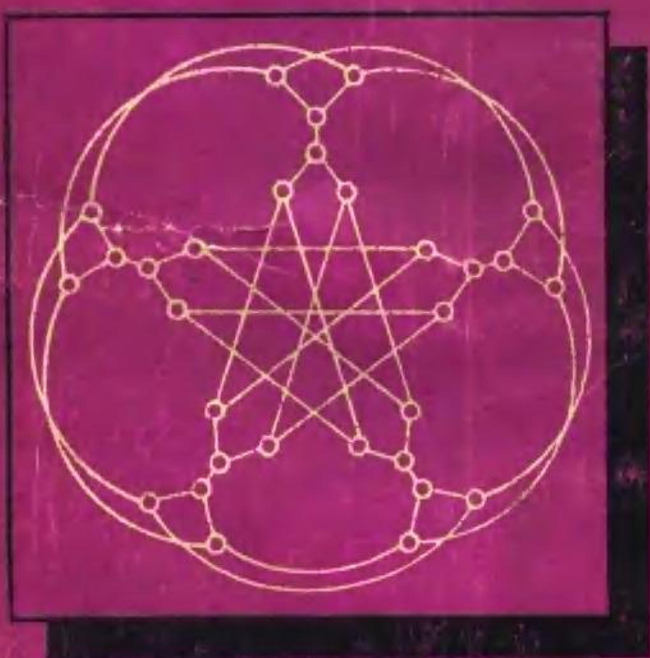
离散数学原理之二

图论及其算法

王树禾 编著



中国科学技术大学出版社

离散数学原理之二

图论及其算法

王树禾　编著

中国科学技术大学出版社

1990・合肥

内 容 简 介

本书系统地阐述了图论与算法图论的基本概念，基础理论，基本算法及其重要应用。立论严谨，概念清楚，语言流畅，载有大量例题及著名算法，每章布置足够多的引人入胜的习题，是图论教学与自学比较理想的一部书。

本书可作为理工科大学计算机、无线电电讯、系统科学、应用数学等专业的本科生及研究生的教材，也可供有关专业研究人员参考。

图 论 及 其 算 法

王树禾 编著

中国科学技术大学出版社出版
(安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
安徽省新华书店发行
*
开本：850×1168/32 印张：10.75 字数：279千
1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷
印数：1-4000册
ISBN7-312-00216-1/O·82 定价：2.60元

序

多年来，为了大规模快速计算的目的，数学影响了计算机科学的形成与发展，随着计算机在社会中作用的变大，它反过来又影响数学，图论就是这方面的显著范例。由于图论对计算机有许多应用，例如数据表示、网络设计等等，搞计算机科学技术的都要学习图论。

当然，图论的应用领域远不止于此，它同理论物理、有机化学、系统科学、运筹学、社会学等等都有关联。至于同数学内部，例如代数结构、数学关系论、拓扑学等等的关系更是众所周知的；它同组合数学的关系如此之密切，以致于许多人都认为图论是组合数学的一个重要组成部分。

学习好图论，除了能使人应用它的成果，同样重要的是能培养思考和解决问题的能力，从长远观点来看，它理应成为人们必须接受的数学教育的不可少的科目之一。

王树禾同志编著的这本书，是他多次使用并不断更新完善的两份讲义重新组织改写的结果，书中从问题的陈述到论证解答，都有许多独到之处。他用自己的讲义，已经培养了中国科学技术大学计算机科学技术系九届毕业生，教学实践证明，即使是原来的讲义，也已经是相当之成功的。

本书包括了现今图论教材中应涉及的所有课题；它的基本理论严谨，系统性强；另一个特色在于它相当强调算法。图论算法是算法设计与分析这一分支中的重要组成部分；数学证明的算法化已经形成潮流，在计算机大量应用的时代，这当然是不可避免的。采用本书学习图理论的同时，学习相应的算法及其分析方

法，这自然是十分理想的。

综上可见，这是一部理科和工科大学生、研究生以及工程技术人员、教师都可以学习、参考的好书。

陶懋颀

1990年2月于北京

前　言

本书阐述了图论与算法图论的基本概念与基础理论，包括计算复杂性的概念与理论。书中主要采用构造性的组合技术和代数方法，要求读者具有线性代数与代数结构两门学科的基础知识；当然，由于图论自身的特点，还要求读者具备足够的数学机敏性与成熟性。

本书共分十七章，各章布置了较丰富的习题(共计 361 题)。习题和书中的例题一样有趣，不少习题自身就是比较重要的定理。图论题目，不仅要引用定义定理，而且往往需要运用精彩的技巧才能解决；不多做习题，不可能掌握图论的思想与方法。

本书问世过程中，陶懋颀教授提出许多重要建议，并为本书撰写了序言和第十七章，作者对陶懋颀同志对本书的贡献表示感谢。

李乔教授对本书的出版给予热情支持和鼓励，并提出重要修改意见，在此谨致谢忱。

王树禾

1990年2月于科大数学系

目　　录

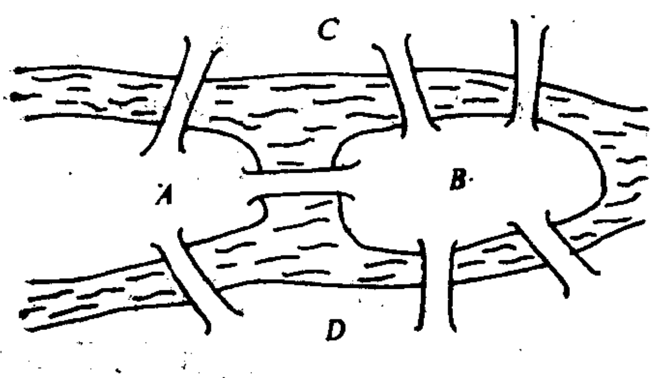
1 通　　论

1.1　图论的内容与历史回顾

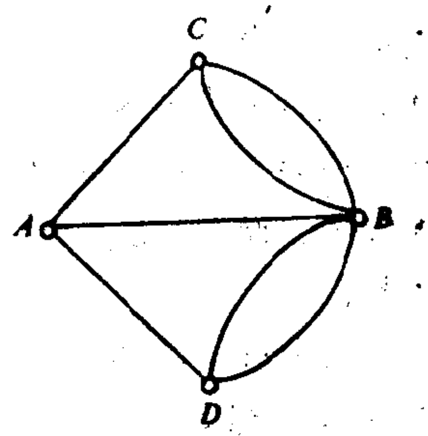
本节以比较自由的方式介绍图论的主要内容，并对它的重要历史事件进行回顾。所涉及的内容以后各章节将予以严格而详细地论述。

一个图就是一个集合V连同V的一些二元子集的集合构成的一个数学结构。

1736年是图论的历史元年。这一年，Euler 研究Königsberg（今苏联加里宁格勒）的七桥问题（图 1.1(a)），发表了图论的首篇论文。当时哥尼斯堡的市民热衷于这样一个有趣的游戏：从



(a)



(b)

图 1.1

A，B，C，D四块土地的某一处出发，通过每座桥恰一次再回到出发地，是否可能？Euler 否定地回答了这个问题，他把A，B，C，D四块土地抽象成四个几何点，于是就得到图 1.1(b)，从而得到证明。事实上，A，B，C，D任何一个点做为出发点

时，都必然是先“出”后“回”，最后以“出”告终，才能行遍与该点相连的桥，所以不可能回到原来的出发点。Euler 堪称图论之父。

我们看到，正是上述似乎没有多大意义的七桥游戏，它的抽象与论证的方法，开创了图论科学的研究。遗憾的是，由于当时社会生产落后，对图论知识的要求甚寡，这一学科的发展颇为迟缓，甚至处于停滞状态。两百年以后，1936年，匈牙利著名图论学家 König 发表《有限图与无限图理论》，这是图论的第一部专著，它总结了图论二百年的主要成果，是图论的重要里程碑。此后的五十多年，图论经历了一场爆炸性的发展，终于成长为数学科学中一门独立的学科。它的主要分支有图论、超图理论、极值图论、算法图论、网络图论和随机图论等。近二十年来，图论在科学界可以说是异军突起，活跃非常。原因主要有两条：一是现代生产和科学技术向图论提出越来越多的问题要求解决，无论在数学、物理学、化学、天文学、地理学和生物学等基础学科，还是有线电、无线电、交通运输、军事作战等高技术学科，图论都是大有作为的。第二个主要原因是大型电子计算机的出现和计算机科学的迅猛发展，为图论及其算法的解决提供了强大的计数与证明的手段，而图论对开关理论、形式语言、数据结构、编译程序、操作系统、人工智能、计算机网络等方面，亦有显著贡献。

二十世纪科学史上重要事件之一是1976年美国伊利诺大学的 Appel 和 Haken 在 Koch 的协作之下，用计算机证明了数学史上悬挂多年的四色猜想是正确的。他们用了一百亿逻辑判断，花了一千二百个机时，从此 4CC 便晋升为四色定理：χ(平面图)$\leqslant 4$。

四色猜想的原始提法是：地图或地球仪上，最多用四种颜色即可把每一国之版图染好，使得国界线两侧异色。

这个问题如此之简单，以致于可以在两三分钟之内向公路上

和我们随机相遇的行人讲清楚。但是，1976年以前的百余年间，有多少精干的数学家潜心研究过它，无奈谁也未能得出实质性进展，时至今日，仍欠理论性（非计算机的）证明。当然，大批优秀数学家的工作并非徒劳，人们在冲击4CC时采用的思路、方法和技巧，为图论宝库增添了一个又一个精彩成果，例如1912年Birkhoff提出了颜色多项式理论。1879年伦敦数学会的Kemple发表了证明4CC的论文，尽管他的证明十年后被人指出错误，但Kemple的极为精巧的论证方法，用Appel的话来说，其实“包含着一个世纪后终于引出正确证明的绝大部分基本思想”。1890年，Heawovd用Kemple的方法证明了五色定理：χ（平面图）$\leqslant 5$。

4CC是1852年一个叫做Guthrie的伦敦学生提出的。伊利诺事件宣告了数学难题由机器证明的新纪元已经开始。

与染色有关的生动问题非常之多，封面上那幅漂亮的图，涉及许多图论中要讨论的概念：它是无桥三次正则图，每个顶点处关联了三条边；它的围长不小于5，它的边色数是4，删除三条边不会使它破裂成两个有边图，这种图叫做妖怪（Snark graph）。这里“妖怪”是个数学名词，并非绰号，事实上，因为有这种性质的图非常之难以设计（扑捉）出来，所以称这种图为妖怪。

还可以再提出一个虽然还没有难到人令绝望的程度，看来也是非常之不易解决的问题，它就是著名的Ulam猜想（1929年）：

G_1, G_2是两个顶数相同的图，$V(G_1)=\{u_1,\cdots,u_n\}$，$V(G_2)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$G_1-u_i\cong G_2-v_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则$G_1\cong G_2$。

正如4CC之证明，指望用手和笔写出Ulam猜想之证明谈何容易！

Hamilton图是顶点分布在同一个圆周上的图，它是1895年Hamilton玩旅游世界的游戏时提出的。这种图中的难题多得很，至今连Hamilton图的充要条件（象样儿的）尚未建立。与Hamilton图有血缘关系的是货郎问题：

一位货郎从城中出发去各村卖货，再返回城来，要求各村都要恰到一次，试求他的最短里程。

用计算机“历数”各种行动方案来挑这个最短里程是不现实的，假如有20个村子，任何两村之间都有路直接相通，要比较 $\frac{1}{2}\times 20!$ 次，这在每秒千万次的计算机上亦要百年。目前正在努力探求有效的解决方法。

在诸多图论难题之中，还有一个 Ramsey 问题，直观地讲，就是问：任给一人群，有 k 个人相识或 l 个人不相识，这群人至少几人？这个答案用 $r(k, l)$ 表示，目前我们连 $r(4, 5)$ 的值都得不出来。本书中，我们将给出一些 $r(k,l)$ 的值，例如 $r(3,3)=6$，它的证明十分简单：

用六个点代表六个人，相识者之间连一绿边，否则连一红边。六个人分别为 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6。与 v_1 相关联的五条边中有三条同色，不妨设其为绿色，这三边的另一端不妨设为 v_2，v_3，v_4，若 $\Delta v_2v_3v_4$ 是同色三角形，则有三人相识或不相识；否则，$\Delta v_2v_3v_4$ 中有绿色边，于是在 v_1，v_2，v_3，v_4 之间出现绿色三角形，即有三人相识；而只有五人的人群，未必如此。例如图 1.2 中，实线表示相识，虚线表示不相识。

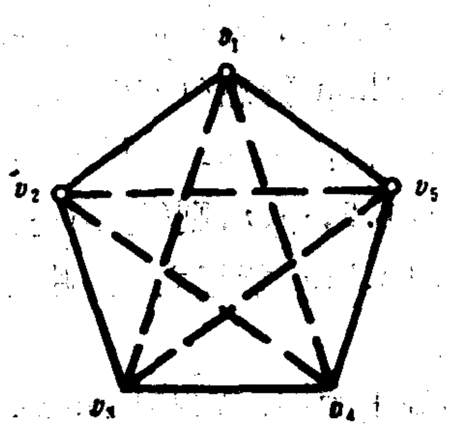


图 1.2

从许多实例中，我们发现图论最吸引人的特色是它蕴含着大量强有力的思想、漂亮的图形和巧妙的论证、即使是非常困难的尚未解决的问题也易于表达。现实生活中处处潜藏有图论的难题，图论是最接近群众生活，最容易向科学水准很低的人们阐述的一门学科。问题外表的简单朴素和本质上的难以解决，使每个搞图论的人在图论问题面前都必须谨慎严肃地思考问题。常常是一个貌似简单的问题，即使幸运地得出证

明，证明中包含的细节也十分之繁琐，并且往往运用了极艰苦的计算。

在过去的十年中，图论的算法受到了更多的重视。我们有有效算法求得两个顶之间的最短道路（Dijkstra 算法），却尚未找到求图中最长轨道的有效算法；我们还没有一个有效的算法判别一个图的顶点是否分布在同一个圆周上；我们也没有有效算法确定平面图能否用三种颜色正常（邻顶异色）着色；我们在网络理论中，已经有有效算法，知道如何在铁路网上把工厂生产的一种商品最多地运往销地，但对于两个工厂出产的两种产品，分别运往两个销地时，我们尚无有效的算法安排运输，使得两个销地的需求得以满足，等等。图论发展至今，已经积累了数以百计的这种现实问题，仍然找不到解决的有效算法。Edmonds，Cook 和 Karp 等人发现，这批难题有一个值得注意的性质，对其中一个问题存在有效算法时，每个问题都会有有效算法。这些问题号称 NP-完全问题，其代号为 NPC。离散数学中最大的挑战之一就是确定 NPC 问题们是否真的不存在有效算法？

1.2 图的定义

定义 1 **有序三重集合** $G=\{V(G),\ E(G),\ \psi_G\}$ **称为一个图，其中** $V(G)\neq\phi$**，叫做顶点集合，**$V(G)$ **的元素叫做图** G **的顶点；**$E(G)$ **叫做边集合，**$E(G)$ **的元素叫做边；**$V(G)\cap E(G)=\phi$**；**ψ_G **叫做关联函数，其定义域是** $E(G)$**，**$\forall e\in E(G)$**，**$\exists$ **唯一的顶对** $u,v\in V(G)$**，使得** $\psi_G(e)=uv$**；当** u **与** v **无序时，**G **叫做无向图；当** u**，**v **有序时，**G **叫做有向图；记** $|V(G)|=\nu$**，**$|E(G)|=\varepsilon$**，当** $\nu+\varepsilon<+\infty$ **时，**G **叫做有限图，否则为无限图。**

本书只讨论有限图。

为直观起见，我们如下地画一个图的图示：把 $V(G)$ 的元素用不重合的几何点表示，位置任选；当 $\psi_G(e)=uv$ 时，若是无

向图，在顶 u 与 v 之间连一条曲线表示边 e，若是有向图，则在上述曲线上从 u 到 v 画上箭头。曲线的长短曲直不加介意。一般，顶点标以 v_1, v_2, …, v_n, …, 边标以 e_1, e_2, …, e_m, …；顶点标志字母的图叫做**标志图**。

图与其图示不是一回事，但它们是同构的，为了直观，下面我们把图示看成就是原来那个图。

例 1 在图 1.3 中，

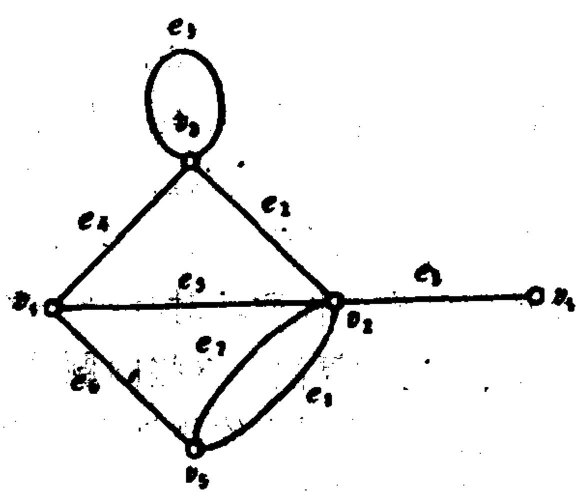


图 1.3

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$
$$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\},$$
$$\psi_G(e_1)=v_1v_2,$$
$$\psi_G(e_2)=v_2v_3,$$
$$\psi_G(e_3)=v_3v_3,$$
$$\psi_G(e_4)=v_3v_4,$$
$$\psi_G(e_5)=v_2v_4,$$
$$\psi_G(e_6)=v_4v_5,$$
$$\psi_G(e_7)=\psi_G(e_8)=v_2v_5.$$

下面我们列出十一个术语：

（1）**边的端点**：$\psi_G(e)=uv$ 时，u 与 v 叫做边 e 之端点，也可写成 $e=uv$。

（2）**边与顶相关联**：$\psi_G(e)=uv$ 时，e 与 u，v 相关联。

（3）**邻顶**：$\psi_G(e)=uv$ 时，u 与 v 叫做邻顶。

（4）**邻边**：与同一顶关联的两条边叫做邻边。

（5）**环**：只与一个顶关联的边叫做环。

和

（6）**重边**：$\psi_G(e_1)=\psi_G(e_2)=uv$ 时，e_1 叫 e_2 叫做重边。

（7）**平凡图**：$\nu=1$，$\varepsilon=0$ 的图。

（8）**单图**：无环无重边的图。（又称 简单图）

（9）**完全图**：任二顶皆相邻的图，记成 K_ν。

（10）**二分图**：$V(G)=X\cup Y$，$X\cap Y=\phi$，X 中的任二顶

不相邻，Y 中的任二顶亦不相邻，则 G 叫做二分图；若 X 中的每一顶皆与 Y 中一切顶相邻时，G 叫做**完全二分图**，记之为 $K_{m,n}$，其中 $|X|=m$，$|Y|=n$。

(11) **顶点 v 的次数**：记成 $d(v)$，定义 $d(v)=d_1(v)+2l(v)$，其中 $d_1(v)$ 是与 v 相关联的非环边数，$l(v)$ 是与 v 相关联的环数。

例如图 1.3 中，$d(v_3)=4$，$d(v_4)=3$，$d(v_5)=3$。

定理 1 (Euler, 1736) $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$。

证 定义函数

$$\xi(v_i,v_j)=\begin{cases}1, & \text{当 } v_iv_j\in E(G);\\ 0, & \text{否则；} \quad i=1,2,\cdots,\nu,\ j=1,2,\cdots,\nu.\end{cases}$$

当 G 是单图时，

$$d(v_j)=\sum_{i=1}^{\nu}\xi(v_i,v_j),$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu}d(v_j)&=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\xi(v_i,v_j)\\ &=\xi(v_1,v_1)+\xi(v_1,v_2)+\xi(v_1,v_3)+\cdots+\xi(v_1,v_\nu)\\ &\quad+\xi(v_2,v_1)+\xi(v_2,v_2)+\xi(v_2,v_3)+\cdots+\xi(v_2,v_\nu)\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\\ &\quad+\xi(v_\nu,v_1)+\xi(v_\nu,v_2)+\xi(v_\nu,v_3)+\cdots+\xi(v_\nu,v_\nu)\\ &=2\varepsilon.\end{aligned}$$

当 G 不是单图时，只要把每一环与每一重边上“嵌入”一个新顶，类似可证，$\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$。**证毕**。

上述证明无非是“每条边两个‘头儿’，一共有 2ε 个线头儿”的严格化。

推论 1 **奇次顶的总数是偶数。**