



数学与美

● 许 康 周复兴 编著

科学性 趣味性 使你爱不释手
预见性 启发性 帮你驰骋想象

数学与美

江苏工业学院图书馆
藏书章

(川)新登字005号

责任编辑：刘 玲

版面设计：唐 瑛

数 学 与 美

面向现代化丛书

四川教育出版社出版发行

(成都盐道街三号)

四川省新华书店经销

成都印刷一厂印刷

开本850×1168毫米 1/36 印张8.375 插页2 字数 176千

1991年12月第一版

1991年12月第一次印刷

印数：1—830 册

ISBN 7—5408—1496—9/G·1445 定价：3.16元

J41/159/05

见面的话

1984年秋，我们分赴全国各地作调查，从专家、学者那里，从老师和学生那里，从青年干部和青年职工那里，获取了有关读者需求的大量信息。作为信息的反馈，我们播下了这套《面向现代化》丛书的种子。

经过一年多的努力，随着现代化建设的雄伟步伐，它象一株刚出土的新芽，与广大读者见面了。我们谨以此献给一切立志献身现代化、献身未来的青少年朋友们。倘若他们能从这套书中获取点滴营养，从而提高建设现代化的能力，增强面对未来、开创未来的信心，这就是对我们最大的鼓励，我们将感到无限欣慰。

这套丛书包括现代新理论、新学科、新能源、新材料、新工艺以及有关新创造、新发明、新制作等方面的内容。社会科学和自然科学都在日新月异地向前发展，新理论、新学科在层出不穷地诞生，我们将竭尽全力，捕捉崭新的科技、理论信息，使这套丛书常出常新。

我们认为，具有科学性、预见性、启发性、趣味性，并做到深入浅出、雅俗共赏，应当是这套丛书必须具备的基本特征。为此，作者和编

2 见面的话

者，殚精竭虑，付出了辛勤的劳动，也取得了令人可喜的成果。我们愿意借此机会，向他们表示热诚的祝贺和衷心的感谢。

既是新芽，就有新芽的特征：一方面，不免显得娇嫩；但另一方面，它又充满了生机。这套丛书也是如此。我们坚信，有作者的辛勤耕耘，有专家、学者和读者的精心浇灌，它一定会迅速成长起来。

人们见面时总要打个招呼，初次见面，还往往作些自我介绍，在这套丛书出版的时候，我们说了上面这些，作为见面的话。

四川教育出版社

湖南教育出版社

1990年12月

目 录

“数学与美” 导言	1
什么是美？	1
科学美的准则	4
数学美引论	6
Δ 数学对艺术的渗透	9
$e^{i\pi} + 1 = 0$，数字、符号、算式之美	13
从“五朵金花”说起	13
0, 1, i ——乌有，一切，虚无	14
π 值——算法美的追求	17
e ——高等数学最自然的产儿	29
数字幻方之美	32
符号和算式的诗篇	34
黄金分割及比例美揽胜	36
分线段为中外比	36
争奇斗妍的“黄金比”工艺造型	37
引历代智者竞折腰	40
对黄金分割数学美的反思	46
比例美仍被继续开拓	52
数学中关于比和比例美的再创造	57
由“大自然宠爱螺线”说曲线美	60
诗人歌德的赞词	60

2 目 录

微积分学的试金石	67
另一些美的曲线	70
师法自然的分数维曲线	76
美和对称性紧密相关	82
对称现象是自然美的基础之一	82
对称性是艺术美的要素	88
对称性与科学美的探求	97
数学瑰宝——逻辑美	111
概念—逻辑—“数学艺术造型”	111
雅俗共赏的逻辑美例子	113
鸽笼原理及其他	115
归纳、类比和构造	117
归化法的几颗明珠	120
发明创造和美的享受	124
最伟大的艺术是最高度的统一	126
统一才能形成和谐的整体	126
用公理化方法来体现统一性	130
布尔巴基观点下的统一	131
由内在联系看统一	132
最美的事物中必然出现某种奇异	136
✓ 数学与绘画	142
原始时代的数和形	142
透视学——空间的征服	146
抽象绘画中的数学	161
摹拟自然形状的新几何	163
电脑绘画	164

计算几何与造型设计	168
脸谱技术的大用场	175
视错觉和高等几何	177
古画真伪的数学分析	181
数学与音乐	183
音乐——时间的艺术	183
律学——音调高低的数学	184
音乐中的比例和对数	192
音乐弦的数学理论	197
电子乐器及电脑音乐	204
数学与立体造型艺术	211
什么是立体造型艺术	211
建筑美的数学分析	212
雕塑和立体造型玩具	227
工业造型设计和技术美学	235
人类首件太空艺术品	242
数学与文学	244
我们的文化正在“数学化”	244
数字的美感	246
数字入诗韵味长	247
诗韵的某些数学规律	249
电脑—红学喜结缘	251
文学作品中的数学情节	255
后记	259

“数学与美” 导言

什么是美？

爱美之心，人皆有之。近年来，“美学热”在社会生活中持续不衰。青少年首先要做到心灵美、行为美，培养美的情操，在社会主义精神文明建设中，不断追求真、善、美。

这本小书本着上述宗旨，力图帮助青少年读者学会揭示数学中的美，分析数学在美的事物中的作用。显然，这是两个不同的概念，希望读者在阅读过程中注意加以区分。但是，两者又是相互关联的，加之书中涉及到较广阔的知识领域，各种学科往往相互交叉、渗透，这体现了当代科学的整体性发展，所以我们关于数学与美的论述，经常分中有合，合中有分。

美是什么？可以意会，难于言传。庄子说，

“各美其美”，认为没有客观、公认的美的绝对标准。东汉许慎《说文解字》和清代段玉裁注，“羊大为美”，这反映远古人类造字时，正处于游牧生活年代，一饱羊肉口福时味美难忘，“民以食为天”，所以把味觉上的美感作为美的典型。后来孔子闻韶乐，也说“三月不知肉味”，然而，这正表明孔子把音乐听觉上的美感摆到了更高的位置，体现了对美的认识的深化。

现代关于美的问题，包括美的本质（究竟什么是美？），美的内容（指自然美、社会美，以及在此基础上的艺术美、科学美），美的形式（指能够引起我们美感的事物的存在形式）等，至今各派观点仍在争执不休，促使人们作更深入的研究。

我们认为，美是引起人的愉悦情绪的一种客观属性，依赖于人们对事物的认识和所要达到的功利目的。美是符合社会和自然规律而存在的，又是人的能动创造的精神成果。它是具有多层次、多方面联系的概念，它是主客观相互作用的产物。

通常人们把美粗略分为两个层次：

- 1.事物以其外在的感性形式所呈现的美。
- 2.事物以其内在结构的和谐、秩序而具有的理性美。即事物蕴含的这些美的信息被人的感觉器官察知，并经过同构变换而被理性加工之后，形成的美的映象，这已上升为意识和观念。

因为所谓美感，即人在审美活动中，对于美的主观反映、感受、欣赏和评价，其基本特点之一是形象的直接性和可感性。但人的思想意识、知识水平等，也无不以形象思维的方式，渗入到美感的形象里面，构成美感的具体内容。因此，美感是形象性、思想性和社会性的统一。进而，只有理解了的东西才能更好地感受它。所以，两个层次是互相联系，互相沟通的。

本书要谈的数学美，正是处在这第二层次的东西。按照法国数学全才彭加勒(J.H.Poincaré, 1854~1912)的说法，

“我的意思是说那种深奥的美，这种美在于各个部分的和谐秩序，并且纯理智能够把握它。正是这种美使物体也可以说使结构具有让我们感官满意的彩虹一般的外表。没有这种支持，这些倏忽即逝的梦幻之美



图1 彭加勒

结果就是不完美的，因为它是模糊的、总是短暂的”。他把那些“潜藏在感性美之后的理性美”如雅致、和谐、对称、平衡、秩序、统一、方法的简单性等，列为科学美的主要内容。

事实上，如前面提到的，人类最初有关美的认识来源于自然界。生产技术和自然科学的发

展，一步一步揭示出自然界丰富多姿的运动形式及其规律性。马克思说，人能“在他所创造的世界中直观自身”，意识到自身的力量，并产生愉悦和欣赏的情绪，这就是审美需要和审美活动产生的根源。这样看来，美的创造首先来自科学技术的创造，审美活动和美学的发展也依赖于科学技术的发展。在人类理性思维能力和科学素养空前提高的现代，人们已能透视到科学技术中所显示的人的本质力量是何等伟大，对科学美怎样熔优美与壮美于一炉，是毫无怀疑的余地了。

科学美的准则

那么，关于科学美的主要内容或标准应当怎样确定呢？大家知道，文艺界对于艺术美的标准分歧甚大，莫衷一是。而在科技界，对于科学美的评价却相当一致或近似。彭加勒曾经用“雅致”这个词来笼统地表述它，顾名思义，优雅别致。这里的优雅，“是不同的各部分的和谐，是其对称，是其巧妙的协调，一句话，是所有那种导致秩序，给出统一，使我们立刻对整体和细节有清楚的审视和了解的东西。”而别致，还是按彭加勒的说法，是“出乎意料”，或者说，新奇、奇异。

下面就三条主要的谈谈。

1. 和谐 指理论体系内部的自洽性。首先是

逻辑的正确性和结构的严密性。自然界本身的和谐必然科学地反映为各学科中的井然有序，学科自身的发展又整理得更为协调。

其次，任何一门科学分支的这种逻辑结构和体系只是科学大树的某一层枝叶（子系统），因此它还应当具有外在的和谐功能，应与众多的相关系统表现出有机联系。

这内在和外在两种和谐，通常也可用统一这个词来形容。

同时，如上所述，既然它的逻辑结构如此严谨，必然反映着深广的内涵，而表现形式（由于广泛采用数学工具）却相当洗练，所以又给人以简洁之感。

2. 对称 广义地说，指事物具有的匀称和均衡的特征，它同样使人有一种安排妥贴、寓整齐于变化之中的美感。科学理论的对称性和对称方法不单纯有其形式美，还表现为预见性和类比手法，这些都来源于自然界物质形态及其运动图景所具有的广泛的对称性。

数学理论中的对称性俯拾皆是。很多数学演算都是一串恒等变形，解方程更是时时保持等号两端平衡对称的关系，即使是不等式的求证或求解，也常常要经恒等变换化简。这些基本特征不变性，是依靠对称均衡性所保证的。

数学中还发展了群论这门分支，特别适用于对物质世界的对称性的研究。例如受其启发，物

理学和化学中的守恒量或不变性都可以用某种对称性来表示。如质量守恒、能量守恒、电荷守恒、动量守恒是迄今广知的守恒原理。

对称方法是科学家追求理论美的一个工具。

3. 新奇 指新颖奇异,不同凡响,出人意表。新奇导源于科学理论所述某些事实本身的奇异性,以及创建者思维的发散性和方法的独创性。奇异与和谐是对立的统一。它们从正反两面展示了某种科学理论系统标新立异、卓然特立的风采。

新奇是向更高层次的和谐发展的突破口。重大的奇异导致科学理论的“危机”和革命。

新奇和对称一样,还体现了科学理论中的艺术因素。思想呆板、创造力贫弱的人缺乏这类“艺术细胞”,就无法达到这种境界。

显然,以上几点在数学中都反映得特别强烈和突出。马克思认为,一门科学只有成功地运用了数学的时候,才标志着它的成熟。因此,某种科学理论一旦实现了“数学化”,即主要定律和定理、法则都可用数学语言(主要是符号、算式)表达时,就使人们感到它是和谐、简洁和对称的,只有新奇该由它本身的特点和机遇所决定。

数学美引论

关于数学美,我们先看看一些权威数学家有

何高见。

怀特海 (A.N.Whitehead, 1861~1947) 说: “作为人类精神最原始的创造, 只有音乐堪与数学媲美。只有取得过数学财富的少数人, ……才能尝到数学的‘特殊乐趣’”。按照他的说法, 似乎数学是阳春白雪, 和者盖寡。

哈代 (G.Hardy, 1877~1947) 比他的看法要实在一些: “现在也许难以找到一个受过教育的人对数学美的魅力全然无动于衷”, “实际上, 没有什么比数学更为‘普及’的学科了。大多数人都能欣赏一点数学, 正如多数人能欣赏一支令人愉快的曲调一样”。就是说, 数学有它下里巴人的一面。



图 2 哈代

近年美国数学界两部综合调查报告《今日数学》和《明日数学》以非常肯定的口吻声称:

“有创造力的数学家……共享惊人相似的一组审美标准”。

“……数学具有一种美学价值，正如音乐或诗歌所清楚地确定的一样”。

我们普通人怎样发现和欣赏数学美呢？

数学家A.波莱尔（A.Borel）指出：“要能欣赏数学，就需要对一个很特殊的思维世界里的种种概念在精神上的雅与美有一种独特的感受力”，因为它“是用高度专门化的语言——数学语言写成的”。所以，问题的关键是懂得这种语言。事实上，“要欣赏音乐和绘画，也必须学会某种语言”。数学语言是可以学会的，理论物理学家英费尔德说得好：“当你领悟一个出色公式时，你得到同听巴赫的乐曲一样的感情，在这两种感觉之间没有任何区别，除去如下一点：要从数学得到满足比起爱好音乐者欣赏来，必须受到更多的训练”。

高中学生在数学方面已经经历了十年寒窗的攻读，该是能够领略其中很多乐趣的时候了。比方说，当你看到数学能以尽可能少的公理公设，运用明晰而严密的逻辑工具推演出具有普遍深远含义的结论，得出精炼、对称的方程、公式，在实践中获得广泛的应用，做出精采的科学预言的时候，难道还不为之倾倒吗？

退一步说，即使我们不能时时、处处参与这些理论的创造和应用，也仍然可以从对理论美的

欣赏中感受到快乐。甚至对一些暂未彻底证明的猜想，如哥德巴赫猜想（“大于2的偶数都是两个素数之和”）、费马“大定理”（“ $x^n + y^n = z^n$ ，当 $n > 2$ 时无正整数解”），黎曼猜想（“复变函数 $\xi(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots + \frac{1}{n^z} + \cdots$ 的零点，

除有限个例外，全部位于 $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$ 这条直线上”），人们也为其简明、单纯、隽永、深远所吸引，感到真是妙不可言。

香港旅美数学家，菲尔兹奖获得者丘成桐，在微分几何、非线性偏微分方程、多复变函数论、理论物理等领域成绩卓著，他根据自己的亲身体会谈到：

“数学家找寻美的境界，讲求简单的定律，实际问题”，“这些因素都永远不会远离实际世界”，数学美有着取之不尽的源泉。



图3 丘成桐

本世纪初最伟大的数学家希尔伯特把数学比喻为“一座鲜花盛开的园林”，他鼓励我们寻幽探胜，他主张向别人介绍这些奇景秀色，“我们共同赞美它，真是其乐无穷”。

数学对艺术的渗透

在人类历史上，科学与艺术有着几次合与分