《物理学概论》

习题解答

黄瑞霖　徐行可　编

西南交通大学出版社

《物理学概论》
习 题 解 答

黄瑞霖　徐行可　编

西南交通大学出版社
· 成　都 ·

内 容 提 要

本书是配合荣获教育部科技进步二等奖的大学物理教材《物理学概论》(徐行可、张晓、张庆福编,西南交通大学出版社出版发行)而编写的习题解答,是编者在总结多年教学实践经验的基础上整理而成的。

本书的特点是力求做到分析说理清楚,解题步骤简单明了,并具有一定的启发性。

本书涵盖了大学物理课的所有内容,不仅可以配合教材《物理学概论》使用,也可以作为一般理工科大学相关专业师生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

《物理学概论》习题解答/黄瑞霖,徐行可编. —成都:西南交通大学出版社,2000.1
ISBN 7-81057-420-5

Ⅰ.物… Ⅱ.①黄…②徐 Ⅲ.物理学-高等学校-解题
Ⅳ.04-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第12014号

《物理学概论》
习题解答
黄瑞霖 徐行可 编

*

出 版 人 宋绍南
责任编辑 毛文义
封面设计 曾 俊
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段111号 邮政编码:610031 发行科电话:7600564)
http: //press. swjtu. edu. cn
E-mail: cbs@center2. swjtu.edu.cn
成都市报华印装厂印刷

*

开本:787mm×1 092mm 1/16 印张:12.25
字数:294千字 印数:1～5 000册
2000年1月第1版 2000年1月第1次印刷
ISBN 7-81057-420-5/O·023
定价:15.00元

前　言

大学物理课是理工科大学的一门重要的基础理论课程，其主要作用应是提高学生的物理素质，使学生在认识自然规律、培养科学的思维方法和初步的科学研究能力方面打下良好的基础。教材《物理学概论》正是基于以上认识，由徐行可、张晓、张庆福在承担国家教委工科物理课程教学指导委员会和中国教育学会高等教育教材建设专业委员会“工科《大学物理》内容体系改革”课题的研究过程中，结合西南交通大学具体教学实践而编写的，同时配以《〈物理学概论〉习题解答》(讲义)。这套教材经过几年的使用，受到学生的普遍欢迎并得到国内同行的肯定与好评。1999年1月，教材《物理学概论》还获得了教育部颁发的科技进步二等奖。

《物理学概论》中的习题，紧密配合教学内容，体现了编写教材的指导思想。我们编写的这本习题解答，力求做到概念清楚，分析说理透彻，简单明了并具有一定的启发性，使读者加深对所学知识的理解，逐步培养科学的思维方法，顺利地实现知识和能力的迁移过程。

本书涵盖了大学物理课的所有内容，不仅可以配合教材《物理学概论》使用，也可以作为一般理工科大学相关专业师生的教学参考书。

本书由徐行可提出初稿，由黄瑞霖补充修改定稿，并在西南交通大学1993～1998级学生中使用。

在本书编写过程中，汤桂芳、王慧老师做了许多有益的工作，西南交通大学基础物理教研室的老师们在使用过程中也提出了许多宝贵的意见，我们在此一并致以衷心的感谢。

对本书的缺点和不足之处，敬请读者提出批评指正。

编　者

1999年12月于西南交通大学

目　　录*

* 第一篇(概论)及第三篇的第十一章、第十二章略。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第二篇　实物的运动规律

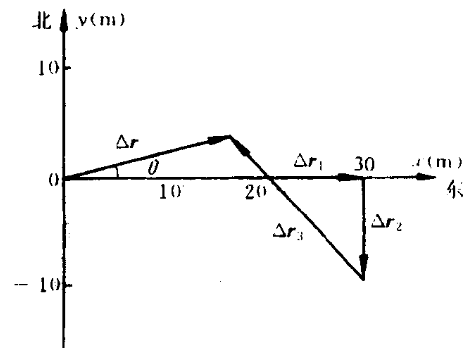
第三章　运动的描述

3-1　某人自原点出发，在 25 s 内向东走 30 m，又在 10 s 内向南走 10 m，再在 15 s 内向正西北走 18 m。试求合位移的大小和方向、每一分位移中的平均速度及全部时间内的平均速度和平均速率。

解：

（1）建立直角坐标系并作各段位移如图所示。根据位移的可叠加性，合位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}_1 + \Delta \boldsymbol{r}_2 + \Delta \boldsymbol{r}_3$$
$$= 30\boldsymbol{i} + (-10)\boldsymbol{j} + (-18\cos 45°)\boldsymbol{i} + (18\sin 45°)\boldsymbol{j}$$
$$= 17.3\boldsymbol{i} + 2.73\boldsymbol{j}$$



题 3-1 图

合位移的大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{17.3^2 + 2.73^2} = 17.5 \quad (\mathrm{m})$$

方向为东偏北 θ 角：

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2.73}{17.3}\right) = 8.97°$$

（2）各段分位移中的平均速度分别为

$$\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_1}{\Delta t_1} = \frac{30}{25}\boldsymbol{i} = 1.2\boldsymbol{i} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_2}{\Delta t_2} = -\frac{10}{10}\boldsymbol{j} = -1\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_3 = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_3}{\Delta t_3} = \frac{-9\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} + 9\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}}{15} = -0.849\boldsymbol{i} + 0.849\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

（3）50 s 内平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{17.3\boldsymbol{i} + 2.73\boldsymbol{j}}{25 + 10 + 15} = 0.346\boldsymbol{i} + 0.055\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

其大小

$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{0.346^2 + 0.055^2} = 0.350 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 相同，即东偏北 8.97°。

50 s 内平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30 + 10 + 18}{50} = 1.16 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

3-2 有一质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为

$$x = 4.5t^2 - 2t^3 \quad (\mathrm{SI})$$

试求：

（1）第 2 秒内的平均速度；

（2）第 2 秒末的瞬时速度；

（3）第 2 秒内的路程。

解：

（1）第 2 秒内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{2 - 1} = \frac{(4.5 \times 2^2 - 2 \times 2^3) - (4.5 - 2)}{1} = -0.5 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

（2）由于 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 9t - 6t^2$，所以第 2 秒末的速度为

$$v_2 = 9 \times 2 - 6 \times 2^2 = -6 \ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

（3）由 $v = 9t - 6t^2 = 0$，得 $t = 1.5$ s 时改变运动方向，所以第 2 秒内运动的路程为

$$\begin{aligned} s &= |x_{1.5} - x_1| + |x_2 - x_{1.5}| \\ &= |(4.5 \times 1.5^2 - 2 \times 1.5^3) - (4.5 - 2)| \\ &\quad + |(4.5 \times 2^2 - 2 \times 2^3) - (4.5 \times 1.5^2 - 2 \times 1.5^3)| \\ &= 2.25 \ (\mathrm{m}) \end{aligned}$$

3-3 一电子在电场中运动，其运动方程为

$$x = 2t \qquad y = 19 - 2t^2 \quad (\mathrm{SI})$$

（1）计算并图示电子的运动轨迹；

（2）求电子的速度和加速度；

（3）什么时候电子的位矢与速度恰好垂直？此时它们的 x、y 分量各是多少？

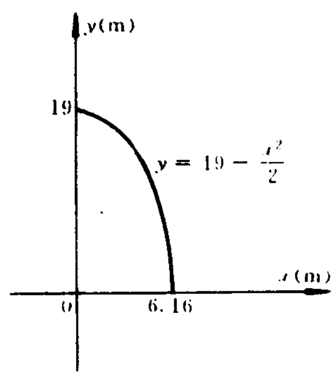
（4）何时电子离原点最近？最小距离为多少？

解：

（1）由运动方程消去 t，得轨迹方程：

$$y = 19 - \frac{x^2}{2}$$

轨迹曲线为抛物线，如图所示。



题 3-3 图

（2）用位矢表示运动方程：

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}$$

根据定义，速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -4\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

（3）位矢 $\boldsymbol{r}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直时，$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$，即

$$[2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}] \cdot (2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}) = 0$$

$$4t - 4t(19 - 2t^2) = 0$$

解出 $t = 0$ 或 $t = 3$ (s)。

$t = 0$ 时：　$x = 0$，$y = 19$ (m)；　$v_x = 2$ $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$，$v_y = 0$

$t = 3$ s 时：　$x = 6$ (m)，$y = 1$ (m)；　$v_x = 2$ $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$，$v_y = -12$ $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$

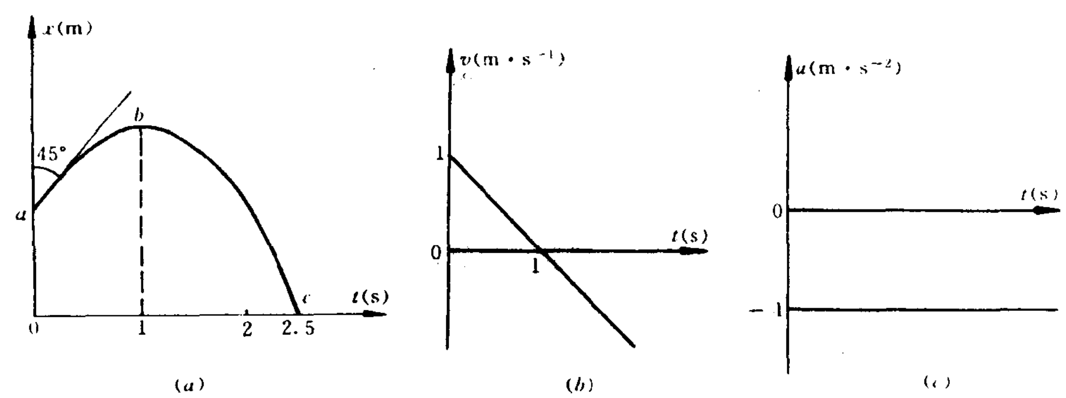
(4) 电子与坐标原点的距离为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (19 - 2t^2)^2}$$

令 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$，解得 $t = 0$ 和 $t = 3$ s，再由 $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ 的符号判定 $t = 3$ s 时 r 最小，即

$$r_{\min} = \sqrt{(2 \times 3)^2 + (19 - 2 \times 3^2)^2} = 6.08 \quad (\mathrm{m})$$

3-4 图(a)中曲线 abc 为抛物线的一部分，是一个作直线运动的质点的位置随时间变化的关系曲线。曲线在 a 点处的切线与 x 轴的夹角为 45°，写出质点的运动方程并画出其 v-t、a-t 图。



题 3-4 图

解：已知 x-t 曲线为抛物线，设质点的运动方程为

$$x = x_0 + At + Bt^2 \quad (\mathrm{SI}) \qquad (A、B \text{ 为待定常数})$$

因此速度为

$$v = A + 2Bt$$

由曲线可知：$t = 0$ 时 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{tg}45° = 1$ $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$，得到 $A = 1$；$t = 1$ s 时 $v = \mathrm{tg}0° = 0$，得 $B = -1/2$；$t = 2.5$ s 时 $x = 0$，得 $x_0 = -At - Bt^2 = -2.5 + \frac{1}{2} \times 2.5^2 = 0.625$。所以质点的运动方程为

$$x = 0.625 + t - \frac{1}{2}t^2 \quad (\mathrm{m})$$

速度和加速度分别为

$$v = 1 - t \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$a = -1 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

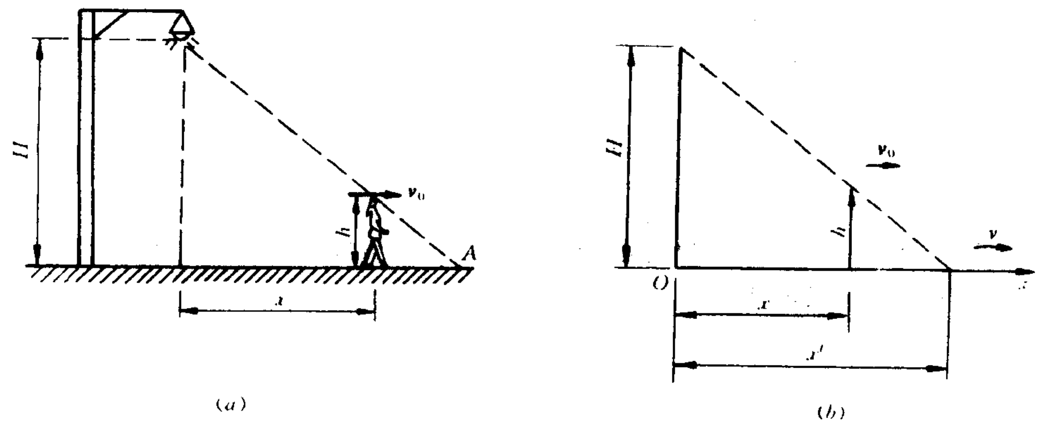
v-t、a-t 曲线分别如图(b)、(c) 所示。

3-5 路灯离地面高度为 H，一个身高为 h 的人在灯下水平路面上以匀速 v_0 步行，如图(a)所示。求当人与灯水平距离为 x 时她的头顶在地面上的影子移动的速度。

解：建立如图(b) 坐标轴 Ox，影的坐标为 x'。由几何关系

$$\frac{x}{x'} = \frac{H - h}{H}$$

有
$$x' = \frac{Hx}{H - h}$$



题 3-5 图

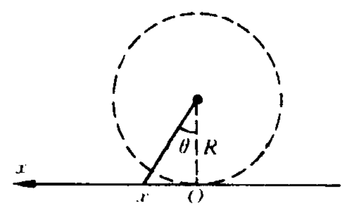
得影子移动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}v_0$$

3-6 距海岸（视为直线）500 m 处有一艘静止的船，船上的探照灯以转速 $n=1\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$ 转动，求当光束与岸边成 60° 角时，光束沿岸移动的速度。

解：建立如图坐标轴 Ox，光束在岸边扫过的坐标为 x，则

$$x=R\mathrm{tg}\ \theta=R\mathrm{tg}\ \omega t$$



题 3-6 图

沿岸移动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{R\omega}{\cos^2\omega t}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{2\pi}{60}\quad(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$$

为探照灯的角速度，$R=500$ m。

当光束与岸边成 60° 角时，$\omega t=30°$

$$v=\frac{500\times(2\pi/60)}{\cos^2 30°}=69.8\quad(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

3-7 一质点从静止开始作直线运动，开始时加速度为 a，此后加速度随时间均匀增加，经过时间 τ 后，加速度为 $2a$，经过时间 2τ 后，加速度为 $3a$，求经过时间 $n\tau$ 后，该质点的加速度和走过的距离。

解：设加速度与时间的关系为

$$a(t)=a+kt\qquad(k\ 为待定常数)$$

由题意知 $t=\tau$ 时，$a(t)=2a$，可得 $k=a/\tau$，因此

$$a(t)=a+\frac{a}{\tau}t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量积分：

$$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t\left(a+\frac{a}{\tau}t\right)\mathrm{d}t$$

得速度公式为

$$v=at+\frac{a}{2\tau}t^2=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

再次分离变量积分：

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(at + \frac{a}{2\tau}t^2\right) dt$$

得运动方程为

$$x = \frac{a}{2}t^2 + \frac{a}{6\tau}t^3$$

当 $t = n\tau$ 时，加速度为

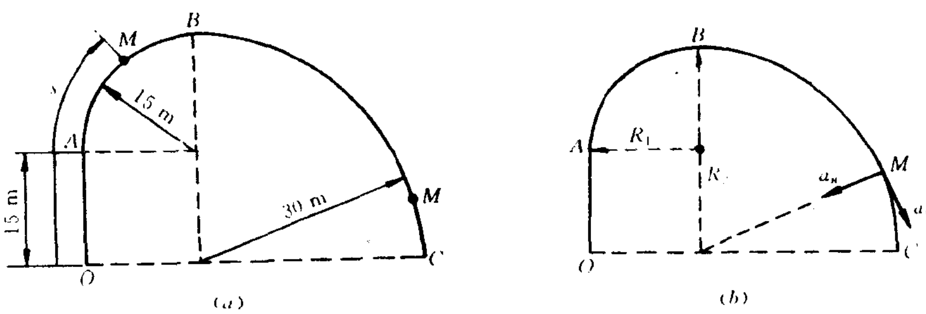
$$a(t) = a + \frac{a}{\tau} \times n\tau = (1 + n)a$$

走过的路程为

$$x = \frac{a}{2}(n\tau)^2 + \frac{a}{6\tau}(n\tau)^3 = \frac{1}{6}(3 + n)n^2 a\tau^2$$

3-8 质点 M 在水平面内运动的轨迹如图(a)所示，OA 段为直线，AB、BC 段分别为不同半径的两个 1/4 圆周。设 $t = 0$ 时，M 在 O 点，已知运动方程为 $s = 30t + 5t^2$(SI)，求 $t = 2$ s 时刻，质点 M 的切向加速度和法向加速度。

解：由图可知，$\overline{OA} = 15$ m，$\overset{\frown}{AB} = \pi R_1/2 = 3.14 \times 15/2 = 23.6$ m，$\overset{\frown}{BC} = \pi R_2/2 = 3.14 \times 30/2 = 47.1$ m。



题 3-8 图

将 $t = 2$ s 代入运动方程，得质点运动的路程为

$$s = 30 \times 2 + 5 \times 2^2 = 80 \quad (\text{m})$$

此时质点已运动到大圆弧上。

由速率 $v = ds/dt = 30 + 10t$，得 $t = 2$ s 时 M 的切向加速度和法向加速度大小分别为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 10 \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_2} = \frac{(30 + 10 \times 2)^2}{30} = 83.3 \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

方向如图(b)所示。

3-9 已知质点在铅直平面内运动，运动方程为 $\boldsymbol{r} = 5t\boldsymbol{i} + (15t - 5t^2)\boldsymbol{j}$(SI)，求 $t = 1$ s 时的法向加速度、切向加速度及轨迹的曲率半径。

解：由运动方程得速度和速率分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 5\boldsymbol{i} + (15 - 10t)\boldsymbol{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5^2 + (15 - 10t)^2}$$

加速度为为

$$a = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -10\boldsymbol{j}$$

所以，切向加速度为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{10(2t-3)}{\sqrt{4t^2-12t+10}}$$

法向加速度

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$t = 1\ \mathrm{s}$ 时：$v = 5\sqrt{2}\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$，切向加速度、法向加速度和轨迹的曲率半径分别为

$$a_t = -5\sqrt{2} = -7.07\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})\ \ \text{（与速度方向相反）}$$

$$a_n = \sqrt{10^2 - 7.07^2} = 7.07\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{7.07} = 7.07\ \ (\mathrm{m})$$

3-10 一个半径为 $R = 1.0\ \mathrm{m}$ 的圆盘，可以绕一水平轴自由转动。一根轻绳绕在盘子的边缘，其自由端拴一物体 A。在重力作用下，物体 A 从静止开始匀加速地下降，在 $\Delta t = 2.0\ \mathrm{s}$ 内下降的距离 $h = 0.4\ \mathrm{m}$。求物体开始下降后 3 秒末，盘边缘上任一点的切向加速度与法向加速度。

解：设物体下降加速度为 a，由匀加速直线运动公式 $h = a(\Delta t)^2/2$ 得

$$a = \frac{2h}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \times 0.4}{2^2} = 0.2\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

盘边缘任一点的切向加速度大小为

$$a_t = a = 0.2\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})\qquad \text{（与时间无关）}$$

$t = 3\ \mathrm{s}$ 时，盘边缘任一点的速度大小为

$$v = a_t t = 0.2 \times 3 = 0.6\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

所以，法向加速度大小为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{0.6^2}{1} = 0.36\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

3-11 一质点沿半径为 $0.10\ \mathrm{m}$ 的圆周运动，其角位置 $\theta = 2 + 4t^3$(SI)，问

(1) $t = 2\ \mathrm{s}$ 时质点的法向加速度和切向加速度各是多少？

(2) 当切向加速度的大小恰是总加速度大小的一半时，θ 的值是多少？

(3) 在哪一时刻，切向加速度和法向加速度恰有相等的值？

解：

(1) 由运动方程 $\theta = 2 + 4t^3$ 得

角速度 $$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$$

角加速度 $$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 24t$$

由角量和线量的关系，质点的切向加速度和法向加速度的值分别为

$$a_t = \beta r = 24t \times 0.1 = 2.4t$$

$$a_n = \omega^2 r = (12t^2)^2 \times 0.1 = 14.4t^4$$

当 $t = 2\ \mathrm{s}$ 时：

$$a_t = 2.4 \times 2 = 4.8\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

$$a_n = 14.4 \times 2^4 = 230.4\ \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(2) 质点的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{5.76t^2 + 207.36t^8}$$

据题意 $a_t = a/2$，即

$$2.4t = \frac{1}{2}\sqrt{5.76t^2 + 207.36t^8}$$

解出

$$t = \sqrt[6]{\frac{3 \times 5.76}{207.36}} = 0.66 \quad (\mathrm{s}) \qquad (t = 0 \text{ 舍去})$$

$$\theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4 \times 0.66^3 = 3.15 \quad (\mathrm{rad})$$

(3) 当 $a_t = a_n$ 时

$$2.4t = 14.4t^4$$

解出

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = 0.55 \quad (\mathrm{s}) \qquad (t = 0 \text{ 舍去})$$

3-12 某发动机工作时，主轴边缘一点作圆周运动的运动方程为 $\theta = t^3 + 4t + 3$ (SI)。

(1) $t = 2$ s 时，该点的角速度和角加速度各为多大？

(2) 若主轴直径 $D = 40$ cm，求 $t = 1$ s 时该点的速度和加速度。

解：

(1) 由运动方程 $\theta = t^3 + 4t + 3$，得边缘一点的角速度和角加速度分别为

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4$$

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$$

当 $t = 2$ s 时：

$$\omega = 3 \times 2^2 + 4 = 16 \quad (\mathrm{rad \cdot s^{-1}})$$

$$\beta = 6 \times 2 = 12 \quad (\mathrm{rad \cdot s^{-2}})$$

(2) 由角量和线量的关系，边缘一点的速度、切向加速度和法向加速度的值分别为

$$v = \omega r = \frac{1}{2}\omega D = \frac{1}{2}(3t^2 + 4) \times 0.4 = 0.2(3t^2 + 4)$$

$$a_t = \beta r = 6t \times 0.2 = 1.2t$$

$$a_n = \omega^2 r = (3t^2 + 4)^2 \times 0.2$$

$t = 1$ s 时：

$$v = 0.2(3 + 4) = 1.4 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$a_t = 1.2 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

$$a_n = (3 + 4)^2 \times 0.2 = 9.8 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

此时总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1.2^2 + 9.8^2} = 9.87 \quad (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_t} = \operatorname{arctg}\left(\frac{9.8}{1.2}\right) = 83.0^\circ$$

3-13 一质点在水平面内作圆周运动，半径 $R = 2$ m，角速度 $\omega = kt^2$(k 为常数)。当 $t = 0$

时，$\theta = -\pi/4$，第二秒末时质点的线速度大小为 32 m·s^{-1}。试用角坐标表示质点的运动方程。

解：由角量和线量的关系，质点的速度为

$$v = \omega R = 2kt^2$$

已知 $t = 2$ s 时 $v = 32$，即

$$32 = 2k \times 2^2$$

得 $k = 1$，角速度 $\omega = 4t^2$。

又由 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，分离变量积分：

$$\int_{-\pi/4}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^t 4t^2 \mathrm{d}t$$

得到用角坐标表示的运动方程

$$\theta = \frac{4}{3}t^3 - \frac{\pi}{4} \quad \text{(SI)}$$

3-14 一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度平方成正比，即 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kv^2$，式中 k 为常数。试证明电艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $v = v_0 \mathrm{e}^{-kx}$，其中 v_0 是发动机关闭时电艇的速度。

证：由题设条件

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kv^2$$

分离变量积分：

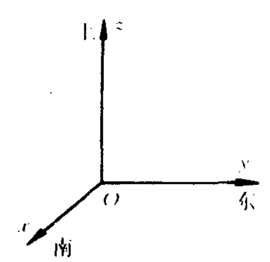
$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^x -k\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kx$$

得到行驶 x 距离时电艇的速度为

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-kx} \qquad \text{(证毕)}$$

3-15 一舰艇正以 17 m·s^{-1} 的速率向东行驶，有一架直升机准备降落在艇的甲板上，海上有 12 m·s^{-1} 的北风吹着。若艇上的海员看到直升机以 5 m·s^{-1} 的速度垂直降下，试求直升机相对于海水和相对于空气的速度各如何？（以正南为 x 正方向，正东为 y 正方向，竖直向上为 z 正方向建立坐标系）



题 3-15 图

解：相对于题中给出的坐标系，舰对水的速度为 $\boldsymbol{v}_{\text{舰对水}} = 17\boldsymbol{j}$，空气对水的速度为 $\boldsymbol{v}_{\text{气对水}} = 12\boldsymbol{i}$，直升机对舰的速度为 $\boldsymbol{v}_{\text{机对舰}} = -5\boldsymbol{k}$。根据相对速度公式，直升机相对于海水的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\text{机对水}} &= \boldsymbol{v}_{\text{机对舰}} + \boldsymbol{v}_{\text{舰对水}} \\ &= -5\boldsymbol{k} + 17\boldsymbol{j} = 17\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

直升机相对于空气的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\text{机对气}} &= \boldsymbol{v}_{\text{机对水}} + \boldsymbol{v}_{\text{水对气}} \\ &= \boldsymbol{v}_{\text{机对水}} - \boldsymbol{v}_{\text{气对水}} \\ &= 17\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} - 12\boldsymbol{i} = -12\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

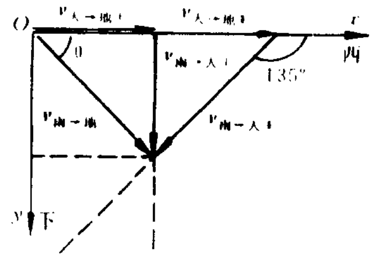
3-16 一人以 2.0 km·h^{-1} 速率自东向西行时，看见雨滴竖直下落；当他的速率增加至 4.0 km·h^{-1} 时看见雨滴与人前进方向成 135° 角下落，求雨点对地的速度。

解：以正西为 x 轴方向，竖直向下为 y 轴方向建立直角坐标系。作两种情况的速度矢量如

图所示。由图可见：

$$\boldsymbol{v}_{人对地1} = 2\boldsymbol{i} \qquad \theta = 45°$$

$$\boldsymbol{v}_{雨对人1} = 2\boldsymbol{j}$$



题 3-16 图

根据相对速度公式，雨对地的速度为

$$\boldsymbol{v}_{雨对地} = \boldsymbol{v}_{雨对人1} + \boldsymbol{v}_{人对地1} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

其大小为

$$|\boldsymbol{v}_{雨对地}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83 \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

方向与人前进的方向成 $\theta = 45°$ 角(斜向下)。

3-17 飞机 A 以 $v_A = 10^3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速率(相对地面)向南飞行，同时另一架飞机 B 以 $v_B = 800\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速率(相对地面)向东偏南 30° 方向飞行。求 A 机相对于 B 机的速度和 B 机相对于 A 机的速度。

解：以正东为 x 轴方向，正北为 y 轴方向建立直角坐标系，依题意：

$$\boldsymbol{v}_{A对地} = -10^3\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

$$\boldsymbol{v}_{B对地} = 800\cos 30°\boldsymbol{i} - 800\sin 30°\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

根据相对速度公式，A 对 B 的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{A对B} &= \boldsymbol{v}_{A对地} + \boldsymbol{v}_{地对B} = \boldsymbol{v}_{A对地} - \boldsymbol{v}_{B对地} \\ &= -800\cos 30°\boldsymbol{i} + (-10^3 + 800\sin 30°)\boldsymbol{j} \\ &= -693\boldsymbol{i} - 600\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{v}_{B对A} = -\boldsymbol{v}_{A对B} = 693\boldsymbol{i} + 600\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

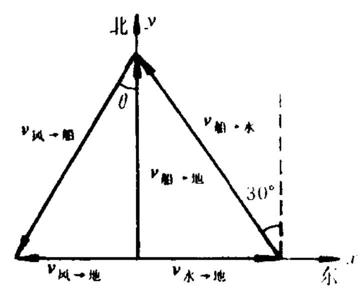
3-18 河水自西向东流动，速率为 $10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$。一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西 30°，相对于河水的航速为 $20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$。此时风向为正西，风速为 $10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$。试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向(设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度)。

解：建立如图坐标系。由题意知：

$$\boldsymbol{v}_{水对地} = 10\boldsymbol{i} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

$$\boldsymbol{v}_{船对水} = -20\sin 30°\boldsymbol{i} + 20\cos 30°\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

$$\boldsymbol{v}_{风对地} = -10\boldsymbol{i} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$



题 3-18 图

根据相对速度公式，

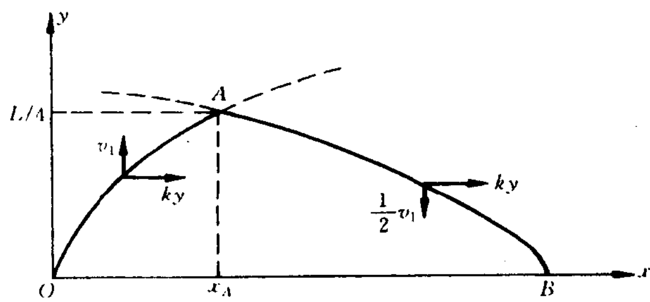
$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{烟对船} &= \boldsymbol{v}_{风对船} = \boldsymbol{v}_{风对地} + \boldsymbol{v}_{地对水} + \boldsymbol{v}_{水对船} \\ &= \boldsymbol{v}_{风对地} - (\boldsymbol{v}_{船对水} + \boldsymbol{v}_{水对地}) \\ &= (-10 + 20\sin 30° - 10)\boldsymbol{i} - (20\cos 30°)\boldsymbol{j} \\ &= -10\boldsymbol{i} - 17.3\boldsymbol{j} \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})\end{aligned}$$

$$v_{烟对船} = \sqrt{(-10)^2 + (-17.3)^2} = 20 \quad (\mathrm{km \cdot h^{-1}})$$

即在船上观察，烟以 $20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ 的速率向南偏西 $\theta = 30°$ 飘去。

3-19 一宽为 L 的河流，流速与离岸的距离成正比，河中心流速最大为 v_0，两岸处流速为零。一小船以恒定的相对于水的速率 v_1 垂直于水流从一岸驶向另一岸，当船驶至河宽的 1/4 处时发现燃料不足，立即掉头以相对速率 $v_1/2$ 垂直于水流驶回本岸。求船驶向对岸的轨迹和返回本岸的地点。

解：建立如图坐标系，x 轴表示河水流动方向，y 轴指向对岸。



题 3-19 图

（1）船向对岸行驶过程中，船对岸的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{船对水} + \boldsymbol{v}_{水对岸} = v_1\boldsymbol{j} + ky\boldsymbol{i} \qquad (k\text{ 为常数})$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ky = kv_1t$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_1$$

由题意，$y = L/2$ 时 $v_x = v_0$，得 $k = 2v_0/L$。

分离变量积分：

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t kv_1 t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t v_1\,\mathrm{d}t$$

得到运动方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{kv_1}{2}t^2 = \dfrac{v_0v_1}{L}t^2 \\ y = v_1t \end{cases}$$

从运动方程中消去 t，得轨迹方程

$$x = \frac{v_0}{v_1L}y^2$$

可见为一抛物线，如图中 OA 段所示。A 点坐标为 $y_A = \dfrac{L}{4}$，$x_A = \dfrac{v_0}{v_1L}\left(\dfrac{L}{4}\right)^2 = \dfrac{v_0L}{16v_1}$。

（2）船返回本岸过程中，以 A 点为计时起点，船对岸的速度分量为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ky = \frac{2v_0}{L}\left(\frac{L}{4} - \frac{v_1}{2}t\right) = \frac{v_0}{2} - \frac{v_0v_1}{L}t$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}v_1$$

分离变量积分：

$$\int_{x_A}^x \mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_0v_1}{L}t\right)\mathrm{d}t$$

$$\int_{y_A}^{y}\mathrm{d}y=\int_0^t-\frac{1}{2}v_1\mathrm{d}t$$

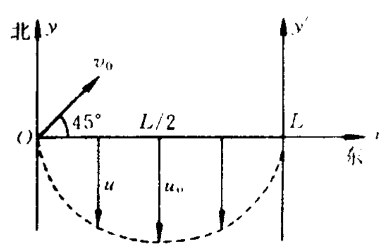
得运动方程

$$\begin{cases}x=x_A+\dfrac{v_0}{2}t-\dfrac{v_0v_1}{2L}t^2\\ y=y_A-\dfrac{1}{2}v_1t\end{cases}$$

船返回本岸的 B 点时，$y_B=0$，$t=\dfrac{2y_A}{v_1}$，从而得到

$$\begin{aligned}x_B&=x_A+\frac{v_0}{2}\times\frac{2y_A}{v_1}-\frac{v_0v_1}{2L}\left(\frac{2y_A}{v_1}\right)^2\\&=\frac{v_0L}{16v_1}+\frac{v_0}{v_1}\times\frac{L}{4}-\frac{v_0v_1}{2L}\times\frac{(2\times L/4)^2}{v_1^2}=\frac{3v_0L}{16v_1}\end{aligned}$$

3-20 有一宽为 L 的大江，江水由北向南流去。设江中心流速为 u_0，靠两岸的流速为零。江中任一点的流速与江中心流速之差，与江心至该点距离的平方成正比。今有相对于水的速率为 v_0 的汽船由西岸出发，向东偏北 45° 方向航行，试求其航线的轨迹方程以及到达东岸的地点。



题 3-20 图

解：建立如图直角坐标系。先求河水流速分布。

依题意，任一点流速大小为 u，

$$u-u_0=k\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\qquad(k\text{ 为常量})$$

由 $x=0$ 处 $u=0$ 得 $k=-\dfrac{4u_0}{L^2}$，所以流速分布为

$$\begin{aligned}u&=u_0+k\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\\&=\frac{4u_0}{L^2}(L-x)x\end{aligned}$$

设船对岸的速度为 $\boldsymbol{v}$，由相对速度公式，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}$$

$$v_x=v_0\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0$$

$$v_y=v_0\sin45°-u=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0-\frac{4u_0}{L^2}(L-x)x$$

得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0-\frac{4u_0}{L^2}(L-x)x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{4\sqrt{2}u_0}{L^2v_0}(L-x)x$$

将上式分离变量积分：

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^x \left[1 - \frac{4\sqrt{2}\,u_0}{L^2 v_0}(L - x)x\right]\mathrm{d}x$$

得船的轨迹方程为

$$y = x - \frac{2\sqrt{2}\,u_0}{L v_0}x^2 + \frac{4\sqrt{2}\,u_0}{3L^2 v_0}x^3$$

船到达东岸地点的坐标为

$$\begin{cases} x = L \\ y = L\left(1 - \dfrac{2\sqrt{2}\,u_0}{3v_0}\right) \end{cases}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com