=e^{-n\Delta s}=L[\delta(t-n\Delta)]$$

由拉普拉斯变换的延迟定理可知，它表示在$n\Delta$时刻的一个脉冲。从而$f(n\Delta)z^{-n}$表示了某个连续函数在第 n 个采样周期被采了一次样，其值为 $f(n\Delta)$，因此表达式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)z^{-n}$$

便简洁地综合了采样器和拉普拉斯变换的作用，定义这个表达式为连续函数 $f(t)$ 的 Z变换，记作$F(z)$或$Z[f(t)]$，即：

$$F(z)=Z[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\Delta)z^{-n} \tag{1.46}$$

此式表示了$f(t)$的一组采样值，以及每个采样值的采样时刻。

当函数$f(t)$已知时，它的Z变换根据定义式(1.47)很容易写出。

1.7.2 Z 变换的求法

对一个满足条件的时间函数$f(t)$，按定义很容易写出它的Z变换的级数形式(见式1.46)。若所讨论的问题可以满足于此种级数表达式的话，就无所谓求函数Z变换的方法问题。但实用上常常希望用有限形式来表达一个无穷级数，所以这里所谈的“求法”是指求有限形式而言。

1. 级数求和法

顾名思义这就是由定义式的无穷级数直接求它的有限表达式。