指数函数和对数函数

上海教育出版社

指数函数和对数函数

徐美琴 许三保 编

上海教育出版社

内 容 提 要

本书讨论了指数和对数运算的一系列基本性质和运算法则，并在此基础上讨论了指数函数和对数函数的初等性质以及解析性质，最后简要地介绍了复变数指数函数和对数函数。本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读。

指数函数和对数函数

徐美琴 许三保 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 3.5 字数 76,000

1978 年 10 月第 1 版 1978 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—130,000 本

统一书号：7150·1921 定价：0.26 元

目　录

一、指数运算

在初中一年级的代数课程中，我们知道，乘幂是被定义为若干个相同因子的乘积. 例如，数 a 的 n 次幂，是指：

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}}, \tag{1}$$

其中，a 叫做底数，n 叫做指数，a^n 叫做幂.

在(1)式中，对于底数 a，没有任何限制，a 可以是正数，也可以是负数，也可以是零；而对于指数 n，必须是正整数，否则(1)式就没有意义！这样，我们又称按(1)式定义的 a^n 为正整数指数幂.

对于正整数指数幂 a^n，运用乘法和除法运算律，可以证明正整数指数幂 a^n 具有下面五条性质：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(2) 当 $a \neq 0$ 时，有

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{当 } m > n \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } m = n \text{ 时}, \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{当 } m < n \text{ 时}; \end{cases}$$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(4) $(ab)^n = a^n b^n$;

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$，其中 $b \neq 0$.

上述五条性质，被称为是关于正整数指数幂的五条指数法则.

现在，我们来考虑一个问题：怎样把幂的指数从正整数出

发进行拓广呢？例如，怎样来定义整数指数幂、有理数指数幂、实数指数幂，使拓广后的幂仍能满足上述正整数指数幂的五条指数法则中的全部或主要部分. 但是，直接用(1)式来推广是不可能的，因为在(1)式中，当 n 是零或负整数时已无意义，更不消说是 n 为有理数或实数了. 并且，要想用一个统一的式子来定义正整数指数幂、整数指数幂、有理数指数幂以至实数指数幂，这在初等数学范围里几乎可以说是做不到的.

下面，我们将对零次幂、负整数指数幂、分数指数幂以及无理数指数幂采取分别定义的办法，然后验证推广后的幂具有指数运算的本质属性，而这只要验证在各种情况下成立指数法则就可以了.

I. 整数指数幂

把幂的指数从正整数推广到整数，就得定义一个数的零次幂和负整数指数幂. 由于要求推广后的幂仍能满足指数法则 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，所以可以从这一指数法则出发，倒过来探求应该如何定义零次幂和负整数指数幂.

由于 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 在幂的指数推广后应仍成立，不妨假设 $n=0$，m 仍是正整数. 那么，有

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m,$$

这样，当 $a \neq 0$ 时，便有 $a^m \neq 0$，所以

$$\frac{a^m \cdot a^0}{a^m} = \frac{a^m}{a^m}, \qquad (a \neq 0)$$

即有

$$a^0 = 1. \qquad (a \neq 0)$$

另外，若假设 $m=-n$，n 仍为正整数. 那么，有

$$a^m\cdot a^n=a^{-n}\cdot a^n=a^{-n+n}=a^0=1, \qquad (a\neq 0)$$

所以

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}. \qquad (a\neq 0)$$

这就是说，只要底数 $a\neq 0$，我们规定

$$a^0=1, \tag{2}$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \tag{3}$$

是有可能保证 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 对一切整数 m、n 仍成立的．这样，通过(1)、(2)、(3)三个式子，幂 a^n 对一切整数指数都有意义了，不过在 n 为零或负整数的场合需对 a 有些限制．

至此，推广到整数指数幂的工作并没有完，还得证明这样推广的合理性．也就是说，按(1)、(2)、(3)式定义的整数指数幂满足指数法则．

下面先以第一条指数法则为例，证明对整数指数 m、n，成立 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

证明 当 m、n 均是正整数的情况，已不必再证明了．而当 m、n 中至少有一为零时，结论也是显然的．现在只要讨论下述两种情形就可以了：

(1) 当 m、n 中一个为正整数，另一个为负整数的情形．不妨假定 m 是正整数，n 是负整数．令 $p=-n$，那么 p 即是正整数．当 $a\neq 0$ 时，有

$$a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^{-p}=a^m\cdot\frac{1}{a^p}=\frac{a^m}{a^p}$$

$$=\begin{cases} a^{m-p}=a^{m+n}, & (\text{当 } m>p \text{ 时}) \\ 1=a^{m-p}=a^{m+n}, & (\text{当 } m=p \text{ 时}) \\ \dfrac{1}{a^{p-m}}=a^{-(p-m)}=a^{m-p}=a^{m+n}. & (\text{当 } m<p \text{ 时}) \end{cases}$$

(2) 当 m、n 均是负整数的情形. 令 $p=-m$, $q=-n$, 那么 p、q 均是正整数. 当 $a\neq 0$ 时, 有

$$a^m\cdot a^n=a^{-p}\cdot a^{-q}=\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^p\cdot a^q}$$

$$=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{m+n}.$$

这就证明了, 对于任意整数指数 m、n, 指数法则 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 是成立的.

接着, 我们来验证整数指数幂满足第二条指数法则. 证明之前先作一点说明, 由于引进了负整数指数幂和零次幂, 正整数指数幂的第二条指数法则中, 右边的三种情形可以统一地写成 a^{m-n}. 这是因为, 当 $m=n$ 时, $1=a^0=a^{m-n}$; 而当 $m<n$ 时,

$$\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}.$$

所以, 第二条指数法则可以表示成

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}. \tag{4}$$

现在我们来验证第二条指数法则对整数指数幂是成立的.

证明 当 m、n 均是正整数的情况, 已不必再证明了, 现在只要就下述三种情况来验证(4)式成立就可以了.

(1) 当 m、n 中有一个为 0 时, 可分别讨论如下:

当 $m=0$ 时,

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}=a^{-n}=a^{m-n};$$

当 $n=0$ 时,

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^0}=a^m=a^{m-n}.$$

(2) 当m和n中，一个为正整数，一个为负整数时，也分两种情况分别讨论如下：

当$m>0$, $n<0$时，令$-n=p$，则$p>0$，所以

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{-p}}=a^m\cdot a^p$$

$$=a^{m+p}=a^{m-n};$$

当$m<0$, $n>0$时，令$-m=p$，则$p>0$，所以

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{-p}}{a^n}=\frac{1}{a^p\cdot a^n}=\frac{1}{a^{n+p}}$$

$$=a^{-(n+p)}=a^{-n-p}=a^{m-n}.$$

(3) 当m和n都为负整数时，令$-m=p$, $-n=q$，则$p>0$, $q>0$，所以

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{-p}}{a^{-q}}=a^{-p}\cdot a^q=a^{-p+q}=a^{m-n}.$$

这就证明了，对任意整数m, n，第二条指数法则是成立的.

进一步，我们来验证整数指数幂满足其余几条指数法则.为了证明的方便，我们先推广(3)式，即证明对于任意整数n，均有

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}. \tag{5}$$

(5)式和(3)式不同的地方在于：(5)式中n可以是任意整数，而(3)式中n只能是正整数．要证明(5)式，只须验证当$n<0$时(5)式成立就可以了，这是因为$n>0$的情况已由(3)式保证，$n=0$的情况可根据(2)式也是显然的．而当$n<0$时，有$-n>0$，于是

$$a^{-(-n)}=\frac{1}{a^{-n}}，\text{即 } a^n=\frac{1}{a^{-n}}.$$

由此即证得了(5)式，即当$n<0$时，也成立下式：

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

另外，前面已指出，第二条指数法则可以统一成

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

进一步，根据(5)式，上面(4)式的结论又可统一在$a^m\cdot a^{n'}=a^{m+n'}$，即本质上属于第一条指数法则了。

同样，由于把(3)式推广到了(5)式，第五条指数法则的结论也就包含在第四条指数法则之中了。这样，我们验证整数指数幂的五条指数法则实际上只要验证第一、三、四这三条法则就可以了。

现在来验证第三条指数法则$(a^m)^n=a^{mn}$对整数指数幂是成立的。

证明 当m、n均是正整数的情况，已不必再证明了。而当m、n中至少有一为零时，根据(2)式，结论也是显然的。现在只要讨论下述两种情况就可以了：

(1) 当m、n均是负整数的情形。令$p=-m$，$q=-n$，那么p、q均是正整数。根据(5)式和正整数指数幂的第三、五条指数法则，即有

$$(a^p)^q=a^{p\cdot q}.$$

而

$$(a^m)^n=(a^{-p})^{-q}=\left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q}=\frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}}$$

$$=a^{p\cdot q}=a^{(-p)\cdot(-q)}$$
$$=a^{m\cdot n}.$$

(2) 当 m、n 中有一为正整数，另一为负整数的情形，证明完全是同样的. 例如 $m>0$、$n<0$. 这时可设 $n=-q$，根据(5)式和已证得的正整数指数幂的指数法则，即有

$$(a^m)^n=(a^m)^{(-q)}=\frac{1}{(a^m)^q}=\frac{1}{a^{mq}}=\frac{1}{a^{-mn}}=a^{mn}.$$

类似地，读者可以自行证明第四条指数法则对整数幂成立. 这样，用(1)式定义的正整数指数幂，通过(2)、(3)式推广到整数指数幂时，由于这五条指数法则仍能保持成立，说明这种推广是合理的.

并且，原来的五条指数法则，就可以归并为下列三条:

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,

(2) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$,

(3) $(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

这里，对于底数，应有使等号两边都有意义的限制(即对零次幂或负整数指数幂，底数不能等于零)，指数则可以是任意整数.

2. 有理数指数幂

这里，将对整数指数幂作进一步推广，把幂的指数推广到有理数的情形. 我们知道，所谓有理数，是指整数和分数. 而整数指数幂在前面已有定义，这里只要给出分数指数幂的定义就可以了. 怎样来定义 a^r 呢 (r 为分数)? 和在讨论推广到零次幂和负整数指数幂时的情形一样，必须保证指数法则对分数指数幂仍能成立. 这里，我们可以从指数法则 $(a^m)^n=a^{mn}$

出发，倒过来探求应该如何来定义分数指数幂 a^r.

由于我们希望指数法则 $(a^m)^n=a^{mn}$ 在指数推广到分数时仍要成立，不妨假设 $m=\frac{p}{q}$，其中 p 是整数，q 是正整数，并令 $n=q$. 那么，即有

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q=a^{\frac{p}{q}\times q}=a^p.$$

因而，必然有

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

这里，当指数 $\frac{p}{q}$ 不是整数时，就得限定 $a>0$[1].

由此可见，我们把指数推广到分数情形时，幂和根式联系起来了，即把分数指数幂 a^r 定义为

$$a^r=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}, \tag{6}$$

其中：p 为整数，q 为正整数；$a>0$.

这里，同样提出一个问题：用(6)式对指数所作的推广是否合理呢？为了证明这种推广的合理性，这就要证明，用(1)、(2)、(3)、(6)式定义的有理数指数幂是满足指数法则的. 对此，只须根据有理数指数幂的定义、整数指数幂的指数法则，以及根式的运算律，即可完成证明. 在证明之前，我们先回顾一下根式运算律：

(1) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$；

---

[1] 根据算术根的道理，根号里面的数必须为正数. 尽管我们偶尔对负数也用上根号的记号，例如 $\sqrt[3]{-8}=-2$，但这只是一种大家都理解的记法而已，指数法则和根式运算律已对它不适用了，例如根式运算律有 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，而 $\sqrt[3]{-8}\neq\sqrt[6]{(-8)^2}$. 所以，涉及根式或分数指数幂的讨论时，我们是不考虑底数 $a<0$ 的情况的.

(2) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

(3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{(a^m)}=\sqrt[n]{a^m}$;

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$,

其中 m、n、p 都是正整数；$a>0$，$b>0$.

现在，我们来验证，由(1)、(2)、(3)、(6)式定义的有理数指数幂，满足整数指数幂的指数法则. 这里，仅就正分数指数幂的情形进行讨论.

证明 将正分数 r、s 分别表成既约分数 $r=\dfrac{m}{n}$，$s=\dfrac{p}{q}$，其中 m、n、p、q 都是正整数.

(1) $$\begin{aligned}a^r\cdot a^s&=a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}\cdot a^{\frac{np}{nq}}\\&=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\cdot a^{np}}\\&=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s};\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(a^r)^s&=(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^m}})^p\\&=(\sqrt[nq]{a^m})^p=\sqrt[nq]{(a^m)^p}=\sqrt[nq]{a^{mp}}\\&=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{rs};\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(ab)^r&=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m\cdot b^m}\\&=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=a^r\cdot b^r.\end{aligned}$$

上面已经完成了对正分数指数幂情形的证明. 完整的证明还应包括下述几种情况：r、s 为负分数；r、s 中有一为正分数，另一为负分数；以及 r、s 中有一为整数的情况. 对于负有理数指数幂，我们可以验证，当 $r>0$ 时，我们有

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}. \tag{7}$$

这是因为，如果 $r=\frac{p}{q}$，其中 p、q 为正整数，则

$$a^{-r}=a^{\frac{-p}{q}}=\sqrt[q]{a^{-p}}=\sqrt[q]{\frac{1}{a^p}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^r}.$$

对于这里没有证明的几种情况，可以利用(7)式及已经证明的正分数指数幂的指数法则加以证明，请读者自行完成，这里从略.

这样，通过(6)式，把幂的指数从整数推广到了分数，并且，三条指数法则对有理数指数幂都能保持成立，即有

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$;

(2) $(a^r)^s=a^{rs}$;

(3) $(ab)^r=a^r\cdot b^r$,

其中 r、s 为任意有理数. 只是对底数 a 的范围，需要根据情况加以一些限制，即在整数指数幂范围里讨论时需限定 $a\neq 0$，而在有理数指数幂范围里讨论时需限定 $a>0$.

分数指数幂揭示了幂和根式的关系，那么，指数法则和根式运算律之间有何联系呢？我们知道，根式运算律第一条是

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}},$$

它保证了用(6)式来定义分数指数幂是合理的. 这是因为，数 r 不论表示成 $\frac{m}{n}$ 还是 $\frac{mp}{np}$，它们的指数幂总是相等的. 而根式的后四条运算律，都可看成是三条有理数指数幂的指数法则的特例. 也就是说，有理数指数幂的三条指数法则可以概括根式运算律. 但要注意的是，不能认为上述五条根式运算律可以由有理数指数幂的三条指数法则导出的，相反，前面在

定义有理数指数幂以及证明有理数指数幂指数法则时，倒要借助于根式的运算律.

[例 1] 计算 $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^0}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

解 $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^0}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=2^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}-1}$

$$=2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}-\frac{2^{\frac{1}{2}}+1}{(2^{\frac{1}{2}}-1)(2^{\frac{1}{2}}+1)}=2\cdot2^{-\frac{1}{2}}-(2^{\frac{1}{2}}+1)$$

$$=2^{1-\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}-1=-1.$$

[例 2] 用换元法,解方程组

$$\begin{cases}3x^{-\frac{1}{2}}+4y^{-\frac{1}{2}}=25,\\ x^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}=-1.\end{cases}$$

解 令 $u=x^{-\frac{1}{2}}$, $v=y^{-\frac{1}{2}}$, 原方程组即为

$$\begin{cases}3u+4v=25,\\ u-v=-1,\end{cases}$$

解上述方程组,得

$$u=3,\quad v=4.$$

将 $u=3$、$v=4$ 代入 $u=x^{-\frac{1}{2}}$、$v=y^{-\frac{1}{2}}$, 即

$$\begin{cases}x^{-\frac{1}{2}}=3,\\ y^{-\frac{1}{2}}=4.\end{cases}$$

两边 -2 次乘方,得方程组的解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{9},\\ y=\frac{1}{16}.\end{cases}$$

下面，再证明一些关于有理数指数幂的性质.

性质1 设有理数 $r>0$，当 $a>1$ 时，有 $a^r>1$；当 $0<a<1$ 时，有 $0<a^r<1$.

证明 设 $r=\frac{m}{n}$，其中 m、n 为正整数，则

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

当 $a>1$ 时，$a^m>1$. 因为大于1的数开 n 次根后，仍大于1，故得到

$$a^r>1.$$

当 $0<a<1$ 时，因为 $\frac{1}{a}>1$，所以从刚才的论证知道，$\left(\frac{1}{a}\right)^r>1$，即有 $a^r<1$. 而 $a^r>0$ 是显然的，所以

$$0<a^r<1.$$

性质2 设有理数 r、s 满足 $r>s$，当 $a>1$ 时，有 $a^r>a^s$；当 $0<a<1$ 时，有 $a^r<a^s$.

证明 在 $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$ 中，因为 $r>s$，即 $r-s>0$，故由性质1知道：

当 $a>1$ 时，有 $a^{r-s}>1$，即 $\frac{a^r}{a^s}>1$；因为 $a^s>0$，故得

$$a^r>a^s;$$

当 $0<a<1$ 时，有 $a^{r-s}<1$，即 $\frac{a^r}{a^s}<1$；因为 $a^s>0$，故得

$$a^r<a^s.$$

性质3 设 $a>b>0$，且有理数 $r>0$，则 $a^r>b^r$.

证明 由于 $a>b>0$，所以 $\frac{a}{b}>1$. 根据上述性质1，有 $\left(\frac{a}{b}\right)^r>1$，即 $\frac{a^r}{b^r}>1$；且 $b^r>0$，所以 $a^r>b^r$.

性质 4 设 a 为正数，则当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ 的极限是 1，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

证明 (1) 当 $a=1$ 时，结论自然成立.

(2) 当 $a>1$ 时，根据性质 1，因为 $\frac{1}{n}>0$，所以 $a^{\frac{1}{n}}>1$. 记

$$a^{\frac{1}{n}}=1+h,$$

其中 $h>0$. 上式两边 n 次乘方后，就得到

$$a=(1+h)^n=1+nh\underbrace{+\cdots\cdots+h^n}_{\text{都是正项}}>1+nh.$$

所以

$$0<h<\frac{a-1}{n}.$$

即

$$1<1+h<1+\frac{a-1}{n},$$

$$1<a^{\frac{1}{n}}<1+\frac{a-1}{n}.$$

再令 $n\to\infty$，对上式两边取极限，就得到

$$1\leqslant\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}\leqslant 1+\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=1.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1.$$

(3) 当 $0<a<1$ 时，令 $a=\frac{1}{b}$，则 $b>1$. 由上面的证明，得

$$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}=1,$$