数 学 趣 谈

陈景润 著

黑龙江教育出版社

1986年·哈尔滨

责任编辑：孙怀川

封面设计：孟晓柯

数 学 趣 谈

Shuxue qutan

陈景润 著

黑 龙 江 教 育 出 版 社 出 版

（哈尔滨市道里森林街42号）

黑龙江新华印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 5 10/16 · 插页 5 · 字数 95,000

1986年5月第1版　1986年5月第1次印刷

印数 1—8,444

统一书号：10357 · 1　定价：1.25 元

序　言

数学是自然科学的一门基础科学，也是人类认识自然、改造自然的一件必不可少的工具。因此，我们大家都要认真学习数学，打好基础，只有这样，才能为实现四个现代化多做贡献。

最近几年，我陆续收到过许多人的来信，有的信中说数学比较枯燥，缺乏趣味，而解数学题又常常需要进行严密的逻辑推理，有时还需要高超的技巧，因而使他们畏而却前，希望我能向他们介绍一些学习数学的窍门及解题的捷径。其实，数学并不枯燥，它是极其生动有趣的一门科学，是人类在长期生产实践的过程中发展起来的一门科学，与整个人类的文明史一样源远流长，与丰富多彩的实际问题有着密切的联系。揭开它的严密逻辑性及高度抽象性这层面纱，我们会看到表面上枯燥无味的数学有着一张趣味无穷的面孔。我认为，窍门就在每个人自己的手边，捷径就在每个人自己的脚下。只要脚踏实地，勤奋努力，并注重学习方法，每个人都一定可以学好数学，通过反复实践，每个人都能掌握数学的解题技巧，并在解决实际问题时给出创造性的应用。

在这本小册子里，我要向大家介绍一些有趣的数学问

题，从中可以体会到数学无穷的魅力和趣味，期望能对大家学习数学有所帮助。由于时间仓促，缺点和错误在所难免，希望大家多提宝贵意见。

陈景润

1985 年 6 月于北京

J311/31/22

目 录

第一章　关于高斯、杨辉、欧拉及费波那契的有趣的数学问题

第一节　从高斯的巧妙算法谈起

十八世纪时，德国出了一位大科学家，他的名字叫高斯(C. F. Gauss)。高斯生在一个很贫穷的家庭里，他父亲是一个劳苦的工人。据说，高斯在还不会说话的时候就开始学习算术。三岁时，有一天晚上他看着父亲计算工钱，还纠正了父亲计算中的错误。长大后，他成为当时最杰出的数学家、物理学家和天文学家。现在，电磁学中的一些单位，还是用他的名字来命名的，数学家们则称他为“数学王子”。

高斯八岁时进入乡村小学读书，教算术的是一位从城里来的老师。这位老师觉得在乡下教几个穷孩子读书，真是大材小用。他认为，穷人的孩子天生都是笨蛋，这些蠢笨的孩子一定不会把书念好。如果有机会，还要打他们几下，以使自己在这枯燥的生活里增添一些乐趣。

有一天，算术老师情绪很低落，同学们看到老师非常不

高兴的脸儿，都害怕起来，心想今天可能又有谁要挨老师的打了。

老师说："你们今天替我算算1加2，加3，加4，加5，一直加到100的和。谁算不出来，就罚他不准回家吃午饭！"老师讲完这句话，什么也不管，独自坐到椅子上看小说去了。

课堂里的小朋友们拿起石板开始计算：1加2等于3，3+3等于6，6加4等于10，10加5等于15，15+6等于21，21加7等于28，28加8等36，……有些小朋友加到几个数字后，就把石板上的结果擦掉了，继续加下去，数字越来越大，很不好算。不少孩子的脸涨得通红，有的孩子的头上渗出了汗珠。

还不到半点钟，小高斯拿起他的石板，走上前去，说："老师，答案是不是这样？"

老师头也不抬，挥着那肥厚的手说："去！回去再算！错了！"他想，不可能这么快就会有答案的。

可是，高斯却站着不动，把石板伸向老师面前，说："老师，我想这个答案是对的。"

算术老师本要怒吼起来，可是一看石板，上面整整齐齐写着：5050，他惊奇起来，因为他自己曾经算过，得到的数值也是5050。这个八岁的小鬼怎么这样快就得到了这个数值呢？

高斯解释了他发现的一个方法，这就是古时我国人和希

腊人用来计算级数 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ 的方法。高斯的发现使老师觉得羞愧，认识到自己以前目空一切和轻视穷人家孩子的想法是错误的。他以后也认真教起书来，并且还常从城里买些数学书自己进修，并借给高斯看。在他的鼓励下，高斯以后便开始在数学上作了一些重要的研究。

古时的中国人和希腊人怎样算 $1+2+3+\cdots\cdots+n$？宋朝数学家杨辉和他的学生们用 1 个圆球代表 1，用 2 个圆球代表 2，用 3 个圆球代表 3，当 $n\geqslant 4$ 时，用 n 个圆球代表 n，如图 1.1。

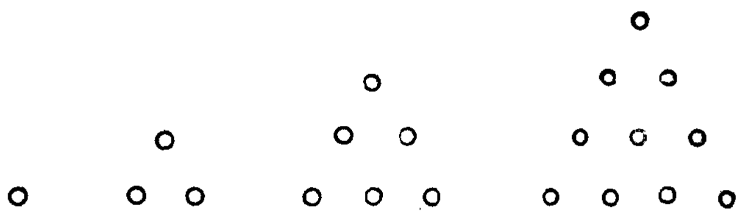

图 1.1

一般，我们用 S_n 来表示 $1+2+3+\cdots+n$ 的值。为要计算 S_n，我们可以设想有另外一个 S_n（这里用白圆球来表示），把它倒放，并和原来的 S_n 拼合起来，我们就得到一个平行四边形（如图 1.2）。这个平行四边形总共有 n 行，每一行均有 $n+1$ 个圆球，所以全部有 $n(n+1)$ 个圆球。这是两个 S_n，因此一个 S_n 应该是 $n(n+1)\div 2$，这就得到了 S_n 的公式：

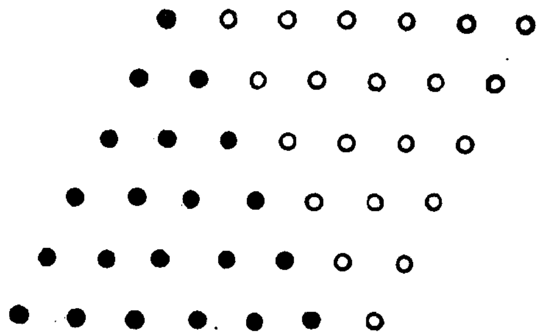

图 1.2

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

在上面的方法中，如果不采用直观的圆球，可以用算式表示如下。由于

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots(n-1) & n \\
+) & n & (n-1) & (n-2)\cdots & 2 & 1 \\
\hline
 & n+1 & n+1 & n+1 & \cdots\ n+1 & n+1
\end{array}$$

共有 n 个 $(n+1)$，所以

$$\begin{aligned}
&2\{1+2+3+\cdots+(n-1)+n\}\\
&=\{1+2+3+\cdots+(n-1)+n\}+\\
&\quad\{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\}\\
&=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{ 个}}\\
&=n(n+1).
\end{aligned}$$

这样也可以证明

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n-1).$$

作为上述方法的一个应用，我们来看一个对于奇数的有趣结果，即

$$\begin{aligned}
1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 1 = 1^3,\\
3+5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 8 = 2^3,\\
7+9+11\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 27 = 3^3,\\
13+15+17+19\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 64 = 4^3,\\
21+23+25+27+29\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 125 = 5^3,\\
31+33+35+37+39+41\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 216 = 6^3,\\
43+45+47+49+51+53+55\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 343 = 7^3,\\
57+59+61+63+65+67+69+71\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 512 = 8^3,\\
73+75+77+79+81+83+85+87+89\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 729 = 9^3,\\
91+93+95+97+99+101+103+105+107+109 &= 1000 = 10^3.
\end{aligned}$$

现在我们自然的会想到，一般的情况是否成立呢？下面我们将证明，对一般的情况来说，上述结果也是成立的。由上图，我们可以假设 $n\geqslant 11$。一般地说，第 n 行是

$$n(n-1)+1,\ n(n-1)+3,\ n(n-1)+5,\cdots n(n-1)+(2n-1).$$

如果我们能够证明

$$\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+3\}+\cdots+\{n(n-1)+(2n-1)\}=n^3 \qquad (1\text{-}1)$$

成立，则对于所有正整数 n，我们的结果是成立的。我们有

$$\begin{aligned}
&\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+3\}+\{n(n-1)+5\}\\
&+\{n(n-1)+7\}+\cdots+\{n(n-1)+(2n-1)\}\\
=&\,n(n-1)+n(n-1)+1+3+\{n(n-1)+5\}\\
&+\{n(n-1)+7\}+\cdots+\{n(n-1)+(2n-1)\}
\end{aligned}$$

$$=n(n-1)+n(n-1)+n(n-1)+1+3+5$$

$$+\{n(n-1)+7\}+\cdots+\{n(n-1)+(2n-1)\}$$

$$=\cdots$$

$$=\underbrace{n(n-1)+n(n-1)+n(n-1)+\cdots+n(n-1)}_{n\text{个}}+1+3$$

$$+5+7+\cdots+(2n-1)$$

$$=n^2(n-1)+1+3+5+7+\cdots+(2n-1). \qquad (1\text{-}2)$$

又，当 $n\geqslant 11$ 时，我们有

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$$

$$=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1.$$

由于

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 \\ +) & 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 3 & 1 \\ \hline & 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 2n \end{array}$$

上面共有 n 个 $2n$，所以我们有

$$2\{1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\}$$

$$=\{1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\}$$

$$+\{(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+(2n-7)+\cdots$$

$$+3+1\}$$

$$=n(2n)$$

$$=2n^2.$$

因此

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2. \quad (1\text{-}3)$$

将(3)式的结果代入(2)式右端，即得

$$
\begin{aligned}
&\{n(n-1)+1\}+\{n(n-1)+3\}+\cdots \\
&+\{n(n-1)+(2n-1)\} \\
&=n^2(n-1)+n^2 \\
&=n^3-n^2+n^2 \\
&=n^3.
\end{aligned}
$$

这就证明了(1-1)式是成立的。

第二节　关于欧拉的七桥问题

欧拉(L. Euler 1707—1783)在1727年二十岁的时候，被俄国请去在圣彼得堡（现在改名为列宁格勒）的科学院做研究工作。差不多在这个时候，他的德国朋友告诉他一个曾经令许多人困惑的问题，原来在当时的东普鲁士有一个小城镇叫做哥尼斯堡（Konig sberg）这城中有一条河横贯市内，河中心有两个小岛。在当时有七座桥把这两个小岛和对岸联

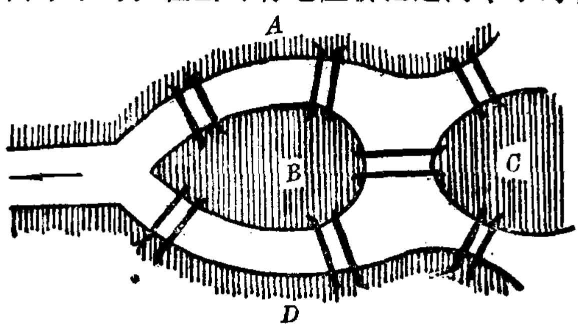

图　1.3

接起来（见图 1.3）。

在周末当地居民喜欢去城里散步买东西，有人曾想法子从家里出发走过所有的桥回到家里，他们想是否能够从某座桥出发，使得所有的桥都只走过一次，许多人试过都不成功。

欧拉的朋友告诉欧拉这个"哥尼斯堡七桥问题"要他想法子解决。

欧拉并没有跑到哥尼斯堡去走走。他把这个问题化成了这样的问题来看：把两岸和小岛缩成为一点，把桥化为边，两个顶点有边联结，而且仅当这点所代表的地区有桥联结起来，这样欧拉就得到一个图（见图 1.4），欧拉考虑这个图能否使用一笔画成，如果能够的话，则对应的七桥问题，也就能解决了。欧拉先研究一般能够一笔画成的图应该具有什么样的性质？他发现它们可以分成两类，全部点都是偶点或是两个奇点（欧拉把进出的边总数是偶数的点叫做偶点，把进出的边总数是奇数的叫奇点）。

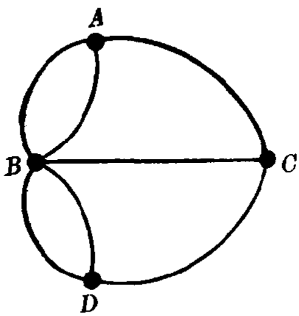

图 1.4

我们知道，如果一个图能够用一笔画成，那么在这个图上一定有一个点开始画，称作始点，同时也一定有终止点，称作终点。我们把图上的其它点称作过路点，因为我们要经过它，首先我们来看看过路点具有什么性质？它是有进有出

的点，也就是说如果有一个边进入这个点，那么就一定要有一条边从这点出去，不可能有出无进．否则它就会变为起点，也不可能有进无出，否则它就变为终点．因此，在过路点进出的边的总数应该是偶数，即过路点是偶点．

当起点和终点是同一个点时，那么它也是属于有进有出的类型的点，因此它一定是偶点，这样就得到图上全部点都是偶点．

如果起点和终点不是同一个点，那么它们一定是奇点，这样就知道图上应该有两个奇点．

由于七桥问题图中的点，都是奇点，即共有四个奇点，所以图 1.3 不可能够用一笔画成．

在巴黎(Paris)的情况就不同，有一条河，河中心有两个岛，有15座桥把这两个岛和对岸联接起来（见图５）．

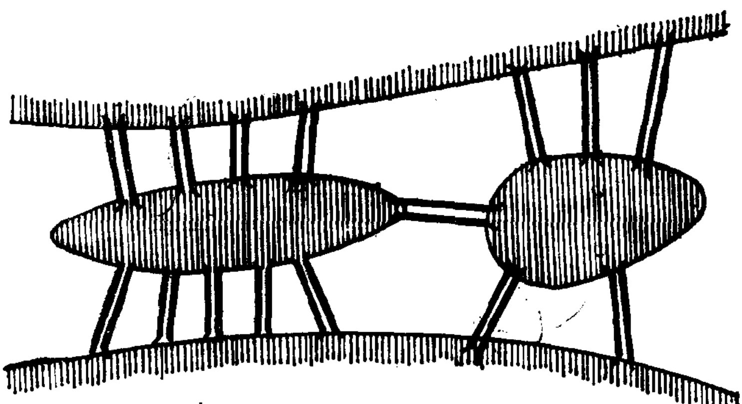

图 1.5

由于通过两岛之中任何一个岛的桥的数目都是偶数，而

通过两岸的任一个岸的桥的数目都是奇数，这就表示由任一个岸出发都存在一条路，使所有的桥都只走一次而到达另外一个岸。

第三节　关于魔术方阵

在我国人民的神话传说中，有一位人物是很著名的，他就是禹。据说早在四千多年以前，大禹为了治理那个容易泛滥成灾的黄河，曾经领导人民日夜奔忙地工作。据说，他几次过家门都没时间停下去看看妻儿，这种大公无私的精神，今天看来还是令人感动的。据传在大禹治好那滚滚汹涌的河流后，就有龙马从河中跃出献出河图，另外在洛河里也有一只大乌龟背驮洛书（见图 1.6）献给大禹。据说，洛书与河

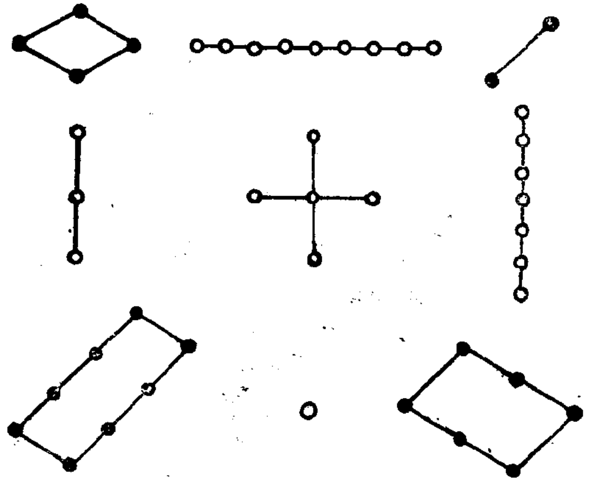

图　1.6　洛书

图都包含了治理国家的大道理。这传说历史倒很悠久，在《论语》中，孔夫子就因当时世风日下，人心不古，没有圣人之治，以致“河不出图”而感慨万千。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1.7

洛书上的每个圆圈都是代表一个1，所以如果我们把洛书上的图形用阿拉伯数字写出来，就是图1.7。图1.7是由1到9这九个数所组成的具有三行三列的一个方形阵列。其中每行、每列以及每条对角线上三个数之和都等于15。即

$$4+9+2=15,$$
$$3+5+7=15,$$
$$8+1+6=15,$$
$$4+3+8=15,$$
$$9+5+1=15,$$
$$2+7+6=15,$$
$$4+5+6=15,$$
$$2+5+8=15.$$

又在图1.7中我们有

$$2+6+8+4=20,$$
$$7+1+3+9=20,$$
$$6+8+4+2=20,$$
$$1+3+9+7=20,$$
$$8+4+2+6=20,$$