(美) P·Lax　S·Burstein　A·Lax 著

微积分及其应用与计算

第一卷　第一册　人民教育出版社

微积分及其应用与计算

第 一 卷

第 一 册

P. Lax
[美] S. Burstein 著
A. Lax

唐述钊 黄开斌 滕振寰 黄禄平 译
卢绮龄 苏煜城 黄 敦 林应举
胡祖炽 何旭初 黄 敦 卢绮龄 校

人民教育出版社

内容提要

本书是由P.拉克斯，S.柏斯坦，A.拉克斯等三位美国数学家合写的。由北京大学、南京大学、南京师范学院的几位同志合译。译本分两册出版。第一册包括实数、函数、微分、积分、增长与衰减等前五章。第二册包括概率论及其应用、旋转和三角函数、振动、群体总数的演变和化学反应等后四章及若干 FORTRAN 程序及其使用说明。

本书可供应用数学、计算数学专业的师生参考，也可供有关人员阅读。

微积分及其应用与计算

第 一 卷

第 一 册

P. Lax

[美] S. Burstein 著

A. Lax

唐述钊 黄开斌 滕振寰 黄禄平
卢绮龄 苏煜娥 黄　敦 林应举 译

胡祖炽 何旭初 黄　敦 卢绮龄 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.5 字数 230,000

1980 年 8 月第 1 版 1982年5月第2次印刷

印数 2[illegible],501—31,500

书号 13012·0496 定价 0.84 元

翻译说明

Peter Lax 等三位美国数学家合写的 Calculus with Applications and Computing 第一卷是西德 Springer 出版公司出版的《大学数学教材》之一，1976 年出版.

这本微积分教材取材和传统的微积分教材不同，特别强调了微积分的应用. 换句话说，这本书讲解了怎样把实际问题变成微积分的问题和怎样用微积分解得的答案阐述实际现象. 另一方面这本书还突出了用数值计算方法解出问题的数值答案. 其他特点作者已在序言中谈得很多这里不再重复. 我们觉得翻译出来可供应用数学、计算数学的教师和学生参考.

本书由北京大学、南京大学、南京师范学院的几位同志合译. 参加翻译的有：唐述钊同志(第 1,6 章)，黄开斌同志(第 2,9 章)，滕振寰同志(第 3 章)，黄禄平同志(第 4 章)，卢绮龄同志(第 5 章)，苏煜城同志(第 7 章)，黄敦同志(第 8 章)，林应举同志(FORTRAN 程序及其使用说明). 何旭初同志、黄敦同志看了部分译稿，卢绮龄同志、胡祖炽同志校阅了全书.

译文一定还有不妥当甚至错误之处，欢迎读者批评指正.

1980 年 5 月 1 日

序

目前数学在非常广泛的战线上的研究蓬蓬勃勃，而且成就辉煌. 但是本书作者仍然觉得还没有充分发挥人们的数学才华，以加深数学与其他科学和学科的相互关系. 这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的. 纠正这种不平衡是一种教育工作，这必须从大学课程一开始就做起. 微积分是最适合从事这项工作的一门课程. 在微积分里，学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言，可以直接学到科学是深远地影响着数学发展的数学思想的源泉. 最后，很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案.

我们写这本书的目的是要强调微积分和科学的这种相互关系. 为此，我们将相互关联的章节用来讨论某个(或几个有关的)科学课题，让读者体会到微积分的概念是怎样用来表达科学的基本定律，以及怎样用微积分的方法演绎出基本定律的各种推论的. 这样学生可以看到微积分在有意义的任务中发挥着作用. 传统的课本经常很象一个车间的工具帐，只载明这儿有不同大小的锤子，那儿有锯子，而刨子则在另外一个地方，只教给学生每种工具的用法，而很少教学生把这些工具一起用于构造某个真正有意义的东西.

求数值解答是数学应用中一个很重要的部分. 即使我们的目的是要定性地而不是定量地理解某个问题，计算一个精心挑选的特殊情况所起到的作用，可以和具有决定性的实验一样能肯定一个旧的推测或指出另一个新推测. 再则，设计出一种有效的数值

方法就是微积分思想的一项优秀应用．本书中数值方法是当作微积分的有机组成部分来介绍的，而不是只作为现成办法附在后面作为补充．

几乎本书中所有的数值例子和习题都可以通过有程序的袖珍计算机的帮助算出来．某些题目不只是输出少数几个数字而是必须用表格或图形显示以便从中提炼其主要特性，对这些题目则提倡用计算机．

由学生自己完成的数值例子，不论是单独完成的或是小集体完成的，其教育价值无论怎样估计也不会过高．一个好学生很可能胜过他的教员，并且是更具有进取心的计算机程序员，这会使他试用他自己的作法，而不被他的课本或教员所束缚．我们更欢迎学生主动地参加计算，这比仅仅是省心地接受知识要更好些．

关于什么是微积分服务的目的，我们的很根本的看法表现于对微积分的一些纯数学概念的批判性的修改．我们的处理是严格的，而不是学究式的．一旦我们觉得应有一个改变，我们就毫不犹豫地和传统决裂．我们在下面的逐章介绍中指出我们在处理中的这类改变．

第一章讲实数．我们教导学生用三种相辅相成的方法来思考：(i)把实数看成合于通常的代数法则诸如加法、乘法等的东西；(ii)把实数看成数轴上的点；(iii)把实数看成无穷小数．

无穷小数是抽象的概念，人们只能看到它的一些影子，这些影子不过只是在计算器的寄存器或打印结果的那类有限位的数字．把实数看作无穷小数的巨大优点在于我们一眼就能识别两数是否相近，而收敛序列的概念可以不依赖用希腊字母去解释，而只要指明当一个序列中的各项有越来越多位数字相同时序列就收敛．

关于函数的第二章中，我们强调函数在描述两种数量的关系中的作用．我们解释，把非常简单的函数反复地用复合、相加、相

乘、反演等等就可以构造出复杂的函数．我们给连续性下的定义是在一个给定区间上的一致连续性，这远比在每点上的连续性概念要合适些．书中我们定义一个函数序列的一致收敛性，这是一个自然的、有用的而且是初等的概念，但是维多利亚式的*过于拘谨的人往往不讲这些而只对成熟的听众才讲．我们阐述用于计算一个函数的算法的概念，并给出计算同一函数可有不同算法的例子，其中一种算法比另一种既快且更准确．

在讲微分（这里"微分"指"求导数"，英文原字为 differentiation——译者注）的第三章中，导数是作为差商的一致极限来定义的．这使得导数在某区间上为正的函数是一个增函数这件事是显然的．这一见解贯穿在全书中并挑起重大的担子．本章中，用它证明中值定理、泰乐定理，并表述极大极小的性质．我们给出导数概念的许多解释，并且专用一节讲一维力学．

在第四章中，定积分是由两个得到充分说明而目的明确的基本性质来定义．我们证明积分的一切性质都可由这两条导出，这包括积分和导数的关系，用和数来逼近积分，以及更换变量与分部积分等积分法则．这些技巧可把一个已给的积分换成另一个积分．我们向学生说明，虽然在少数特例中，使用这些技巧可以把一个积分明显地用已知函数表示出来，但在大多数情形并非如此．不过选择并更换变量或分部积分做得越高明，就可以把一个积分变成另一个积分，而对后者作数值逼近将远比对原来的积分要容易．很好的介绍并运用了辛卜生公式．

在第五章中，指数函数是作为模拟增长而定义的．指数函数的函数方程从这模型导出并由它得出微分方程．我们着重指出指数函数的一切性质，包括我们能够求它的精确的逼近，都从这个微

* "维多利亚式的"指英国维多利亚女王时代（1837—1901）的陈腐伪善等。

分方程推导出来．对数函数是作为指数函数的反函数来定义的，同时探讨了它的通常性质．

第六章是概率论的引论，既讲离散的也讲连续的．定义了概率分布的信息内容、推导了Gauss误差定律并应用于扩散过程．

第七章用复数算术推导了正弦、余弦的加法公式．推导了正弦函数、余弦函数的微分方程．我们着重讲正弦和余弦的一切性质都可从这些微分方程推出．这里有关于用复数来讲二维力学的简短讨论．引力运动的基本事实都推导了．

在讨论振动的第八章里，重点放在能量守恒定律．这里对非线性振动作了初步的但不是显然的讨论，这个讨论是理论与数值试验的结合．

最后一章是关于群体总数的演变的，这里讨论支配群体总数增长的微分方程以及化学反应的微分方程．我们着重说明解的性质都可以直接从微分方程本身得来而不必基于微分方程解的明显表达式，不论这些性质是定性的还是定量的．

我们讲授这个材料的经验使我们深信这本教材包含了比在两个学期中能教完的内容还多．下面是向纽约大学Washington Square学院的一个程度中等的大一班级成功地讲授过的内容．

第一学期．第一章全部并包括无穷和；第二章不包括多元函数和部分分式；第三章不包括泰乐定理；第四章略去了关于积分存在性那一节，但包括了广义积分．

第二学期．第五章包括计算指数函数与对数函数的数值方法．整个第六章包括关于扩散的一节、第七章“等距性”一节未讲，复值函数也只接触了一下．除了非线性振动以外的整个第八章．在第九章中，我们建议或者讲人口动力学，或者讲化学动力学而不必两者都讲．我们希望着重指出六、八、九三章都是其它各章的独立的应用．

第一学期里差不多用了一周来进行计算的速成课程.

第二卷还在准备中. 它将用第一卷中处理一元函数的同样精神处理多元函数. 一开始就用向量.

很高兴地感谢Courant研究所及别处的朋友和同事们对手稿各部分的批判地审阅和一般的好心劝告. 特别感谢Robert Walker对我们的第一稿作了总的评论，该稿是1972年Courant研究所讲义丛刊中的一册. 我们还感谢Paul Gans批判地审阅了有关化学动力学那一节. 作者之一(SB)还谢谢他的爱人Elaine在准备本书并全力以赴的几个月中的耐心和谅解. 最后对Gloria Lee的熟练打字十分感谢.

每一节都在班上试讲过，在形成最后版本时考虑了学生的反应. 我们感谢他们的合作和热情.

目　录

第一章 实 数

对于数至少有三种不同的考虑方法，每一种都是有价值的而且几乎都是不可缺少的．我们可以从代数上、几何上去考虑或者把数看成是无穷小数．我们将顺次来讲它们．

1.1 数的代数；复习

所有数的全体是能用叫做加与乘两种方法进行结合的符号的集合．两种运算都是可交换的与可结合的，并且对于加法，乘法是可分配的．用符号 a, b, c 表示任意三个数，我们的法则是：

交换律
$$a+b=b+a,$$
$$ab=ba,$$

结合律
$$(a+b)+c=a+(b+c),$$
$$a(bc)=(ab)c,$$

分配律
$$a(b+c)=ab+ac.$$

0 与 1 两个数的特殊性质是任一个数加 0 与乘以 1 都不变．每个数 c 有其相反的数 $-c$，而除 0 外的每个数 c 都有其倒数 $1/c$，也可记为 c^{-1}．

我们将采用通常的记号

$$a+(-b)=a-b,$$

与

$$ab^{-1}=\frac{a}{b}=a/b.$$

相反数与倒数有性质：

$$a+(-a)=0,$$

与
$$a\cdot\frac{1}{a}=aa^{-1}=1.$$

大家熟知的法则还有

$$-(a+b)=-a+(-b),$$
$$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1},$$
$$(-a)b=-(ab).$$

它们都能由可交换性质与可结合性质以及可分配性质推出，但是因为我们对分析其逻辑的相互关系并不感兴趣，所以我们只是扼要地重述将用到的数的所有性质.

除零以外，所有的数可分成两类：正数与负数. 如 a 是正数，$-a$ 是负数，反之亦然. 在 a 与 $-a$ 两数之中，正的那一个称为 a 的绝对值，记为 $|a|$. 0 的绝对值定义为 0.

正数的和、积与倒数都是正数. 我们称这个事实为恒正性的基本性质.

数的比较是与数的加与乘同样地重要. 我们可定义小于关系如下：a 小于 b 就是说 $(b-a)$ 是正的，可写为

$$a<b \text{ 或 } b>a.$$

命题 $b>a$ 读做"b 大于 a"，其意义与"a 小于 b"相同.

符号

$$a\leqslant b \text{ 或 } b\geqslant a$$

的意义是 a 不大于 b，即 $a<b$ 或 $a=b$.

不等式在微积分中起核心的作用，学习并熟练地掌握它们是重要的. 将不断地用到下列一些初等的法则：

1. 如 $a<b$ 且 $b<c$ 则 $a<c$.

这称为 $<$ 的传递性.

2. 如 $a<b$ 且 $c<d$，则 $a+c<b+d$.

这称为不等式的加法.

3. 如 $a<b$ 且 p 为正数, 则 $pa<pb$.

这称为用一个正数乘不等式.

4. 如 a 与 b 都是正数且 $a<b$, 则 $1/a>1/b$.

这称为颠倒一个不等式.

所有这些组合不等式的法则都是由恒正性的基本性质推出的. 注意 $c-a$ 是两个正数 $b-a$ 与 $c-b$ 之和, 因而它是正的, 这便推出了传递性. 因为 $(b+d)-(a+c)$ 是 $b-a$ 与 $d-c$ 之和, 由于是正数之和故是正的, 从而不等式的加法成立. 不等式的乘法法则根据于 $pb-pa=p(b-a)$, 它是两个正数之积因而为正. 最后, 颠倒不等式的法则是由用正数 $1/ab$ 乘不等式 $a<b$ 而得到的.

两个不等式如由每一个可推出另一个便称为是等价的. 例如, 不等式

$$a<b \text{ 与 } a+c<b+c$$

是等价的. 同样,

$$a<b \text{ 与 } pa<pb, p>0$$

是等价的.

习　　题

1.1. 证明, 如 $a<b$, 则 $-a>-b$.

1.2. (a) 证明任一数的平方不能为负.

(b) 证明对任二数 a 与 b,

$$0\leq a^2-2ab+b^2.$$

(c) 证明, 对任二数 a 与 b

$$2ab\leq a^2+b^2.$$

1.3. 验证习题 1.1, 1.2(b) 与 1.2(c), 令

(a) $a=3$, $b=-5$.

(b) $a=-7,\ b=-2.$

1.4. (a) 下式当m取什么值时为真：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m<10^{-4}?$$

(b) 要使

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m<10^{-k},$$

m要多大?

1.5. 证明下列诸不等式：

(a) $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$，如 $b\geqslant a>0$,

(b) $a^2<b^2$，如 $b>a>0$,

(c) $a+a^{-1}\geqslant 2$，$a>0$,

(d) $\frac{a+b}{2}\geqslant(ab)^{1/2}$，$a, b>0$,

(e) $a^2\geqslant 2a-1$.

1.6. 对于所有满足 $0<a<b<1$ 的 a, b，下列不等式中哪些是成立的?

(a) $ab>1$,　　(b) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,

(c) $\frac{1}{b}>1$,　　(d) $a+b<1$,

(e) $a+b>1$,　　(f) $a-b<1$,

(g) $a^2<1$,　　(h) $a^2+b^2<1$,

(i) $a^2+b^2>1$,　　(j) $a^2+b^2>2$,

(k) $|a-b|<1$,　　(l) $|b-a|>1$.

1.2 数轴

在这一节中我们讲考虑数的一种几何方法．我们把数表示成一直线上的点(参看图 1.1)．用O标记的点称为原点．数轴的重要性在于使各数之间的某些关系以及对它们作的某些运算易于形象化．例如，a与b相加可这样描述：移动数轴使得O点运动到原先a所在的地方，那末点b就运动到原先是$a+b$的地方(参看

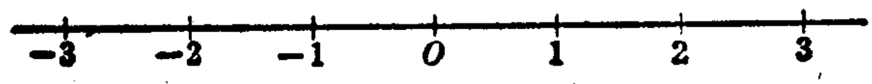

图 1.1

图 1.2).

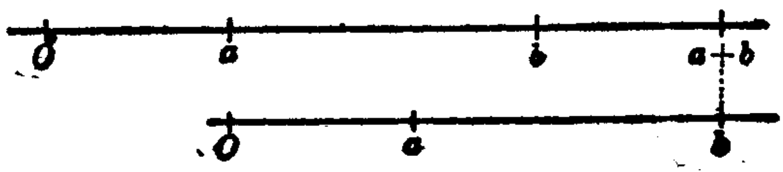

图 1.2

乘积的自然的几何表示为面积.

不等式在数轴上尤其易于形象化：$a<b$ 意即 a 是在 b 的左边. 特别是，所有的负数都在原点的左边，所有的正数都在其右边.

把一点反射到原点的另一边就得到一个数的相反数，于是，如用点 A 表示一数 a (参看图 1.3，在那里 $a<0$)，它的镜象 A'(在 O 的另一边，且距 O 等远)表示 $-a$.

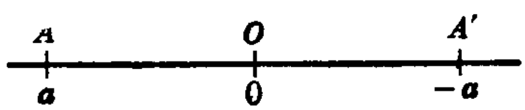

图 1.3

图 1.4

一个数 x 是在两数 a 与 b 之间，如果它比其中的一个大而比另一个小. 这个关系在数轴上容易想象，即 a 与 b 是包含 x 于其内部的一个区间的两个端点(参看图 1.4，在那里 $a<b$，因而 $a<x<b$).

设 $a<b$，所有在 a 与 b 之间的点的集合定义为开区间 (a, b)，即满足

$$a<x<b$$

的一切 x 的集合. 闭区间 $[a, b]$ 是由开区间 (a, b) 添上两个端点所

组成的，即满足

$$a \leqslant x \leqslant b$$

的一切 x 的集合．半开（或半闭）可类似地定义，且记为 $(a, b]$ 与 $[a, b)$．

一个数的绝对值是它到原点 O 的距离．b 到 a 的距离是 $|b-a|$．因此以 a 与 b 为端点的开区间或闭区间的长度是 $|b-a|$．在几何上很明显：如 x 与 y 两个数在长度为 l 的区间内，那末它们的距离不超过 l：

$$|x-y| \leqslant l.$$

下列三角不等式既简单又重要：

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

读者容易证明仅当 x 与 y 均为正、均为负或当一个为 0 时，等号成立．

我们回想有理数的概念，它定义为两个整数之商：

$$r=\frac{p}{q}, \qquad q \neq 0.$$

容易在数轴上直观的表示：固定 q 为任一正整数，又令 p 遍取所有的整数，那末 $\frac{p}{q}$ 这些数把数轴分成一些长度为 $1/q$ 的区间．每个实数 x 位于这些区间中的一个区间．于是，给定任一正整数 q，对于每一个实数 x 有一个整数 p 使得

$$\frac{p}{q} \leqslant x<\frac{p+1}{q}.$$

这个不等式可改写成等价的形式：

$$\frac{p}{q} \leqslant x<\frac{p}{q}+\frac{1}{q}.$$

从所有的三个数都减去 p/q，我们得到

$$0 \leqslant x-\frac{p}{q}<\frac{1}{q},$$