

大学数学丛书

泛函分析

〔罗〕R. 克里斯台斯库 著

科学出版社

591176/04

大学数学丛书

泛 函 分 析

〔罗〕R. 克里斯台斯库 著

鲁世杰 译

周美柯 校

科 学 出 版 社

1 9 8 8

内 容 简 介

本书作者是罗马尼亚科学院院士、布加勒斯特大学教授,长期主讲泛函分析,本书是他积多年的教学与研究经验写成的.全书篇幅不大,内容丰富,论述严谨,观点新颖,具有启发性,是一本很好的泛函分析教科书.

本书几乎覆盖了泛函分析的各个主要方面,其中包括预备知识:线性空间和线性算子、线性拓扑空间、线性赋范空间、线性连续算子、线性有序空间和正则算子、希尔伯特空间和自伴算子、赋范代数、广义函数、非线性算子.

本书适合我国大学数学系高年级学生、研究生、教师和有关专业的研究人员阅读.

Romulus Cristescu

Analiză Funcțională

Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, Editia a IV-a

大学数学丛书

泛 函 分 析

〔罗〕R. 克里斯台斯库 著

鲁世杰 译

周美柯 校

责任编辑 张启男

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年5月第一版 开本:850×1168 1/32

1988年5月第一次印刷 印张:9 1/2

印数:0001—4,960

字数:245,000

ISBN 7-03-000303-9/O·83

定价:2.95元

序 言

这一版《泛函分析》与前一版差别不大。

这本书包含的内容对于数学系三年级学生是特别重要的。泛函分析不仅把古典分析的概念和命题一般化，把原先个别出现的理论系统化和统一处理，而且还包含着古典分析中不可能遇见，甚至是不可能表述的结果。当今许多别的数学分支都使用泛函分析这一工具，这个工具也应用在现代物理和一些技术问题中。

为了保持教学的连续性，在这样一本仅仅介绍泛函分析原理的教材中，还包含了为学习数学系四、五年级一些专门化教程所需要的一些内容。

与前一版相比，这一版仅仅作了一些细目的修改，增加了一些例子和习题。

R. 克里斯台斯库

目 录

引论.....	1
§ 1. 集论概念	1
1.1 集和函数	1
1.2 有序集	3
§ 2. 拓扑概念	6
2.1 拓扑空间	6
2.2 连续函数. 一些拓扑的定义	9
2.3 Hausdorff 空间. 紧空间	10
2.4 距离空间	12
第一章 线性空间和线性算子.....	15
§ 1. 线性空间	15
1.1 线性空间概念	15
1.2 线性子空间. 平面集. 凸集	17
1.3 线性无关集	22
1.4 积空间和商空间	25
§ 2. 线性算子	26
2.1 线性算子概念	26
2.2 线性算子空间	28
2.3 代数基和线性算子	29
2.4 线性泛函和超平面	30
2.5 实线性泛函的延拓	32
2.6 复线性泛函的延拓	38
第二章 拓扑线性空间.....	41
§ 1. 拓扑线性空间及其性质	41
1.1 拓扑线性空间概念	41
1.2 拓扑线性空间的性质	43

1.3 赋范线性空间	48
§ 2. 局部凸空间	52
2.1 局部凸空间概念	52
2.2 半范数族定义的拓扑	52
2.3 局部凸空间上的半范数	54
2.4 半范数定向集, 局部凸拓扑的比较	56
2.5 线性连续泛函	59
2.6 局部凸空间上的弱拓扑	61
2.7 零邻域吸收空间	62
2.8 局部凸空间上的归纳极限	63
第三章 赋范线性空间	67
§ 1. 赋范线性空间及其性质	67
1.1 赋范线性空间概念	67
1.2 有限维赋范空间	70
1.3 赋范线性空间的有限积	72
1.4 商赋范线性空间	75
1.5 可分赋范线性空间	76
§ 2. Banach 空间	78
2.1 完备赋范线性空间	78
2.2 赋范线性空间的完备化	80
2.3 Banach 空间中元的可和族	82
2.4 一致凸 Banach 空间	86
§ 3. Banach 空间的例	89
3.1 数列空间	89
3.2 有界数值函数空间	90
3.3 可测函数类空间	95
第四章 线性连续算子	100
§ 1. 线性连续算子	100
1.1 线性连续算子的一般概念	100
1.2 线性连续算子空间	105
1.3 点收敛和一致有界原理	108
1.4 赋范空间间的可逆线性算子	110

1.5	开映射	111
1.6	闭算子	114
1.7	Banach 空间中的线性算子方程	115
1.8	线性连续算子的不动点	123
§ 2.	赋范线性空间的对偶	124
2.1	赋范空间上的线性连续泛函	124
2.2	某些具体空间上线性连续泛函的一般形式	126
2.3	赋范空间的对偶和弱拓扑	139
2.4	具体空间上的应用	144
§ 3.	紧算子	147
3.1	紧算子的定义和性质	147
3.2	紧算子的例	149
第五章	有序线性空间和正则算子	152
§ 1.	有序线性空间	152
1.1	有序线性空间的概念	152
1.2	可格线性空间	155
1.3	可格完备线性空间	161
1.4	赋范可格空间	162
§ 2.	正则算子	164
2.1	加法算子和正算子	164
2.2	正则算子及其性质	166
2.3	赋范可格空间上的正则泛函	167
2.4	空间 $C(T)$ 上的正则泛函	169
第六章	Hilbert 空间和自伴算子	171
§ 1.	Hilbert 空间及其性质	171
1.1	内积	171
1.2	Hilbert 空间概念	172
1.3	直交性	176
1.4	投影	177
1.5	直交分解	179
1.6	概率论中的 Hilbert 空间	180
§ 2.	Hilbert 空间中的直交基	182

2.1	直交族	182
2.2	直交基	184
2.3	Hilbert 维数	186
2.4	Hilbert 空间的表示	188
2.5	空间 $L^2(T)$ 中的应用	191
§ 3.	自伴算子	194
3.1	Hilbert 空间的共轭	194
3.2	伴随算子	196
3.3	自伴算子	199
3.4	正自伴算子	202
3.5	正规算子	208
§ 4.	自伴算子的予解集和谱	210
4.1	固有值和固有元	210
4.2	予解式和谱	212
4.3	算子方程	216
§ 5.	自伴算子的积分表示	217
5.1	自伴算子的谱族	217
5.2	积分表示	223
第七章	赋范代数	226
§ 1.	代数	226
1.1	定义和例	226
1.2	具有单位元的代数	228
1.3	理想	229
§ 2.	赋范代数	231
2.1	赋范代数概念	231
2.2	代数 $L_K(R)$	234
2.3	酉 Banach 代数中的可逆元	236
2.4	商赋范代数	240
§ 3.	Banach 代数的表示	241
3.1	Banach 域	241
3.2	特征空间	242
3.3	代数 $\Phi(A)$	243

3.4	Stone-Weierstrass 定理	246
3.5	一些 Banach 代数的表示	250
第八章	广义函数	255
§ 1.	广义函数的一般概念	255
1.1	Schwartz 空间	255
1.2	广义函数概念	258
1.3	在一个开集上等于零的广义函数	261
1.4	具有紧支集的广义函数	263
1.5	缓增广义函数	264
§ 2.	广义函数的运算	266
2.1	单变元广义函数的导数	266
2.2	多变元广义函数的导数	267
2.3	两个广义函数的直接积	269
2.4	两个广义函数的卷积	272
2.5	缓增广义函数的 Fourier 变换	273
第九章	非线性算子	276
§ 1.	非线性算子的不动点	276
1.1	引导性概念	276
1.2	Schauder-Тихонов 不动点定理	280
§ 2.	单调算子	283
2.1	单调算子和强弱连续算子	283
2.2	(b) 型算子	286
	参考文献	292

引 论

为了便于阅读，我们在本章叙述一些将在其它章节用到的集和拓扑的概念。

§ 1. 集 论 概 念

1.1 集 和 函 数

我们假定读者熟知集论的基本概念¹⁾。如果 x 是集 E 的元，而 $p(x)$ 是有关 x 的一个命题，用 $\{x \in E | p(x)\}$ (或者仅用 $\{x | p(x)\}$) 记 E 中所有使命题 $p(x)$ 为真的元的集。

本书将用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，用 $\mathbf{K}$ 表示复数集。

设 E 是某个集，而 $A \subset E$ ，那么 A 在 E 中的余集用 $\mathbf{C}_E A$ 表示。如果 E 是约定的，就用 $\mathbf{C}A$ 表示。空集记为 $\emptyset$ 。

一个集 E 到一个集 F 中的映射 (即一个法则，它对每一个元 $x \in E$ 规定一个且仅仅一个元 $y \in F$) 又称为定义在 E 上取值在 F 中的函数，记为 $f: E \rightarrow F$ 或 f (如果 E, F 是约定的)。如果 $x \in E$ ，那么在映射 f 下 F 中对应于 x 的元 y 记为 $f(x)$ (这个函数又记为 $x \mapsto f(x)$)。如果考虑函数 $f: E \rightarrow F$ 和子集 $A \subset E$ ，记

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\},$$

并称 $f(A)$ 为集 A (在 f 下) 的象。

如果 $B \subset F$ ，记

1) 特别地，我们假定读者熟知这样一些概念：包含、子集(部分)、并、交、余集、空子集、不相交集等等。我们使用属于、包含、并、交的通常符号。

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\},$$

$f^{-1}(B)$ 称为集 B (在 f 下) 的原象.

如果 $\{A_i\}_{i \in J}$ 是集 E 的一个子集族, 用 $\bigcup_{i \in J} A_i$ 记这个族的并, 用 $\bigcap_{i \in J} A_i$ 记它的交.

对任一函数 $f: E \rightarrow F$ 和分别由 E, F 的子集构成的族 $\{A_i\}_{i \in J}$ 和 $\{B_i\}_{i \in J}$, 有等式

$$f\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \bigcup_{i \in J} f(A_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} B_i\right) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \bigcap_{i \in J} f^{-1}(B_i),$$

以及包含关系

$$f\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in J} f(A_i).$$

对任一 $B \subset F$, 还有等式

$$f^{-1}(CB) = Cf^{-1}(B).$$

如果 f 是定义在 E 上取值在 F 中的函数, 那么集 E 称为 f 的定义域, 集 $f(E)$ 称为 f 的值域. 设 $E_1 \subset E$, 那么定义在 E_1 上 (取值在 F 中) 的函数

$$f_1(x) = f(x), (x \in E_1)$$

称为 f 在 E_1 上的限制.

设 f 是定义在 E 上取值在 F 中的函数. 如果由 $x_1 \neq x_2$ 得出 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 那么称 f 是一个单射. 如果 $f(E) = F$, 则称 f 把 E 映射到 F 上, 或者称 f 是 E 到 F 上的映射 (或者 f 是一个满射). 如果 f 把 E 映射到 F 上, 并且 f 是一个单射, 则称 f 是 E 到 F 上的一个一一映射, 或双射.

现考虑两个函数 $f: E \rightarrow F$ 和 $g: F \rightarrow G$. 由 $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in E$ 定义的函数 $h: E \rightarrow G$ 称为函数 g 和 f 的复合函数并记为 $h = g \cdot f$ (或 $h = gf$). 又称 h 是通过这两个函数的复合所

得。

现设 A 和 B 为两个集。集 A 和 B 的 Cartesian 乘积 $A \times B$ 如下定义:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

n 个集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的 Cartesian 乘积是

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i\}.$$

如果 $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, 那么用 A^n 表示它们的 Cartesian 乘积.

也可以对某个集族 $\{A_i\}_{i \in J}$ 定义 Cartesian 乘积

$$\prod_{i \in J} A_i = \{\{x_i\}_{i \in J} | x_i \in A_i\}.$$

如果 E 是某个集, E 的一个子集族 $\mathcal{A}$ 称为链, 如果对 $\mathcal{A}$ 中任意有限个元 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有 $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \phi$.

我们假定读者熟知集的势的概念, 特别是可数集的概念.

1.2 有序集

集 X 称为有序集, 如果对某些元 $x, y \in X$, 定义了满足下面条件的关系 $\leq$ (称为序关系):

- (i) $x \leq x$, 对任一 $x \in X$ (自反性);
- (ii) 如果 $x \leq y, y \leq z$, 那么 $x \leq z$ (传递性);
- (iii) 如果 $x \leq y, y \leq x$, 那么 $x = y$ (反对称性).

设 X 是一个有序集.

元 $a \in X$ 称为极小元, 如果由 $x \leq a$ 得出 $x = a$; 元 $b \in X$ 称为极大元, 如果由 $b \leq x$ 得出 $b = x$.

子集 $E \subset X$ 称为圆于下, 如果存在一个元 $a \in X$, 使得对任一 $x \in E$, 有 $a \leq x$; 元 a 称为 E 的一个下界.

称集 E 圆于上, 如果存在 $b \in X$, 使得对任一 $x \in E$, 有 $x \leq b$;

元 b 称为 E 的一个上界. 如果 E 同时囿于下又囿于上, 则称 E 有界.

如果 a 是 E 的一个下界并且 $a \in E$, 那么 a 称为 E 的最小元; 如果 b 是 E 的一个上界并且 $b \in E$, 那么称 b 为 E 的最大元.

如果 E 囿于下并且存在最大下界¹⁾ a , 那么元 a 称为 E 的下确界并记为 $a = \inf E$.

如果 E 囿于上并且存在最小上界²⁾ b , 那么元 b 称为 E 的上确界并记为 $b = \sup E$.

对两个元 $x, y \in X$, 记

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad x \vee y = \sup\{x, y\}.$$

对于有限个元 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, 记

$$\bigwedge_{k=1}^n x_k = \inf\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

$$\bigvee_{k=1}^n x_k = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

对于 X 的元族 $\{x_j\}_{j \in J}$, 使用符号 $\bigwedge_{j \in J} x_j, \bigvee_{j \in J} x_j$.

如果 J 是自然数集 $\mathbf{N}$, 也使用符号 $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n, \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$.

可以验证下面关于有序集 X 的子集的界的命题.

(i) 如果存在 $a = \inf E$ 和 $b = \sup E$, 那么 $a \leq b$.

(ii) 如果 $E_1 \subset E_2$ 并且存在 $a_1 = \inf E_1$ 和 $a_2 = \inf E_2$, 那么 $a_1 \geq a_2$; 如果存在 $b_1 = \sup E_1$ 和 $b_2 = \sup E_2$, 那么 $b_1 \leq b_2$.

(iii) 设对任一 $j \in J$, 有 $x_j \leq y_j$; 如果存在 $x' = \bigwedge_{j \in J} x_j$ 和 $y' = \bigwedge_{j \in J} y_j$, 那么 $x' \leq y'$; 如果存在 $x'' = \bigvee_{j \in J} x_j$ 和 $y'' = \bigvee_{j \in J} y_j$,

1) 即在下界的集合中存在最大元.

2) 即在上界的集合中存在最小元.

那么 $x'' \leq y''$.

(iv) 如果存在 $a = \sup A$ 和 $b = \inf B$, 并且对任 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \leq y$, 那么 $a \leq b$.

(v) 设 $E = \bigcup_{j \in J} E_j$; 如果存在 $a = \inf E$ 以及对任一 $j \in J$ $a_j = \inf E_j$, 那么 $\bigwedge_{j \in J} a_j$ 存在并有等式

$$a = \bigwedge_{j \in J} a_j;$$

如果存在 $b = \sup E$ 以及对任一 $j \in J$ $b_j = \sup E_j$, 那么 $\bigvee_{j \in J} b_j$ 存在并且

$$b = \bigvee_{j \in J} b_j.$$

有序集 X 称为右定向的, 如果对任意一对元 $a, b \in X$, 存在一个元 $c \in X$, 使得 $a \leq c, b \leq c$. 有序集 X 称为左定向的, 如果对任意一对元 $a, b \in X$, 存在 $c \in X$, 使得 $c \leq a, c \leq b$.

同时为右定向和左定向的集称为双定向的.

右定向集简称为定向集.

有序集 X 称为格(或可格集), 如果对任意一对元 $x, y \in X$, 存在 $x \wedge y$ 和 $x \vee y$.

在一个格中, 对任意有限多个元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 存在 $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ 和 $\bigvee_{i=1}^n x_i$.

格 X 称为相对完备的, 如果对任意囿于下的集 $A \subset X$, 存在 $\inf A$, 并且对任意囿于上的集 $B \subset X$, 存在 $\sup B$.

有序集 X 称为全序的, 如果对任意一对元 $x, y \in X$, 必有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$.

有序集 X 称为良序的, 如果任意非空子集 $A \subset X$ 都有最小元. 下面的命题是我们所熟知的:

Zorn 定理 设 X 是这样的有序集, 它的任一全序子集囿于

上,那么对任一元 $x_0 \in X$, 存在一个极大元 $x_1 \in X$, 使得 $x_0 \leq x_1$.

§ 2. 拓 扑 概 念

2.1 拓 扑 空 间

我们说在集 X 上给定了一个拓扑 τ , 如果确定了 X 的一个具有下面性质的子集族 $\mathcal{J}$:

(i) $\phi, X \in \mathcal{J}$;

(ii) 如果 $\{A_i\}_{i \in J}$ 是 $\mathcal{J}$ 中集的一个(非空)族, 并且

$$A = \bigcup_{i \in J} A_i,$$

那么 $A \in \mathcal{J}$;

(iii) 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $\mathcal{J}$ 中的集并且 $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$,

那么 $A \in \mathcal{J}$.

集 $A \in \mathcal{J}$ 称为开集.

给定了一个拓扑 τ 的集 X 称为拓扑空间. 这时, X 中的一个元 x 又称为空间 X 中的一个点.

设 X 是一个拓扑空间.

设 $x \in X$, 集 $E \subset X$ 称为 x 的邻域, 如果存在一个开集 A , 使得 $x \in A$ 并且 $A \subset E$.

集 A 是它的每一个点的邻域当且仅当 A 是一个开集.

点 x 的所有邻域的集 $\mathcal{V}_x$ 具有下面的性质:

(i) 如果 $A \in \mathcal{V}_x$, 那么 $x \in A$;

(ii) 如果 $A \in \mathcal{V}_x$ 并且 $A \subset B$, 那么 $B \in \mathcal{V}_x$;

(iii) 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{V}_x$ 并且 $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$, 那么

$$A \in \mathcal{V}_x;$$

(iv) 对任一 $E \in \mathcal{V}_x$, 存在 $A \in \mathcal{V}_x$, 使得对任一 $y \in A$, 有 $E \in \mathcal{V}_y$.

反之, 设 X 是某个集, 并且对每个元 $x \in X$ 给定了 X 的一个具有性质 1)–4) 的子集族 $\mathcal{V}_x$, 那么在 X 上存在且仅存在一个拓扑 τ , 按照这个拓扑, $\mathcal{V}_x$ 就是点 x 的邻域的集. 这个拓扑可以这样得到, 取所有这样的集 $A \subset X$ 作为开集族 $\mathcal{J}$: 对任一 $x \in A$ 都有 $A \in \mathcal{V}_x$.

因此一个集 X 上的拓扑 τ 也可以借助邻域的集来定义.

设 X 是一个拓扑空间, x 是 X 的一个点, 并且 $\mathcal{V}_x$ 是 x 的邻域的集. 子集 $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{V}_x$ 称为 x 的邻域基 (或基本邻域系), 如果对任一 $V \in \mathcal{V}_x$, 存在 $W \in \mathcal{W}_x$, 使得 $W \subset V$.

现设 X 是某个集, 并且对任一 $x \in X$ 给定了 X 的一个 (非空) 子集族 $\mathcal{W}_x$, 具有性质: (1) 对任一 $W \in \mathcal{W}_x$ 有 $x \in W$; (2) 对任意的 $W_1, W_2 \in \mathcal{W}_x$ 存在 $W_3 \in \mathcal{W}_x$ 使得 $W_3 \subset W_1 \cap W_2$; (3) 如果 $W \in \mathcal{W}_x$, 那么存在 $V \in \mathcal{W}_x$, 使得对任一 $y \in V$ 有 $W \supset W_y$, 对某个集 $W_y \in \mathcal{W}_y$.

对任一 $x \in X$, 用 $\mathcal{V}_x$ 表示 X 的具有这样性质的子集 E 的全体: 存在 $W \in \mathcal{W}_x$ 使得 $W \subset E$. 那么按照某个拓扑 τ , $\mathcal{V}_x$ 是点 x 的邻域的全体, 而 $\mathcal{W}_x$ 是 x 的邻域基.

设 X 是一个拓扑空间.

集 $B \subset X$ 称为闭的, 如果集 $A = \mathbf{C}B$ 是开的.

由这个定义得出闭集具有下面的性质:

(i') ϕ 和 X 是闭集;

(ii') 如果 $\{B_j\}_{j \in J}$ 是任一闭集族并且 $B = \bigcap_{j \in J} B_j$, 那么 B 是闭的;

(iii') 如果 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是闭集并且 $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, 那么 B 是闭的.

设 A 是拓扑空间 X 的一个子集. 点 $x \in A$ 称为 A 的内点, 如果 A 是点 x 的一个邻域. 一个集 A 的所有内点的集称为 A 的内部, 记为 $\text{int } A$. 集 $\text{int } A$ 是含于 A 内的最大开集; 它是含于 A 内的所有开集的并. 一个集 A 是开的, 其充分必要条件是

$$A = \text{int } A.$$

点 $x \in X$ 称为集 A 的触点, 如果对 x 的任一邻域 V , 有 $V \cap A \neq \emptyset$. 集 A 的所有触点的集称为 A 的闭包 (或附着), 记为 $\bar{A}$. 集 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集; 它是包含 A 的所有闭集的交. 一个集 A 是闭的, 充分必要条件是 $A = \bar{A}$.

点 $x \in X$ 是集 A 的聚点, 如果 x 的任一邻域 V 都含有 A 的一个异于 x 的点. 任意一个聚点都是一个触点. A 的任意一个不属于 A 的触点都是聚点. 如果 $x \in A$ 不是 A 的聚点, 那么称 x 为 A 的孤立点.

集 A 称为处处稠密 (或在 X 中稠密), 如果 $\bar{A} = X$.

设 X_0 是 X 的一个子集, 那么族 $\mathcal{J}_0 = \{A \cap X_0 \mid A \in \mathcal{J}\}$ 具有本节开头所述的性质 (i), (ii), (iii), 所以在 X_0 上定义了一个拓扑 τ_0 . 称 τ_0 为 τ 在 X_0 上的诱导拓扑 (或 τ_0 是 τ 在 X_0 上的迹), 而 X_0 称为 X 的拓扑子空间.

在拓扑空间 X 中, 集 A 称为疏的, 如果 $\text{int } \bar{A} = \emptyset$. 一个集称为弱的或 (Baire) 第一纲的, 如果它是可数个疏集的并. 不是第一纲的集称为 (Baire) 第二纲的.

根据定义, 一个拓扑空间 X 的点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到一点 x , 而 x 称为序列的极限, 是指对 x 的任一邻域 V , 存在一个自然数 n_0 , 当 $n > n_0$ 时有 $x_n \in V$ 我们记为 $x_n \rightarrow x$ 或 $x = \lim x_n$.

设 X 是某个集并且 τ_1, τ_2 是 X 上由 (开) 子集族 $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ 所定义的二个拓扑. 如果 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$, 那么称 τ_1 弱于 τ_2 (或 τ_2 强于 τ_1) 并记为 $\tau_1 \leq \tau_2$.

如果 $\tau_1 \leq \tau_2$, 又称 τ_2 精于 τ_1 (或 τ_1 粗于 τ_2), 如果 $\tau_1 < \tau_2$ (即 $\tau_1 \leq \tau_2$ 并且 $\tau_1 \neq \tau_2$), 那么又称 τ_2 严格精于 τ_1 .

如果对于拓扑 τ_1, τ_2 , 有 $\tau_1 \leq \tau_2$ 或 $\tau_2 \leq \tau_1$, 则称这两个拓扑是可比较的.

$\tau_1 \leq \tau_2$ 的充分必要条件是对任一 $x \in X$, x 在拓扑 τ_1 中的任一邻域也是 x 在拓扑 τ_2 中的一个邻域.

现设 X 是一个集并且 $\mathcal{S}$ 是 X 的子集的一个族. 设 $\mathcal{S}'$ 是

• • •