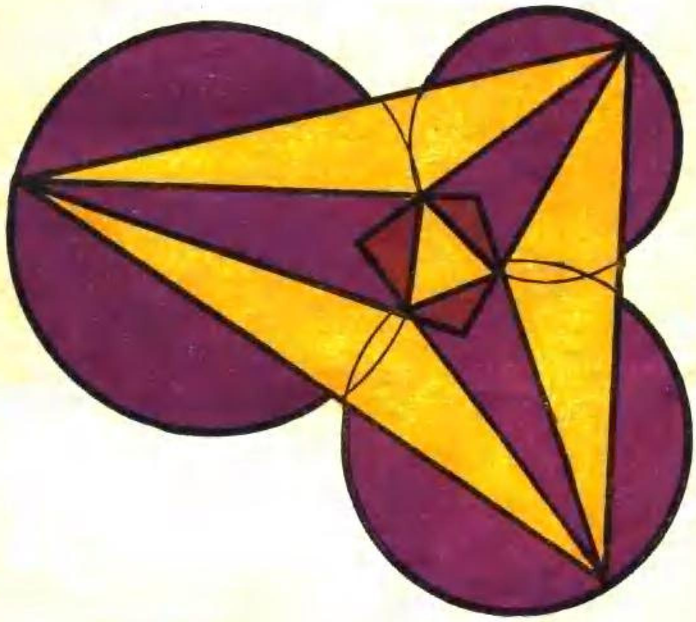
美国新数学丛书

几何学的新探索

H.S.M.考克塞特　S.L.格雷策　著



北京大学出版社

几何学的新探索

H.S.M. 考克瑟特
S.L. 格雷策 著

陈维桓 译

北京大学出版社

几何学的新探索

H.S.M.考克瑟特
S.L.格雷策　著

陈维桓　译

责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
通县燕山印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　7.375印张　150千字
1986年1月第一版　1986年1月第一次印刷
印数：00001—15,000册
统一书号：13209·120　定价：1.50元

內 容 提 要

本书的主要目的是利用变换的观念重新探索我们的先辈所钟爱的初等几何学的领域；这种观念有助于增长读者对几何的理解力。本书把几何学与其它的数学分支联系起来了。特别是，第五章把读者引导到反演几何学，它在分析学中有重要的应用；第六章介绍了圆锥曲线，特别强调焦点、离心率的概念，这些概念显然与彗星、行星、人造卫星的轨道的研究有关。全书由浅入深地把读者从十分简单的概念逐步带到各论题的核心。全书给出的习题既包括了在教科书范围内的问题，也包括了一些对于读者来说较为困难的问题。

H.S.M.Coxeter and S.L.Greitzer

GEOMETRY REVISITED

作 者 简 介

考克瑟特(H.S.M.Coxeter)生于伦敦，1929年在剑桥大学获得硕士学位，1931年获得哲学博士学位，从1931年到1935年，他是剑桥三一学院的成员；此后，他一直是加拿大多伦多大学教授。

考克瑟特教授从1949年到1958年编辑Canadian Journal of Mathematics. 他是许多国家数学会的成员，是英国皇家学会的会员，一直是美国数学协会的副主席。

考克瑟特教授在结晶学，群论和几何学的联系及其它数学领域有过贡献，他还写过好几本书。其中有：The Real Projective Plane(1955), Non-Euclidean Geometry(1957), Introduction to Geometry(1961), Regular Polytopes(1963)和Projective Geometry(1964)。

格雷策 (Samuel L.Greitzer)在1906年从俄国奥德萨移民到美国。他在1927年毕业于纽约的City College, 在Yeshiva大学获得哲学博士学位。

格雷策博士有25年以上的高级中学数学教学的经验，他在Yeshiva大学、布鲁克林的综合技术学院、哥伦比亚大学的教师学院及School of General Studies教过书。现在是Rutgers大学的副教授。

格雷策博士是Topography and Map Reading一书的作者，也是好几本分析和代数方面的书籍的协作者，他在几何学和应用数学方面发表过论文。

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学．入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大．一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步．

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱．好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐．

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题．这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用．内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想．

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌．

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径．

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册。有些书早已脱销。"新数学丛书"编委会，特别是Anneli Lax 教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵　张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y.10012。

编辑者

目　　录

序　言

谁看不起欧氏几何，谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡。

H.G.弗德

中学的数学课程通常包括仅有一年的平面几何教程，或许还包括称作十年级数学的几何学及初等解析几何学教程。在学生的中学阶段早期开设的这门课通常是他接触这个主题的仅有的场合。与此相反，喜爱数学的学生却有机会学习初等代数、高等代数，甚至于更高深的近世代数。因此，自然可以料到会有偏爱代数而轻视几何的倾向。于是，弄糊涂的热心人引导学生认为几何学处在“数学的主流”之外，分析学和集合论可能会取而代之。

几何学在学校的课程设置中地位比较低，或许是因为教育者不熟悉几何学的本质以及它所取得的成就。几何学的进展包括许多漂亮的结果，例如卜立安香定理（§3.9）、费尔巴哈定理（§5.6）、彼得逊-司各特定理（§4.8）和莫莱定理（§2.9）。从历史上说，人们一定会记得，欧几里得是为准备研究哲学而深思熟虑的人们著作的。直到我们现在这个时代，讲授几何学的一个主要理由仍旧是它的公理方法被认为是学习演绎推理的最好的导论。自然，为了有成效的教育目的，着重强调了形式的方法。但是，无论是古代的、还是现代的几何学家都会毫不踌躇地采用他们所中意的那些不太正统的方法。如果三角学，解析几何学，或者向量方法能够用得上，则几何学家就会拿过来用。于是几何学家发明了自己的优雅而有力的现代技巧。采用变换（如旋转、反射、位

似变换)的方法就是这样一种技巧，它们简化了某些定理的证明，又把几何学与结晶学、美学联系起来了。几何学的这个“有生气的”方面是第四章的主题。另一个现代的技巧是反演几何学的方法，它与点和圆打交道，又把直线看作是经过“无限远点”的圆。在第五章可以领略到它的一些情趣。第三种技巧是射影几何的方法，它完全不考虑距离和角度，而强调点、线（整条的无限长的直线，不是线段）之间的类比。在那里，不仅任意两点可用一条直线联结，而且任意两条直线必相交于一点；平行的直线看作是公共点在无穷远直线上的直线。在第六章披露了这方面的若干内容。

几何学仍然具有前一代教育家对它论述过的所有那些优点，在自然界还有几何学有待人们去认识和了解。几何学(尤其是射影几何学)仍是引导学生去学习公理化方法的出色的手段，它依旧具有它一直拥有的那种优雅的魅力，其结果的美妙始终没有减退过。而且，对于科学家和应用数学家来说，几何学变得比过去任何时候都更有用，更有必要。人造卫星轨道的形状和时-空连续统的四维几何学就是这样的例子。

几个世纪以来，几何学一直在成长着。新的概念、新的处理方法不断地在发展：学生们会发现这些概念是富有挑战意味的，是令人惊讶的。让我们采用与我们的目标最适应的方法重新探索欧氏几何，由我们自己来发现一些比较新的结果。或许我们会打消一点在初次接触几何学时所产生的惊异和畏惧。

作者特别感谢安纳利·拉克斯(Anneli Lax)博士耐心的协助和许多有益的建议。

H.S.M.考克瑟特　S.L.格雷策

1967年于多伦多和纽约

第一章　与一个三角形有关的点和线

几何学的浩瀚的文献比算术和代数的加在一起还要多，其广泛的程度至少和分析的文献相当，这是比数学的其它部门更有意思的、然而是半遗忘的东西组成的丰富的宝库，但是匆忙的一代人无暇去欣赏它。

E.T.贝尔

本章的目的是回忆某些被贝尔(Bell)博士称做“半遗忘”的东西，导出若干自欧几里得之后发展而来的新定理，然后把我们的发现用于饶有意味的情形。我们将考虑一个任意的三角形，及其最闻名的有关的点和线：外心、中线、重心、角平分线、内心、傍心、高线、垂心、欧拉线和九点圆圆心。

角平分线自然导致关于斯泰纳-莱默斯(Steiner-Lehmus)定理的讨论；一百多年来认为该定理是很难证明的，尽管从我们现在的观点来看，它实在是相当容易的。

最后，从一个三角形及一般位置的点 P 出发，我们得到以 P 向已知三角形各边引垂线的垂足为顶点的新的三角形。这种观念会导致若干有趣的进展，其中有一些要放到下一章去讨论。

§1.1　扩充的正弦定律

正弦定律是一条常用的三角学定理。遗憾的是，在教科

书中，它常常以不完全的形式出现，不如扩充的正弦定律那样有用，因此我们来证明所要求形式的正弦定律.

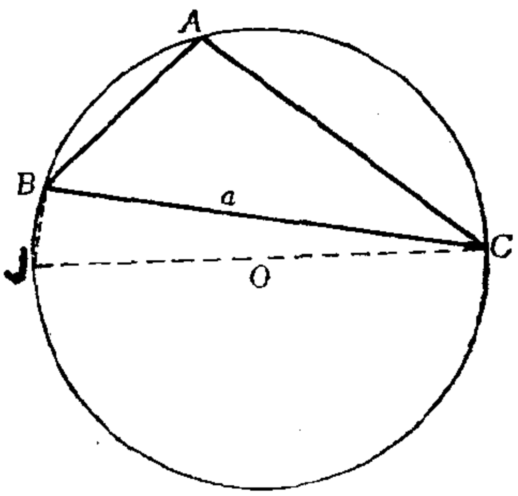


图 1.1A

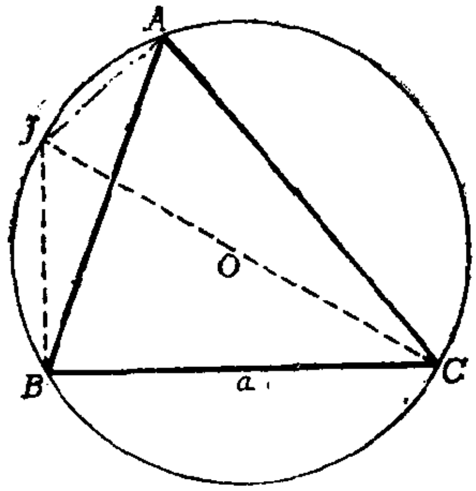


图 1.1B

我们从$\triangle ABC$着手(以惯用的方式来标记)，作它的外接圆，其圆心为O，半径是R个单位长，如图1.1A和图1.1B所示。作直径CJ和弦BJ①。在所画出的两种情形中，因为$\angle CBJ$内接于半圆周，故$\angle CBJ$是直角。因此，在这两个图中都有

$$\sin J = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}.$$

在图1.1A中，$\angle J = \angle A$，这是因为它们内接于同一个圆弧。在图1.1B中，因为$\angle J$和$\angle A$是一个圆内接四角形的对角，故它们是互补的，即$\angle J = 180° - \angle A$。但是，由于$\sin\theta = \sin(180° - \theta)$，故在这两种情形都有$\sin J = \sin A$。因此，$\sin A = a/2R$，即

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

① 在本书中，以X和Y为端点的线段的长度简记为XY。

把同样的论证用于 $\triangle ABC$ 的另外两个角，则得

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

综合上述结果，我们可以把扩充的正弦定律叙述成：

定理1.1.1 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为R，则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

我们约定，图形的面积用该图形的名称加上圆括号来表示。例如，(ABC)表示 $\triangle ABC$ 的面积，$(PQRS)$ 表示四边形 $PQRS$ 的面积。

习　题

1. 试证①：对于任意的三角形 ABC($\angle B$ 或 $\angle C$ 可以是钝角)有

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

利用正弦定律推导加法定理：

$$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B.$$

2. 在任意一个三角形 ABC 中，

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)$$
$$+c(\sin A-\sin B)=0.$$

3. 对任意一个三角形 ABC，$(ABC)=abc/4R$.

4. 设 p 和 q 是经过A点，且分别和 BC 相切于点B和点C的两个圆的半径，则 $pq=R^2$.

---

① 在以后的习题中，一律省去“试证”等字眼。因此，当一道习题写成定理的形式时，就是要求给出证明。

§1.2 塞瓦定理

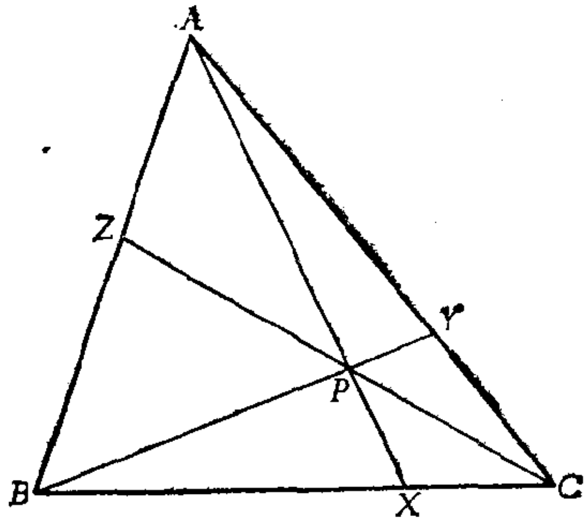


图 1.2A

三角形的一个顶点与其对边上任意一点的连线叫做塞瓦线。这样，如果X，Y，Z分别是三角形ABC的三边BC，CA，AB上的点，则线段AX，BY，CZ都是塞瓦线。这个术语取自意大利数学家塞瓦（G. Ceva）的名字，他在1678年发表了下面的十分有用的定理：

定理1.2.1 设AX，BY，CZ分别是经过三角形ABC的各顶点的塞瓦线。如果这三条线共点，则

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

所谓三条直线（或线段）是共点的，意思是它们经过同一个点，比如P点。要证明塞瓦定理，我们注意到高相等的两个三角形的面积与它们的底边成比例。参看图 1.2A，我们有

$$\frac{BX}{XC}=\frac{(ABX)}{(AXC)}=\frac{(PBX)}{(PXC)}=\frac{(ABX)-(PBX)}{(AXC)-(PXC)}$$

$$=\frac{(ABP)}{(CAP)}.$$

同理，

$$\frac{CY}{YA}=\frac{(BCP)}{(ABP)},\qquad \frac{AZ}{ZB}=\frac{(CAP)}{(BCP)}.$$