现代物理学丛书

邹国兴 编著

量子场论导论

科学出版社

量子场论导论

郁国兴 编著

科学出版社

1980

内 容 简 介

本书主要阐述量子场论的基础．第一章主要简述海森堡表象中微观物质运动量子化的正则方法．第二、三、四章应用这个方法对几个典型的自由场进行量子化，从而讲述介子、光子、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子等微观粒子的性质和它们的运动规律，特别是它们的产生算符和湮没算符．电磁场的量子化采用不定度规的表述，以保证明显的协变性．第五章简要地讨论粒子物理中各种比较典型的相互作用和它们的场论表示方法．第六、七、八章及附录比较详细地阐述相互作用表象中量子场论的求解问题和物理过程的跃迁振幅及各种跃迁几率的计算方法．第九章应用量子场论方法对粒子物理中的一些比较典型的过程进行理论计算并与实验作简单比较．

本书偏重于各种相互作用的粒子物理过程的理论处理，即量子场论协变方法对粒子物理的应用．它可作为高等院校的粒子物理学课程的教材，也可供粒子物理学工作者参考．

量子场论导论

邹国兴 编著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年2月第一版　开本：850×1168 1/32

1980年2月第一次印刷　印张：6 1/8

印数：0001—9,180　字数：158,000

统一书号 1168

[illegible] ·13—3

定价：0.92元

前　言

本书是根据作者1975年和1977年在北京大学编写的《量子场论》讲义补充修改而成. 本书在数学工具方面力求简单，如避免应用变分法和协变态矢方程等. 书中内容着重于阐述强子、轻子、光子等粒子的相互作用动力学. 没有特别突出量子电动力学，也没有介绍规范场理论，因此也没有讨论重整化问题. 物理过程跃迁振幅的求解在相互作用表象中进行. 本书第七章在推导费曼规则时采用了对具体物理过程作具体分析的比较直观的方法. 第八章比较详细地处理了场论中各种跃迁几率的计算方法和有关的一些运动学问题. 最后一章选取了近年来粒子物理中几个比较典型的问题，概括地介绍量子场论微扰近似的一些具体应用. 书末附录介绍了场算符的编时乘积和威克定理.

本书承高崇寿、宋行长、陈鹤琴、赵志詠等同志审阅并提出宝贵意见，特此致谢. 但是由于本人水平所限，书中难免有不妥和错误之处，欢迎读者批评指正.

著　者

1978年9月于北京

目　　录

第一章　场量子化的一些预备知识

量子场论是早期量子力学的继续和发展．它的实验基础仍然是微观物质运动的波粒二重性，其内容能够反映微观物质运动的一部分重要客观规律，进一步解决由波粒二重性所提出的物理理论课题．

微观物质运动的波粒二重性首先是在电磁和光的现象中发现的．二十世纪初，在对黑体辐射所进行的实验和理论分析中，人们提出了电磁辐射机制的量子假说；对光电效应的分析研究，又进一步提出了具有确定能量 $\hbar\omega$ 的光量子概念，并且推断出光量子还具有确定的动量 $\hbar\omega/c$．后来，二十年代初期的光和电子的散射实验明确地证实了这一点，由此充分揭示了光量子的粒子性．这样，就确立了静质量为零的光子的概念．可是对光和电磁现象的理论认识，直到二十年代中期，基本上还仅仅局限于宏观电磁场理论，即经典电动力学．因此人们迫切要求在宏观电磁场理论的基础上建立起能够反映微观电磁现象的粒子(光子)理论．这就需要对经典电磁场进行“量子化”．

在微观电磁现象的波粒二重性被发现并确立以后，有人推想，电子以及其它微观粒子的运动也可能具有类似的特性．起初仅仅是理论性的探讨，但是不久就得到了实验的确切验证．同时，在理论上又找到了能够反映微观粒子运动规律的一种具体数学形式，即波动方程．开始时，波动方程是非相对论的，即薛定谔波动方程：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi \tag{1.1}$$

其中 $\Psi(\mathbf{x},t)$ 是复数函数，称为波函数；$V(\mathbf{x},t)$ 是外力势．波粒二重性要求波函数 Ψ 具有统计性物理意义，即 $|\Psi(\mathbf{x},t)|^2$ 代表在

t 时刻微观粒子存在于 $\mathbf{x}$ 处的几率密度 $\rho(\mathbf{x},t)$. 当然，几率密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ 必须满足下列基本条件：ρ 在任意 $\mathbf{x}$ 时，t 是正定的，即 $\rho(\mathbf{x},t)\geqslant 0$；总几率 $\int_\infty \rho d^3x$ 守恒．从波动方程 (1.1) 可以推得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0, \tag{1.2}$$

这里

$$\rho=|\Psi|^2,\quad \mathbf{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi-\nabla\Psi^*\Psi\right). \tag{1.3}$$

因此，当用非相对论波动方程 (1.1) 描述微观粒子运动时，波函数 Ψ 满足统计性解释的要求．（Ψ 在 $\mathbf{x}\to 0$ 的边界条件，使 $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\infty}\oint\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}=0$.）

与非相对论波动方程 (1.1) 直接对应的相对论性波动方程显然具有下列形式：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\left(\nabla^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi. \tag{1.4}$$

这个方程一般称为克莱因-戈登方程．这时 $\varphi(\mathbf{x},t)$ 可以是实函数，也可以是复函数．取 φ 为复函数时，同样可以推得式 (1.2) 的守恒定律，不过现在

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi\right),$$

$$\mathbf{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi^*\nabla\varphi-\nabla\varphi^*\varphi\right), \tag{1.5}$$

这里虽然 $\mathbf{j}$ 同式 (1.3) 中的一样，但 ρ 却完全不同．由于波动方程 (1.4) 对 t 是二次微商，φ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 必须是两个独立的初始条件．因此 ρ 不是正定的量，它可正可负，也可以是零．所以 $\rho(\mathbf{x},t)$ 不能看作粒子存在于 $(\mathbf{x},t)$ 的几率密度．这样，严格地讲，相对论波动方程 (1.4) 不能同式 (1.1) 一样来描述一个微观粒子的运动．但是后来人们发现，相对论波动方程 (1.4) 虽然不能严格地用来描述单

粒子的微观运动，但可以把它看作类似于宏观电磁场方程的经典场方程；在进行量子化之后，正如电磁场描述多光子系统的运动一样，φ 场也描述一个多粒子系统的运动. 实践证明，量子场 φ 可以正确地反映 π 介子、K 介子等一类微观粒子的运动规律.

按照上面的分析，相对论波动方程(1.4)之所以不能严格地用来描述单粒子运动，是因为它对 t 是二次微商. 于是人们就设法建立一个对 t 是一次微商(因而对 x, y, z 也必须是一次微商)的相对论性波动方程，即狄喇克旋量波动方程:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + i\frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0, \tag{1.6}$$

式中 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 是四分量旋量波函数；$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是四个相互反对易的 4-4 厄米矩阵. 从式 (1.6) 及其共轭方程，同样可推得式(1.2)的守恒定律，不过现在

$$\rho = \psi^{+}\psi, \qquad \mathbf{j} = c\psi^{+}\boldsymbol{\alpha}\psi, \tag{1.7}$$

这时 ρ 确是正定的量. 旋量波动方程(1.6)好象可以正确地描述单粒子微观运动. 但是波动方程(1.6)不但有正能解，同时还有负能解. 这个困难后来由空穴理论所解决. 可是空穴理论引进了一个负能态全部被“负能粒子”所填满的物理真空概念. 快速变化的强电磁场可以从这个真空态激发起正负电子对. 因此严格地说(特别在高能的情形)，旋量波动方程(1.6)也同(1.4)一样，并不能描述单粒子的微观运动，而只描述一个多粒子系统的运动. 怎样使波动方程(1.6)正确地反映一个多粒子系统的微观运动呢？我们可以同对待波动方程(1.4)一样，先把式(1.6)看作一个经典的旋量场方程，然后再进行量子化. 实验证明，量子旋量场可以正确地反映电子、μ 轻子以及质子、中子等一类微观粒子的性质和运动规律.

一般地说，所有的相对论性波动方程都不能严格地用来描述单粒子微观运动，而只能先看作经典意义的场方程；在通过量子化之后，可以反映某种多粒子系统的微观运动规律.

由于各种类型的高能粒子加速器和对撞机的建造以及一些高山宇宙射线实验的发展，高能粒子物理学近年来进展极快. 物质世界的特征是存在着多种多样不同类型的微观粒子，它们可以产生、湮没. 它们之间不停息地相互作用，并不断地相互转化，而且能量越高，这些现象表现得就越突出. “这些物体是互相联系的，这就是说，它们是相互作用着的，并且正是这种相互作用构成了运动.”(恩格斯:《自然辩证法》，第 54 页)“而转化过程是一个伟大的基本过程，对自然的全部认识都综合于对这个过程的认识中.”(恩格斯:《反杜林论》，第 11 页)相对论性量子场论的任务正是在于正确地反映高能微观粒子之间相互作用和相互转化过程的基本客观规律. 按照量子场论观点，每一类型的粒子由一个相应的量子场来描述，不同粒子之间的相互作用就是这些量子场之间的适当的相互耦合. 从这个观点发展起来的粒子相互作用理论已取得一定的成功，这在电磁相互作用方面(量子电动力学)特别显著. 但也有很大的局限性. 点粒子模型和由此所导致的发散困难，微扰近似法对强相互作用不能适用等，都还没有令人满意的解决. 但是量子电动力学能够非常精确地反映电磁现象的微观运动规律这一事实，显示了量子场论的基本思想具有一定层次性的正确性.

在讨论量子场论具体内容之前，我们先介绍一些有关的预备知识，并复习一下量子力学中动力系运动的量子化的一般规律.

§1.1 一个新单位制

在相对论的量子理论中，经常出现两个基本常数，即 c 和 $\hbar$. 为了简便起见，一般在公式或方程中，都不把它们明显地写出来. 这样做相当于采用一个适当的新单位制，即取 c 为速度的单位，$\hbar$ 为作用量的单位. 第三个单位的选取是相当任意的，只要它的量纲独立于 c 和 $\hbar$ 的量纲就行. 下面我们选取能量的单位为十亿电子伏(GeV)，这对高能粒子物理很方便. 现在来对比一下这个新单位制和 CGS 单位制.

CGS 单位		新单位	
长度 L	厘米(cm)	速度 V	c
时间 T	秒(sec)	作用量 A	$\hbar$
质量 M	克(g)	能量 E	GeV

两种单位制量纲的转换关系是

$$L = VAE^{-1} \qquad V = LT^{-1}$$
$$T = AE^{-1} \qquad A = ML^2T^{-1}$$
$$M = V^{-2}E \qquad E = ML^2T^{-2}$$

单位的转换关系则是(取三位有效数字)

$$1\,c = (c)\mathrm{cm}\cdot\mathrm{sec}^{-1} \qquad (c) = 3.00\times 10^{10}$$
$$1\,\hbar = (\hbar)\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{sec}^{-1} \qquad (\hbar) = 1.05\times 10^{-27}$$
$$1\,\mathrm{GeV} = (\epsilon)\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{sec}^{-2} \qquad (\epsilon) = 1.60\times 10^{-3}$$

反过来,

$$\begin{aligned}1\,\mathrm{cm} &= (\epsilon)(c)^{-1}(\hbar)^{-1}\mathrm{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar \\ &= 5.05\times 10^{13}\mathrm{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar,\end{aligned}$$
$$1\,\mathrm{sec} = (\epsilon)(\hbar)^{-1}\mathrm{GeV}^{-1}\cdot\hbar = 1.52\times 10^{24}\mathrm{GeV}^{-1}\cdot\hbar,$$
$$1\,\mathrm{g} = (\epsilon)^{-1}(c)^2\mathrm{GeV}\cdot c^{-2} = 0.562\times 10^{24}\mathrm{GeV}\cdot c^{-2}.$$

在新单位制中,长度 L、时间 T、质量 M 的单位分别是

$$1\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar = (\epsilon)^{-1}(c)(\hbar)\mathrm{cm} = 0.198\times 10^{-13}\mathrm{cm},$$
$$1\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot\hbar = (\epsilon)^{-1}(\hbar)\mathrm{sec} = 0.658\times 10^{-24}\mathrm{sec},$$
$$1\,\mathrm{GeV}\cdot c^{-2} = (\epsilon)(c)^{-2}\mathrm{g} = 1.78\times 10^{-24}\mathrm{g}.$$

这些单位的数量级在高能粒子物理中很适用.

在选取新单位后,常数 c 和 $\hbar$ 就不再明显地出现了.

§1.2 动力系运动的量子化;广义坐标和共轭动量

对场进行量子化,我们将采用正则方法,亦即采用量子力学中动力系运动量子化的类似方法. 首先回顾一下这个方法的一般规

则.

1. 广义坐标;广义速度

假设有一个自由度为 n 的动力系. $q_i(t)$ 是它的坐标 ($i=1,2,\cdots,n$). 它们可以是一个粒子的直角坐标, 球坐标或柱坐标 ($n=3$); 也可以是N个粒子耦合系统的坐标 ($n=3N$), 或者是一根绳子或一面鼓皮上各点的坐标(自由度分别是 ∞^1 和 ∞^2); 也可以是一个三维场各点的坐标(自由度 ∞^3). 一般 $q_i(t)$ 称为动力系的广义坐标. 对应的速度称为广义速度, $\dot{q}_i(t)=dq_i(t)/dt$.

2. 拉氏量;运动方程

动力系的运动可由一个拉氏量

$$L=L(q,\dot{q}) \tag{1.8}$$

来描述, q 代表所有的 q_i, $\dot{q}$ 代表所有的 $\dot{q}_i$ ($i=1,2,\cdots,n$). 假设动力系是一个孤立系或守恒系, 则L不是 t 的显函数. 还假设 L 与 q 的高次微商 $\ddot{q},\dddot{q},\cdots$无关. 于是这个动力系的运动方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.9}$$

3. 共轭动量; 哈氏量; 正则方程

由L可定义动力系的共轭动量(即正则动量)

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.10}$$

然后,动力系的哈氏量是

$$H(q,p)=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-L(q,\dot{q}), \tag{1.11}$$

p 代表所有的 p_i. 必须注意: L中的独立力学变量是 q_i 和 $\dot{q}_i$, 而 H中的独立力学变量是 q_i 和 p_i. 它们之间由 n 个关系式(1.10)联系着. 从式(1.9)和(1.11)可以推导出正则运动方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{1.12}$$

若 $F(q, p)$ 是动力系的一个物理量（如动能、势能、角动量等），由式（1.12）可推得

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right). \tag{1.13}$$

因此 $\dot{H} = 0$，H 是一个守恒量，它是动力系的能量.

4. 动力系的量子化

以上是经典力学中动力系的宏观运动规律. 动力系的微观运动规律在量子力学中已有详细阐述. 首先力学变量 q_i，p_i 不再是 c 数而是 q 数，是一个线性矢量空间的厄米算符，并有对易关系

$$[q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0,$$

$$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij} \qquad i、j = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.14}$$

这里 $[A, B] = AB - BA$，称为算符 A，B 的对易子. 式（1.14）就是动力系运动的量子化规则. 假设这些力学变量算符 q_i，p_i 也满足经典力学变量的运动方程（1.12）（这是量子力学海森堡表象的基本假设），结合式（1.14），就可以推得量子力学的正则运动方程

$$\dot{q}_j = i[H, q_j], \quad \dot{p}_j = i[H, p_j] \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.15}$$

任意物理量 $F(q, p)$ 现在也是算符，由式（1.15）可推得

$$\dot{F} = i[H, F]. \tag{1.16}$$

若 $[H, F] = 0$，则 F 是一个守恒量算符，这是海森堡表象中守恒定律的表式. 显然哈氏量 H 本身是一个守恒量，是动力系的能量算符.

5. 本征态问题

一个自由度为 n 的动力系有 n 个两两相互对易的守恒量：H $K, L, \cdots$（其中包含 H）. 它们有共同的本征态. 对这个动力系的量子力学问题求解，就是结合对易关系（1.14）对下列联立本征方程求解：

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle,$$

$$
\begin{aligned}
K|\alpha\rangle &= k_\alpha|\alpha\rangle, \\
L|\alpha\rangle &= l_\alpha|\alpha\rangle, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdot
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

$|\alpha\rangle$ 是共同本征态矢；E_α, k_α, l_α, $\cdots$ 分别是 H, K, L, $\cdots$ 的本征值. 标志共同本征态 $|\alpha\rangle$ 的参数 α 是 n 个量子数(分立的或连续的)的集合. 因为H守恒，动力系是守恒系，所以可以规定它的态矢 $|\alpha\rangle$ 与 t 无关(海森堡表象).

对易关系(1.14)，运动方程(1.15)和本征方程(1.17)是动力系运动量子化的基本方程组.

§1.3 简 谐 振 子

现在来讨论一维简谐振子的量子化问题. 它不但是上节中量子化规则的一个典型例子，而且它的解将对场的量子化问题直接有用.

简谐振子的坐标记为 $q(t)$，运动方程是

$$m\ddot{q} = -kq,$$

对应的拉氏量则为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2.$$

由 L 推得共轭动量和哈氏量(能量)为

$$
\begin{aligned}
p &= m\dot{q}, \\
H &= \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2q^2\right), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

进行量子化时，算符 q, p 满足对易关系

$$[q, p] = i. \tag{1.19}$$

一维谐振子只有一个守恒量，即 H. 现在就按式(1.17)求H的本征值和本征态. 一个简便的方法是采取新的力学变量

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p - im\omega q), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p + im\omega q) \tag{1.20}$$

以代替 q, p. 这时容易证明:

$$[a, a^+] = 1, \tag{1.21}$$

$$H = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \tag{1.22}$$

$$N = a^+a. \tag{1.23}$$

简谐振子运动的量子化问题就变为对算符 N 本征态的求解问题，即

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{1.24}$$

n 是N的本征值.

首先，N 是厄米算符，故 n 必为实数，而且容易看到，$n \geqslant 0$（只有 $a|n\rangle = 0$ 时才 $n = 0$）. 还可以证明，当 m 是正整数时，

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^m] = -ma^m,$$
$$[N, a^+] = a^+, \quad [N, a^{+m}] = ma^{+m}.$$

因此

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \qquad Na^m|n\rangle = (n-m)a^m|n\rangle, \tag{1.25}$$

$$Na^+|n\rangle = (n+1)a^+|n\rangle, \quad Na^{+m}|n\rangle = (n+m)a^{+m}|n\rangle. \tag{1.26}$$

所以若 $|n\rangle$ 是N的本征态矢，$a|n\rangle$ 和 $a^+|n\rangle$ 也是N的本征态矢，而且

$$a|n\rangle \sim |n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle \sim |n+1\rangle. \tag{1.27}$$

因此 a 可称为降级算符，它每作用一次都使谐振子的能级降低一级. 同样，a^+ 称为升级算符，它每作用一次都使谐振子的能级升高一级.

按式 (1.25)，若 n 是N的本征值，则 $n-1, n-2, n-3, \cdots$ 也都是N的本征值. 但是N的本征值都为正数；因此这个数列必须截止，即一定有正整数 m 存在使 $n = m$, $Na^n|n\rangle = 0$. 所以 n 必为正整数，$n = 0, 1, 2, \cdots$. 于是 $a^n|n\rangle \sim |0\rangle$. 这里 $|0\rangle$ 是N的（也是H的）基态矢. 又因 $n \geqslant 0$, 必须

$$a|0\rangle = 0. \tag{1.28}$$

假设基态矢归一，$\langle 0|0\rangle = 1$, 则可证明

$$\langle 0|a^m a^{+n}|0\rangle = n!\,\delta_{mn}$$