大学数学丛书

泛函分析

〔罗〕R.克里斯台斯库 著

科学出版社

大学数学丛书

泛 函 分 析

〔罗〕R. 克里斯台斯库 著

鲁世杰 译

周美柯 校

科 学 出 版 社

1988

内 容 简 介

本书作者是罗马尼亚科学院院士、布加勒斯特大学教授，长期主讲泛函分析，本书是他积多年的教学与研究经验写成的．全书篇幅不大，内容丰富，论述严谨，观点新颖，具有启发性，是一本很好的泛函分析教科书．

本书几乎覆盖了泛函分析的各个主要方面，其中包括预备知识：线性空间和线性算子、线性拓扑空间、线性赋范空间、线性连续算子、线性有序空间和正则算子、希尔伯特空间和自伴算子、赋范代数、广义函数、非线性算子．

本书适合我国大学数学系高年级学生、研究生、教师和有关专业的研究人员阅读．

Romulus Cristescu

Analiză Funcţională

Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983, Editia a IV-a

大学数学丛书

泛 函 分 析

〔罗〕R. 克里斯台斯库 著

鲁世杰 译

周美柯 校

责任编辑 张启男

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年5月第一版 开本：850×1168 1/32

1988年5月第一次印刷 印张：9 1/2

印数：0001—4,960 字数：245,000

ISBN 7-03-000303-9/O·83

定价：2.95 元

序　　言

这一版《泛函分析》与前一版差别不大.

这本书包含的内容对于数学系三年级学生是特别重要的. 泛函分析不仅把古典分析的概念和命题一般化，把原先个别出现的理论系统化和统一处理，而且还包含着古典分析中不可能遇见，甚至是不可能表述的结果. 当今许多别的数学分支都使用泛函分析这一工具，这个工具也应用在现代物理和一些技术问题中.

为了保持教学的连续性，在这样一本仅仅介绍泛函分析原理的教材中，还包含了为学习数学系四、五年级一些专门化教程所需要的一些内容.

与前一版相比，这一版仅仅作了一些细目的修改，增加了一些例子和习题.

R. 克里斯台斯库

目　　录

引　　论

为了便于阅读，我们在本章叙述一些将在其它章节用到的集和拓扑的概念.

§1. 集论概念

1.1　集和函数

我们假定读者熟知集论的基本概念[1]. 如果 x 是集 E 的元，而 $p(x)$ 是有关 x 的一个命题，用 $\{x\in E\mid p(x)\}$（或者仅用 $\{x\mid p(x)\}$）记 E 中所有使命题 $p(x)$ 为真的元的集.

本书将用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，用 $\mathbf{K}$ 表示复数集.

设 E 是某个集，而 $A\subset E$，那么 A 在 E 中的余集用 $\complement_E A$ 表示. 如果 E 是约定的，就用 $\complement A$ 表示. 空集记为 $\varnothing$.

一个集 E 到一个集 F 中的映射（即一个法则，它对每一个元 $x\in E$ 规定一个且仅仅一个元 $y\in F$）又称为定义在 E 上取值在 F 中的函数，记为 $f: E\to F$ 或 f（如果 E，F 是约定的）. 如果 $x\in E$，那么在映射 f 下 F 中对应于 x 的元 y 记为 $f(x)$（这个函数又记为 $x\longmapsto f(x)$）. 如果考虑函数 $f: E\to F$ 和子集 $A\subset E$，记

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\},$$

并称 $f(A)$ 为集 A（在 f 下）的象.

如果 $B\subset F$，记

1）特别地，我们假定读者熟知这样一些概念：包含、子集（部分）、并、交、余集、空子集、不相交集等等. 我们使用属于、包含、并、交的通常符号.

$$f^{-1}(B)=\{x \mid f(x)\in B\},$$

$f^{-1}(B)$ 称为集 B（在 f 下）的原象.

如果 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是集 E 的一个子集族，用 $\bigcup_{j\in J} A_j$ 记这个族的并，用 $\bigcap_{j\in J} A_j$ 记它的交.

对任一函数 $f: E\to F$ 和分别由 E，F 的子集构成的族 $\{A_j\}_{j\in J}$ 和 $\{B_j\}_{j\in J}$，有等式

$$f\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)=\bigcup_{j\in J} f(A_j),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)=\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j),$$

以及包含关系

$$f\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)\subset\bigcap_{j\in J} f(A_j).$$

对任一 $B\subset F$，还有等式

$$f^{-1}(\complement B)=\complement f^{-1}(B).$$

如果 f 是定义在 E 上取值在 F 中的函数，那么集 E 称为 f 的**定义域**，集 $f(E)$ 称为 f 的**值域**. 设 $E_1\subset E$，那么定义在 E_1 上（取值在 F 中）的函数

$$f_1(x)=f(x),\ (x\in E_1)$$

称为 f 在 E_1 上的**限制**.

设 f 是定义在 E 上取值在 F 中的函数. 如果由 $x_1\neq x_2$ 得出 $f(x_1)\neq f(x_2)$，那么称 f 是一个**单射**. 如果 $f(E)=F$，则称 f 把 E 映射到 F 上，或者称 f 是 E 到 F 上的映射（或者 f 是一个**满射**）. 如果 f 把 E 映射到 F 上，并且 f 是一个单射，则称 f 是 E 到 F 上的一个**一一映射**，或**双射**.

现考虑两个函数 $f: E\to F$ 和 $g: F\to G$. 由 $h(x)=g(f(x))$，$\forall x\in E$ 定义的函数 $h: E\to G$ 称为函数 g 和 f 的**复合函数**并记为 $h=g\cdot f$（或 $h=gf$）. 又称 h 是通过这两个函数的复合所

得.

现设 A 和 B 为两个集. 集 A 和 B 的 Cartesian 乘积 $A\times B$ 如下定义:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

n 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 Cartesian 乘积是

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$
$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i\}.$$

如果 $A_1=A_2=\cdots=A_n$, 那么用 A^n 表示它们的 Cartesian 乘积.

也可以对某个集族 $\{A_j\}_{j\in J}$ 定义 Cartesian 乘积

$$\prod_{j\in J}A_j=\{\{x_j\}_{j\in J}\mid x_j\in A_j\}.$$

如果 E 是某个集, E 的一个子集族 $\mathscr{A}$ 称为链, 如果对 $\mathscr{A}$ 中任意有限个元 $A_1, A_2,\cdots, A_n$, 有 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\neq\phi$.

我们假定读者熟知集的势的概念,特别是可数集的概念.

1.2 有 序 集

集 X 称为有序集, 如果对某些元 $x, y\in X$, 定义了满足下面条件的关系$\leqslant$(称为序关系):

(i) $x\leqslant x$, 对任一 $x\in X$ (自反性);

(ii) 如果 $x\leqslant y$, $y\leqslant z$, 那么 $x\leqslant z$ (传递性);

(iii) 如果 $x\leqslant y$, $y\leqslant x$, 那么 $x=y$ (反对称性).

设 X 是一个有序集.

元 $a\in X$ 称为极小元,如果由 $x\leqslant a$ 得出 $x=a$; 元 $b\in X$ 称为极大元,如果由 $b\leqslant x$ 得出 $b=x$.

子集 $E\subset X$ 称为囿于下,如果存在一个元 $a\in X$, 使得对任一 $x\in E$, 有 $a\leqslant x$; 元 a 称为 E 的一个下界.

称集 E 囿于上,如果存在 $b\in X$, 使得对任一 $x\in E$,有 $x\leqslant b$;

元b称为E的一个上界．如果E同时囿于下又囿于上，则称E有界。

如果a是E的一个下界并且$a\in E$，那么a称为E的**最小元**；如果b是E的一个上界并且$b\in E$，那么称b为E的**最大元**.

如果E囿于下并且存在最大下界[1] a，那么元a称为E的**下确界**并记为$a=\inf E$.

如果E囿于上并且存在最小上界[2] b，那么元b称为E的**上确界**并记为$b=\sup E$.

对两个元$x, y\in X$，记

$$x\wedge y=\inf\{x, y\},\quad x\vee y=\sup\{x, y\}.$$

对于有限个元$x_1, x_2, \cdots, x_n\in X$，记

$$\bigwedge_{k=1}^{n} x_k=\inf\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

$$\bigvee_{k=1}^{n} x_k=\sup\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

对于X的元族$\{x_j\}_{j\in J}$，使用符号$\bigwedge\limits_{j\in J} x_j$，$\bigvee\limits_{j\in J} x_j$.

如果J是自然数集$\mathbf{N}$，也使用符号$\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，$\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

可以验证下面关于有序集X的子集的界的命题.

(i) 如果存在$a=\inf E$和$b=\sup E$，那么$a\leqslant b$.

(ii) 如果$E_1\subset E_2$并且存在$a_1=\inf E_1$和$a_2=\inf E_2$，那么$a_1\geqslant a_2$；如果存在$b_1=\sup E_1$和$b_2=\sup E_2$，那么$b_1\leqslant b_2$.

(iii) 设对任一$j\in J$，有$x_j\leqslant y_j$；如果存在$x'=\bigwedge\limits_{j\in J} x_j$和$y'=\bigwedge\limits_{j\in J} y_j$，那么$x'\leqslant y'$；如果存在$x''=\bigvee\limits_{j\in J} x_j$和$y''=\bigvee\limits_{j\in J} y_j$，

1）即在下界的集合中存在最大元.

2）即在上界的集合中存在最小元.

那么 $x'' \leqslant y''$.

(iv) 如果存在 $a=\sup A$ 和 $b=\inf B$, 并且对任一 $x\in A$ 和 $y\in B$ 有 $x\leqslant y$, 那么 $a\leqslant b$.

(v) 设 $E=\bigcup_{j\in J}E_j$; 如果存在 $a=\inf E$ 以及对任一 $j\in J$ $a_j=\inf E_j$, 那么 $\bigwedge_{j\in J}a_j$ 存在并有等式

$$a=\bigwedge_{j\in J}a_j;$$

如果存在 $b=\sup E$ 以及对任一 $j\in J$ $b_j=\sup E_j$, 那么 $\bigvee_{j\in J}b_j$ 存在并且

$$b=\bigvee_{j\in J}b_j.$$

有序集 X 称为**右定向的**, 如果对任意一对元 $a, b\in X$, 存在一个元 $c\in X$, 使得 $a\leqslant c$, $b\leqslant c$. 有序集 X 称为**左定向的**, 如果对任意一对元 $a, b\in X$, 存在 $c\in X$, 使得 $c\leqslant a$, $c\leqslant b$.

同时为右定向和左定向的集称为**双定向的**.

右定向集简称为**定向集**.

有序集 X 称为**格**(或**可格集**), 如果对任意一对元 $x, y\in X$, 存在 $x\wedge y$ 和 $x\vee y$.

在一个格中, 对任意有限多个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 存在 $\bigwedge_{j=1}^{n}x_j$ 和 $\bigvee_{j=1}^{n}x_j$.

格 X 称为**相对完备的**, 如果对任意囿于下的集 $A\subset X$, 存在 $\inf A$, 并且对任意囿于上的集 $B\subset X$, 存在 $\sup B$.

有序集 X 称为**全序的**, 如果对任意一对元 $x, y\in X$, 必有 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$.

有序集 X 称为**良序的**, 如果任意非空子集 $A\subset X$ 都有最小元.

下面的命题是我们所熟知的:

Zorn 定理 *设 X 是这样的有序集, 它的任一全序子集囿于*

上，那么对任一元 $x_0 \in X$，存在一个极大元 $x_1 \in X$，使得 $x_0 \leqslant x_1$。

§2. 拓扑概念

2.1 拓扑空间

我们说在集 X 上给定了一个拓扑 τ，如果确定了 X 的一个具有下面性质的子集族 $\mathscr{J}$：

(i) $\phi, X \in \mathscr{J}$；

(ii) 如果 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是 $\mathscr{J}$ 中集的一个(非空)族，并且

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j,$$

那么 $A \in \mathscr{J}$；

(iii) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $\mathscr{J}$ 中的集并且 $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$，那么 $A \in \mathscr{J}$.

集 $A \in \mathscr{J}$ 称为开集.

给定了一个拓扑 τ 的集 X 称为拓扑空间. 这时，X 中的一个元 x 又称为空间 X 中的一个点.

设 X 是一个拓扑空间.

设 $x \in X$，集 $E \subset X$ 称为 x 的邻域，如果存在一个开集 A，使得 $x \in A$ 并且 $A \subset E$.

集 A 是它的每一个点的邻域当且仅当 A 是一个开集.

点 x 的所有邻域的集 $\mathscr{V}_x$ 具有下面的性质：

(i) 如果 $A \in \mathscr{V}_x$，那么 $x \in A$；

(ii) 如果 $A \in \mathscr{V}_x$ 并且 $A \subset B$，那么 $B \in \mathscr{V}_x$；

(iii) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{V}_x$ 并且 $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$，那么

$$A \in \mathscr{V}_x;$$

(iv) 对任一 $E \in \mathscr{V}_x$，存在 $A \in \mathscr{V}_x$，使得对任一 $y \in A$，有 $E \in \mathscr{V}_y$.

反之，设X是某个集，并且对每个元 $x\in X$ 给定了X的一个具有性质 1)—4) 的子集族 $\mathscr{V}_x$，那么在X上存在且仅存在一个拓扑 τ，按照这个拓扑，$\mathscr{V}_x$ 就是点x的邻域的集. 这个拓扑可以这样得到，取所有这样的集 $A\subset X$ 作为开集族 $\mathscr{J}$：对任一 $x\in A$ 都有 $A\in\mathscr{V}_x$.

因此一个集X上的拓扑τ也可以借助邻域的集来定义.

设X是一个拓扑空间，x是X的一个点，并且 $\mathscr{V}_x$ 是x的邻域的集. 子集 $\mathscr{W}_x\subset\mathscr{V}_x$ 称为x的邻域基(或基本邻域系)，如果对任一 $V\in\mathscr{V}_x$，存在 $W\in\mathscr{W}_x$，使得 $W\subset V$.

现设X是某个集，并且对任一 $x\in X$ 给定了X的一个(非空)子集族 $\mathscr{W}_x$，具有性质：(1) 对任一 $W\in\mathscr{W}_x$ 有 $x\in W$；(2) 对任意的 W_1，$W_2\in\mathscr{W}_x$ 存在 $W_3\in\mathscr{W}_x$ 使得 $W_3\subset W_1\cap W_2$；(3) 如果 $W\in\mathscr{W}_x$，那么存在 $V\in\mathscr{W}_x$，使得对任一 $y\in V$ 有 $W\supset W_y$ 对某个集 $W_y\in\mathscr{W}_y$.

对任一 $x\in X$，用 $\mathscr{V}_x$ 表示X的具有这样性质的子集E的全体：存在 $W\in\mathscr{W}_x$ 使得 $W\subset E$. 那么按照某个拓扑 τ，$\mathscr{V}_x$ 是点x的邻域的全体，而 $\mathscr{W}_x$ 是x的邻域基.

设X是一个拓扑空间.

集 $B\subset X$ 称为闭的，如果集 $A=\complement B$ 是开的.

由这个定义得出闭集具有下面的性质：

(i′) ϕ 和X是闭集；

(ii′) 如果 $\{B_j\}_{j\in J}$ 是任一闭集族并且 $B=\bigcap\limits_{j\in J}B_j$，那么$B$是闭的；

(iii′) 如果 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是闭集并且 $B=\bigcup\limits_{j=1}^{n}B_j$，那么$B$是闭的.

设A是拓扑空间X的一个子集. 点 $x\in A$ 称为A的**内点**，如果A是点x的一个邻域. 一个集A的所有内点的集称为A的**内部**，记为 $\mathrm{int}\,A$. 集 $\mathrm{int}\,A$ 是含于A内的最大开集；它是含于A内的所有开集的并. 一个集A是开的，其充分必要条件是

$$A = \operatorname{int} A.$$

点 $x \in X$ 称为集 A 的触点，如果对 x 的任一邻域 V，有 $V \cap A \neq \phi$. 集 A 的所有触点的集称为 A 的闭包（或附着），记为 $\bar{A}$. 集 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集；它是包含 A 的所有闭集的交. 一个集 A 是闭的，充分必要条件是 $A = \bar{A}$.

点 $x \in X$ 是集 A 的聚点，如果 x 的任一邻域 V 都含有 A 的一个异于 x 的点. 任意一个聚点都是一个触点. A 的任意一个不属于 A 的触点都是聚点. 如果 $x \in A$ 不是 A 的聚点，那么称 x 为 A 的孤立点.

集 A 称为处处稠密(或在 X 中稠密)，如果 $\bar{A} = X$.

设 X_0 是 X 的一个子集，那么族 $\mathscr{J}_0 = \{A \cap X_0 | A \in \mathscr{J}\}$ 具有本节开头所述的性质 (i)，(ii)，(iii)，所以在 X_0 上定义了一个拓扑 τ_0. 称 τ_0 为 τ 在 X_0 上的诱导拓扑（或 τ_0 是 τ 在 X_0 上的迹)，而 X_0 称为 X 的拓扑子空间.

在拓扑空间 X 中，集 A 称为疏的，如果 $\operatorname{int} \bar{A} = \phi$. 一个集称为弱的或 (Baire) 第一纲的，如果它是可数个疏集的并. 不是第一纲的集称为 (Baire) 第二纲的.

根据定义，一个拓扑空间 X 的点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 收敛到一点 x，而 x 称为序列的极限，是指对 x 的任一邻域 V，存在一个自然数 n_0，当 $n > n_0$ 时有 $x_n \in V$ 我们记为 $x_n \to x$ 或 $x = \lim\limits_n x_n$.

设 X 是某个集并且 τ_1，τ_2 是 X 上由(开)子集族 $\mathscr{J}_1$，$\mathscr{J}_2$ 所定义的二个拓扑. 如果 $\mathscr{J}_1 \subset \mathscr{J}_2$，那么称 τ_1 弱于 τ_2（或 τ_2 强于 τ_1）并记为 $\tau_1 \leqslant \tau_2$.

如果 $\tau_1 \leqslant \tau_2$，又称 τ_2 精于 τ_1（或 τ_1 粗于 τ_2)，如果 $\tau_1 < \tau_2$（即 $\tau_1 \leqslant \tau_2$ 并且 $\tau_1 \neq \tau_2$)，那么又称 τ_2 严格精于 τ_1.

如果对于拓扑 τ_1，τ_2，有 $\tau_1 \leqslant \tau_2$ 或 $\tau_2 \leqslant \tau_1$，则称这两个拓扑是可比较的.

$\tau_1 \leqslant \tau_2$ 的充分必要条件是对任一 $x \in X$，x 在拓扑 τ_1 中的任一邻域也是 x 在拓扑 τ_2 中的一个邻域.

现设 X 是一个集并且 $\mathscr{G}$ 是 X 的子集的一个族. 设 $\mathscr{G}'$ 是