

地震层析成像及应用

学术书刊出版社

40968



00300674

地震层析成象及应用

[荷兰] G.Nolet 著

王椿镛 吴宁远 李幼铭 编译
刘启元 吴荣辉

5471 / 89



学术书刊出版社

内 容 提 要

本书阐述了地震层析成像的发展现状,重点在介绍方法,第一部分中第一章概述了地震波传播理论;第二章至第五章介绍了层析成像的基本理论;第六章至第十五章分别介绍了层析成像在地震勘探和全球地震学中的应用。第二部分专题介绍分块波形反演及NARS台阵下方的二维结构。

本书可作为地震学和勘探地球物理学专业的大学高年级学生和研究生教材,也可供有关地球科学方面研究技术人员参考。

地 震 层 析 成 像 及 应 用

王椿镛 吴宁远 李幼铭 编译
刘启元 吴荣辉
责任编辑 姜维岐

学术书刊出版社出版(北京海淀区学院南路86号)
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京印刷三厂联营厂印刷

开本: 787×1092毫米1/16 印张: 21 字数: 520 千字

1989年10月第一版 1989年10月第一次印刷

印数: 1—1500册 定价: 9.50元

ISBN 7-80045-518-1/P·16

编译者的话

近十年来,地震层析成像研究取得了显著进展,尤其是它在全球地震学和地震勘探中的应用已取得了一批重要成果。为了把这方面的进展介绍给我国读者,我们编译了有关地震层析成像研究的专著,取名《地震层析成像》。在这个编译本中,主要介绍著名地球物理学家G.Nolet的著作。本书分为两部分,第一部分是《地震层析成像及其在全球地震学和勘探地球物理学中的应用》,第二部分是G.Nolet的近作《分块波形反演及NARS台阵下方的二维结构》。

G.Nolet很高兴地为本书写了序言,并专门给我们寄来勘误表,我们在编译过程中,已按勘误表作了更正。在此,我们对G.Nolet的支持协助表示感谢。

由于本编译本篇幅所限,所以在这个编译本中仅介绍了G.Nolet的著作。加之,编译者水平有限,错误之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编译者

1989年6月

第一部分

地震层析成像 及其在全球地震学和勘探地球物理学中的应用

SEISMIC TOMOGRAPHY

With Applications in Global Seismology and Exploration Geophysics

Gaust Nolet (Ed.)

中文版序言

本书自从1987年出版以来，获得了很大的成功。象这样一本以地震题材为标题的专业书籍能够广泛流传，这的确是不寻常的。我非常高兴地得知，这本书将译成中文，将奉献给广大的中国地球物理学家们。中国地震学家在地震预报方面建立的可信的方法论，是全世界有目共睹的。我希望地震层析技术也将对于研究地震危险性起到应有的贡献，其中既包括对于地球内部结构的了解，也包括使我们有可能更详细地对震源过程进行成像。

G.Nolet

1988年11月15日

序 言

根据穿透一个物体的X射线、超声波或电磁波的“投影”而建造物体图象的成像方法，在电子显微学、医疗诊断学和射电天文学中得到了广泛的应用。投影这一可测量的量，是物体的物理性质的泛函，它通常表示成一个线积分。重建该物体一般使用求解大型线性方程组的迭代算法。原则上并没有理由认为相似的图象重建方法不能适用于地震波。但实际上，地震层析成像却遇到了许多困难，因而直到最近10年，透射地震波的成像技术才在地球科学中得到应用。

全球地震层析成像与实验室中的常规应用之间最重要的区别在于，地震学家所面临的条件无法与有周密控制的实验设备相比。除了一些核试验外，我们难于对地震事件定时或定位。另外，除了一些海底地震仪外，传感器都安放在陆地上，而且即使在那里，数据的有效利用率还与文化和政治因素有关。甚至在地震勘探中，诸如试验费用这样的实际因素也大大地限制了数据集的完整性。

地震波的相对延迟是最通常使用的数据。一般来说，这些延迟只能具有很低的精度。此外，与人体内的X射线不同，地球内的地震波沿着强烈弯曲的射线路径前进，而且射线的几何形状在问题的公式表述中是附加的未知量。

尽管存在这些困难，地震层析成像在地震勘探和全球地震学中仍取得了有用的结果。实际上，已取得的一些成像图案是如此壮观，使得许多地球科学家可能忘记在最终的结果中的有限分辨或大的误差。

本书阐述地震层析成像发展的现状，把重点放在方法，而不是结果上。其中第一章旨在使只具有有限地震波传播知识的非专业人员或学生容易理解本书。其余各章分为三部分，第一部分各章主要叙述理论结果，它们是地震层析成像各方面应用的基础。虽然其中的某些章节包含了新的且重要的理论结果，但我请求这些作者在叙述中使用稍微指导性的风格，以填补在引论和更专门的著作之间的差距。本书的第二部分是层析成像在地震勘探中的应用。第三部分则阐述在全球地震学中的应用，并以它作为本书的结束。地震勘探和全球地震学之间的划分并不是严格的，因而我们并不有意地鼓励读者跳过本书的某一部分，因为大多数章节都包含了用层析成像方法作研究的所有地球科学家们最感兴趣的题材。

我们并没有努力去进行记号的统一或消除多余的叙述，因此读者可以独立地阅读每一章，而且相当容易选择它们作为研究生的第一或第二学期的课程。

对Reidel出版公司的Michiel ten Raa和Roger Cooper表示感谢，他们鼓励我编辑本书。同时感谢关心我的学生Tijmen-Jan Moser、Berend Scheffers、Hong-Kie Thio和Alet Zielhuis，他们协助我成文处理和校对。

Guust Nolet
于荷兰乌得勒支
1987年1月

目 录

第一部分 地震层析成象及其在全球地震学和勘探地球物理学中的应用

中文顺序言

序言

第一章 地震波传播和地震层析成象	(1)
1. 引言	(1)
2. 地震波的射线理论	(2)
2.1 声波	(2)
2.2 各向同性和弹性地球内的射线	(5)
2.3 地震射线的Fermat原理	(6)
3. 延迟时间的地震层析成象	(7)
3.1 延迟时间	(7)
3.2 射线宽度	(8)
3.3 延迟时间的统计学	(9)
3.4 模型参数化	(10)
3.5 最小二乘解	(11)
3.6 非唯一解	(12)
3.7 求解大型方程组	(15)
4. 面波层析成象	(16)
5. 结束语	(18)
第二章 Radon变换和地震层析成象	(19)
1. 引言	(19)
2. Radon变换 (RT)	(20)
3. 滤波反投影 (FBP)	(23)
4. 圆调和分解 (CHD)	(24)
5. 扇形束几何	(27)
6. 地球平化变换 (EFT)	(28)
7. 一维模型的层析成象: 长波方法	(30)
8. 二维模型的层析成象: 短波方法	(34)
9. 结语	(37)
第三章 层析成象问题中大型稀疏线性代数方程组的数值解法	(38)
1. 问题	(38)
1.1 模型	(38)
1.2 问题	(38)
2. 预备数学知识	(39)
2.1 记号	(39)
2.2 最小二乘问题的基本特征	(39)
2.3 行和列的标度换算和移位的效应	(40)

2.4 奇异值分解.....	(41)
2.5 数据误差的影响.....	(42)
2.6 正则化.....	(42)
2.7 正则化的定量效应.....	(44)
3. SIRT方法.....	(45)
3.1 迭代方法的需要.....	(45)
3.2 Kaczmarz方法.....	(45)
3.3 Kaczmarz方法的平均形式, SIRT方法.....	(46)
3.4 进一步的推广.....	(46)
4. SIRT方法族的收敛性和正则化特性.....	(47)
4.1 收敛性证明.....	(47)
4.2 不同分量的收敛率.....	(50)
4.3 迭代和扰动误差; 正则化效应.....	(50)
4.4 数值例子.....	(52)
4.5 方法的正则化效应与显正则化的比较.....	(53)
5. 投影法.....	(54)
5.1 引言.....	(54)
5.2 共轭梯度法.....	(55)
5.3 最小二乘的共轭梯度.....	(56)
5.4 Lanczos方法.....	(57)
5.5 Paige—Saunders方法CSQR.....	(58)
5.6 投影法和正则化.....	(59)
5.7 Ritz值和多项式.....	(59)
5.8 最小二乘问题中投影法的收敛性和正则化特性.....	(61)
5.9 数值例子.....	(63)
5.10 SIRT与投影法的比较.....	(64)
6. 结束语.....	(65)
第四章 关于射线追踪时解释延迟时间的有效性.....	(66)
1. 问题的提出和求解的方法.....	(66)
2. 数值试验.....	(67)
3. 结果.....	(70)
4. 射线近似的有效性.....	(72)
5. 横向效应.....	(75)
6. 提要 and 结论.....	(76)
第五章 三维纵向变化层状结构的射线追踪方法.....	(77)
1. 引言.....	(77)
2. 弹性动力学方程的高频解, 程函方程.....	(77)
3. 笛卡儿坐标中的射线追踪方程组.....	(79)
4. 穿过界面的射线.....	(81)

5. 初值射线追踪	(82)
5.1 数值射线追踪	(83)
5.2 解析射线追踪	(83)
5.2.1 二次慢度梯度为常数	(83)
5.2.2 二次慢度是笛卡儿坐标中的多项式	(83)
5.2.3 V^{-1} 或 $\ln V$ 的梯度为常数	(85)
5.3 单元射线追踪	(86)
5.3.1 四面体单元	(86)
5.3.2 长方体单元	(87)
6. 正交曲线坐标系中的程函方程和射线追踪方程组	(88)
6.1 正交曲线坐标	(88)
6.2 程函方程	(89)
6.3 射线追踪方程组	(89)
6.4 反射/透射定律	(90)
7. 球坐标中的程函方程和射线追踪方程组	(90)
7.1 程函方程	(91)
7.2 射线追踪方程组	(91)
7.3 反射/透射定律	(92)
7.4 改进的射线追踪方程组	(93)
8. 射线场, 笛卡儿坐标中动力学射线追踪	(94)
9. 射线中心坐标系, 偏振矢量	(95)
10. 射线中心坐标系中的动力学射线追踪、传播矩阵	(97)
10.1 动力学射线追踪方程组	(97)
10.2 射线传播矩阵	(98)
10.3 层状模型中的动力学射线追踪	(99)
10.4 沿射线走时场的二阶导数	(100)
10.5 傍轴走时	(101)
10.6 傍轴边值射线追踪	(101)
11. 对模型中速度分布近似的评述	(102)
12. 边值射线追踪	(103)
12.1 试射法	(104)
12.2 弯曲法	(104)
12.3 延拓法	(104)
第六章 走时和地震波形的反演	(105)
1. 泛函最小二乘	(105)
2. 走时反演	(106)
3. 弹性波的波形反演	(109)
3.1 参数的选择	(109)
3.2 拟合优度的最小二乘判据	(109)

3.3 权函数的选择	(110)
3.4 弹性动力学波动方程	(111)
3.5 Green 函数	(112)
3.6 正演问题的线性化	(113)
3.7 Born近似的正确性	(116)
3.8 位移的Fréchet导数	(116)
3.9 转置算子	(117)
3.10 分解方法	(119)
3.11 P波阻抗的优化	(120)
3.12 S波阻抗的优化	(121)
3.13 密度的优化	(122)
附录	(122)
第七章 井间透射层析成像	(126)
1. 引言	(126)
1.1 井间地震学概述	(126)
1.2 井间层析的形式	(127)
1.3 应用的范围	(130)
2. 理论基础	(131)
2.1 唯一性	(131)
2.2 反演原理	(133)
2.3 统计问题和分辨率	(136)
3. 复杂性: 射线弯曲和各向异性	(138)
3.1 射线弯曲	(138)
3.2 各向异性	(140)
4. 野外结果	(141)
4.1 探测矿区中的矿体	(141)
4.2 煤矿应力监测和断层检测	(143)
4.3 加拿大结晶岩中破裂的定位	(144)
4.4 斯特瑞帕结晶岩中破裂的定位	(145)
第八章 地震剖面的层析成像	(148)
1. 引言	(148)
2. 模型种类	(148)
3. 线性化原理	(148)
4. 输入数据及其误差	(150)
5. 两点射线追踪	(150)
6. 初始模型、扰动函数和它们的近似	(150)
7. 线性方程组和反演算子	(151)
8. 程序包	(153)
9. 模型实例	(154)

10. 野外资料层析成像实例	(155)
11. 结论, 层析成像方法的推广	(157)
第九章 含油气的岩石地震特性的描述与监测	(159)
1. 前言	(159)
2. 孔隙度和粘土含量的影响	(159)
3. 应力和裂隙引起的速度各向异性	(162)
4. 波速、饱和度和孔隙压	(165)
5. 波速—相变	(171)
5.1 水—汽相变	(171)
5.2 水和冰	(172)
6. 波速—碳氢化合物—温度的关系	(174)
6.1 碳氢化合物的波速	(174)
6.2 含碳氢化合物岩石的波速	(175)
6.3 天然石油和沥青岩砂的波速	(178)
7. 应用	(181)
7.1 孔隙度和渗透率分布的成因	(181)
7.2 孔隙压异常的检测	(181)
7.3 破裂检测和应力测量	(183)
7.4 热前锋追踪	(184)
7.5 气帽运动	(185)
7.6 注水	(185)
8. 结论	(186)
第十章 卫星传输的地震数据采集站	(187)
1. 引言	(187)
2. 岩石圈层析成像的数据: 轻便式远震台阵的需要	(187)
3. 环境卫星数据采集系统	(189)
3.1 INTELSAT	(189)
3.2 同步卫星	(189)
3.3 ARGOS	(190)
4. 通过ARGOS和METEOSAT转播的轻便型地震台阵	(190)
4.1 地震的数据采集站	(190)
4.2 野外安装	(193)
4.3 信息译码	(193)
5. 结论	(195)
第十一章 反演地球深部结构的调和级数展开方法	(196)
1. 引言	(196)
2. 数据	(198)
2.1 震相选择	(198)
2.2 坐标的量化	(199)

2.3 再定位	(200)
3. 反演方案	(202)
3.1 离散化	(202)
3.2 反演	(203)
4. 核—幔边界的结构	(204)
4.1 方法	(204)
4.2 PcP的反演	(205)
4.3 PKP (BC) 的反演	(206)
4.4 联合反演	(207)
5. 内核的各向异性	(209)
5.1 方法	(209)
5.2 分离反演	(209)
5.3 柱状各向异性	(210)
6. 结论	(213)
第十二章 面波射线追踪	(215)
1. 引言	(215)
2. 面波射线理论	(217)
2.1 地震体波和面波射线理论	(217)
2.2 坐标标度	(218)
2.3 表面射线	(219)
2.4 射线坐标系. 旁轴射线近似和高斯束解	(222)
2.5 曲面射线	(223)
2.6 特例	(225)
2.7 振幅	(226)
2.8 一阶扰动近似	(228)
3. 举例	(229)
3.1 偏振异常	(229)
3.2 时间异常	(229)
3.3 振幅异常	(230)
第十三章 波形层析成像	(235)
1. 引言	(235)
2. 波形拟合	(236)
3. 问题概述	(236)
4. 最优化问题	(237)
5. 谱拟合	(241)
6. 宽频带信号的正演问题	(241)
7. 梯变	(245)
8. 典型例子	(446)
第十四章 面波全息成像	(253)

1. 引言	(253)
2. 面波散射的线性化理论	(254)
3. 面波全息成象	(256)
4. 简化的重建方法	(259)
5. 散射面波图象重建的野外实验	(260)
第十五章 震源层析成象	(264)
1. 引言	(264)
2. 正演问题	(265)
2.1 位错源和远场地震波	(266)
2.2 有限断层源	(268)
2.3 矩率密度函数的性质	(271)
3. 反演问题	(273)
3.1 二维Radon逆变换	(273)
3.2 三维Radon逆变换	(274)
3.3 零频	(275)
4. 最优Radon逆变换核函数	(277)
4.1 零频Radon逆变换核	(278)
4.2 高频Radon逆变换核	(279)
4.3 核展开的例子	(280)
4.4 震源成象的例子	(281)
5. 结论	(283)
参考文献	(284)
第二部分 分块波形反演和NARS台阵下方的二维结构	
1. 引言	(299)
2. 理论和方法	(300)
2.1 地球模型的路径积分表达式	(300)
2.2 分块反演	(302)
2.3 线性反演和分辨分析	(304)
2.4 多参数模型	(306)
3. 在NARS台阵的应用	(307)
3.1 数据选择	(307)
3.2 分块反演	(310)
3.3 模型WEPL ₃	(317)
4. 结论	(318)
参考文献	(319)

第一章 地震波传播和地震层析成像

G. Nolet

本章阐述地震层析成像的基本原理，并且起本书总序言的作用。

1. 引言

自从19世纪末第一批地震仪安置在地球表面以来，地震波一直用于确定遥远“对象”的位置。最初的应用包括在很远区域内的地震震中定位。在第一次世界大战期间用地震和声学方法对重炮定位的尝试，在后来演变成石油和天然气的第一代勘探方法（Bates等，1982）。从那时起，地震勘探中的成像技术（通常称为偏移）得到了改进：起先，它仅仅利用观测到地震脉冲的到时来探测反射界面的深度和倾斜度；后来，它使用了完全地震记录并严格地以声波方程为基础发展了成像方法（见Claerbout，1985）。

全球地震学的成像技术远远落后于地震勘探中的发展，其中有几个原因：与人工震源不同，天然地震这个波能源是无法控制且难于定位的；地震仪仅仅稀疏地复盖地球；仪器响应长期以来差别很大，而且记录在过去并不是（现在还经常不是）数字形式的，虽然最近的发展可能使这一状况很快得到改善（Nolet等，1986）。因而，地震学家们面临着似非而是的议论，即现有的数据包含着关系重大的缺陷，无论这些数据量是多么巨大。在全球地震学中最有效的数据来源实际上并不是收集地震和核爆破的单张地震图，因为它的尺寸和多样性决定了它是不易处理的。在这些地震图上单个震相的时间读数则实际上要重要得多，而这都是由当地的地震仪操作员完成的。这些数据例行地寄送到国际地震中心（ISC），它们可以从磁带上得到，不久也可从致密的磁盘中得到。

Dziewonski等（1977）首先认识到ISC数据库的潜力。在一篇开拓性的文章中，他们使用了700,000个P波走时残差，通过最小二乘分析以确定地幔内速度扰动的球谐展开式中大约150个系数。在最近的尝试中，Dziewonski（1984）对ISC延迟时间用相似的（但经过很大改进的）分析确定了直到6阶的球谐系数。

与此同时，Aki和Lee（1976）和Aki等（1976，1977）在较局部尺度上对地球内部的成像作了努力，他们使用了从LASA和NORSAR这类核试验监测台阵获得的P波延迟时间读数，以描绘这些台阵正下方的地震速度结构。他们的方法所确定的是各个单元的速度扰动，而不是调和展开式。乍看来二者在方法上可能没有什么差异。但是正如我们在后面将要看到的，这通常导致了一个奇异的或是病态的矩阵方程，很小的数据误差容易对解造成大的畸变效应。对于小尺度问题，我们可以用精致的代数方法（例如奇异值分解）来控制它，这本质上就是Aki和他的同事们所推导的方法。它得到了大量的应用，其范围从广阔的大陆区域（Romanowicz，1979，1980；Menke，1977；Hirahara，1977；Taylor和Toksoz，1979；Yanovskaya，1984；Babuska等，1984）到很局部的结构（Ellsworth和Kayanagi，1977；Mitchell等，1977；Reasenberget等，1980；Grasso等，1983；Nercessian等1984；Barmakov等，1984；Maguire等，1985；Dorbath等，1986）。

对于较大尺度问题（例如未知数的个数超过 10^3 ），计算机存储器不可能很容易容纳参数化所得到的巨大矩阵，因此代数解本身必须用迭代方法来逼近。代数解中的误差产生于不

完全的收敛性（由于计算时间的限制），并加到由数据误差（经常是很大的）传递所引起的误差中。这个问题迄今还未作深入研究。一个原因大概是，全球层析成像解析的初步结果得出了地球内部的壮观成象，它显示出与地球的长波长重力场的地球动力学解释相一致（Hager等, 1985）。然而，在层析成象解释中存在着严重的缺点，危险的是这些缺点一直还没有被克服。解决这个问题大概是当前地震层析成象的最重要的研究任务。

Clayton和Comer (1984) 提出了在全球尺度上使用迭代方法得到的第一个层析成象结果，而Ivansson (1983) 和Nolet (1984, 1985) 发表了迭代解可靠性方面的一些试验研究。Spakman (1986) 使用大规模迭代方法以分辨在非洲和欧洲板块会聚区域附近的详细速度结构。

除了延迟时间外，面波的相速度和群速度，以及完全波形，也已用于地球S波速度结构的成象。最近这方面有许多研究（例如Woodhouse和Dziewonski, 1984; Montagner, 1985; 和Nataf等, 1986）。在勘探地球物理中，层析成象方法用于测井之间的地震测深（Ivansson, 本书第七章），在更常规的反射地震探测（Ivansson, 1986; Kennett和Williamson, 1987）和折射试验（Firbas, 本书第八章）中得到了应用。Nur（第九章）研究了在石油和天然气勘探中的各种应用。

下一节我们将阐述射线理论的基本原理。具有足够的地震波传播方面基本知识的读者完全可以跳过这一节而进入第三节。

2. 地震波的射线理论

由于波传播的数学理论中声波情形最为简单，因此我们将首先对这个特殊情形推导一些基本原理。然后在2.2节推广到固体中的弹性波传播，其中包括纵波（P）和横波（S）。

2.1 声波

作用于固体或流体内的一个体积小单元上的体力和曳引力平衡方程为

$$\rho \partial_{tt} u_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad (1)$$

其中 u_i 是由于增量应力 σ_{ij} 和体力分量 f_i 在 i 方向上产生的（小）位移分量。用“增量”表明我们仅对相应于静态情形的改变感兴趣。这保持了系统是线性的，即使是处理横穿地球深部区域的波，在那里很大的流体压力（形式为 $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ 的应力）起作用。我们使用 Einstein约定，在公式中下标出现两次时表示对所有下标求和。

应力与应变 ϵ_{kl} 之间的线性关系用Hooke定律表示为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = C_{ijkl} \partial_k u_l \quad (2)$$

其中最后一项能够很容易地从应变的定义

$$\epsilon_{kl} = 1/2 \partial_k u_l + 1/2 \partial_l u_k$$

以及弹性张量的对称性

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

推得。如果把（2）代入（1）中，则得到

$$\rho \partial_{tt} u_i = \partial_j (C_{ijkl} \partial_k u_l) + f_i \quad (3)$$

在气体或流体中，我们更多地使用“压力” P ，而不使用应力场 σ_{ij} 。两者之间的关系是

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} \quad (4)$$

我们用“体积模量”或“不可压缩性”的简单标量 κ 来代替弹性张量：

$$-P = \kappa \partial_i u_i \quad (5)$$

在把弹性张量化为简单的标量之后,我们能够导出声波传播的微分方程,因为

$$\rho \partial_{tt} u_i = -\partial_i P + f_i \quad (6)$$

当用压力表示 u 的散度时,可以把 u 从以上方程中消去。由 $\partial_i u_i = -\kappa^{-1} P$,我们得到

$$\partial_{tt} P = \kappa \partial_i \left[\frac{1}{\rho} \partial_i P \right] - \kappa \partial_i \left[\frac{1}{\rho} f_i \right] \quad (7)$$

若取(7)的Fourier变换,在没有体力场 f 的情形下,有

$$-\omega^2 P = \kappa \partial_i \left[\frac{1}{\rho} \partial_i P \right] \quad (8)$$

假定源为点源。在均匀介质中上式有解

$$P = (1/r) \delta(t - r/c)$$

即具有振幅衰减 $1/r$ 和时间延迟 r/c 。在射线理论下我们假定具有更一般的几何扩展 $A(r)$ 和时间延迟 $\theta(r)$,但 δ 函数形状并不改变(即“没有频散”)。更高级的射线理论则把频散作为 ω 的高级项而包括进去,但在这里几乎没有使用。前面假定压力场形式为

$$P(r, t) = A(r) \delta[t - \theta(r)]$$

它的Fourier变换即是

$$p(r, \omega) = A(r) e^{i\omega\theta(r)} \quad (9)$$

波前是等相面,因而可用 $\theta(r) = \tau$ 定义。射线则定义为波前的法线族。于是, θ 定义射线,而 A 则定义由几何扩展导致波能的减少。若把(9)代入(8),并且只保留 ω 和 ω^2 项(高频近似),则用 ω^2 除之后得到

$$-A e^{i\omega\theta} = \kappa \left(\partial_i \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{iA \partial_i \theta}{\omega} + \frac{1}{\rho} \frac{iA \partial_{ii} \theta}{\omega} + \frac{2}{\rho} \frac{i \partial_i A \partial_i \theta}{\omega} - \frac{1}{\rho} (\partial_i \theta)^2 A \right) e^{i\omega\theta} \quad (10)$$

加上 ω^{-2} 阶的项。假定 ρ 的导数是有界的,且 $\omega \rightarrow \infty$ 。令一阶的优势项相等,得到

$$(\partial_i \theta)^2 = \frac{\rho}{\kappa} = \frac{1}{c^2} \quad (11)$$

它就是波前 θ 位置的程函方程。它隐含着 $c \nabla \theta$ 是一个单位矢量。这是一个垂直于波前的矢量,因此按定义它与射线相平行。虽然(11)给出了波前的位置,但更有用的是描述射线几何的方程。令 dr 为沿着射线的切线,它具有长度 ds ,则可以把同样的单位矢量写成 dr/ds (图1),或:

$$\nabla \theta = \frac{1}{c} \frac{dr}{ds} \quad (12)$$

另一方面,有 $n \cdot \nabla \theta = d\theta/ds = 1/c$, $d(\nabla \theta)/ds = \nabla(d\theta/ds)$

$$\nabla \left(\frac{1}{c} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{ds} \right) \quad (13)$$

这是一个射线的二阶微分方程。计算机求解一阶方程组比求解二阶方程组容易得多。不难把该系统变换为一阶方程组。置