

高等学校教材

结构稳定理论

西北农业大学 何运林 编



水利电力出版社

内 容 提 要

本书详细地论述了各种结构构件的稳定计算理论，其顺序为首先介绍结构稳定分析方法，然后讨论轴心压杆、偏心压杆和刚架的稳定分析基本理论，接着介绍开口薄壁杆件、薄板和拱的稳定基本原理，最后论述了压杆的动力稳定计算方法。

本书可作为高等院校水利、土木建筑和工程力学专业研究生教材，亦可作为上述专业高年级学生的选修课教材，同时可供相应专业的教师及工程技术人员参考。

(京) 新登字 115 号

高等学校教材

结构稳定理论

西北农业大学 何运林 编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路 6 号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市朝阳区小红门印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 13.5 印张 311 千字

1995 年 9 月第一版 1995 年 9 月北京第一次印刷

印数 001—510 册

ISBN7-120-02231-8/TV·891

定价 10.50 元

前 言

本书是根据全国高校水利水电类专业教材编审出版规划编写的，作为水利工程、建筑工程和结构工程专业的研究生必修课统编教材。本书讲授 45 学时，共 20 万字。

全书共分八章，第一章详细论述结构稳定分析方法，包括静力法、能量法、变分法、势能驻值原理、瑞利-里兹法、伽辽金法、差分法以及有限单元法等。第二章~第七章，分别介绍轴心压杆、偏心压杆、刚架、开口薄壁杆件、薄板以及拱的稳定分析方法，也是第一章各种稳定分析方法在各种构件中的具体应用和深化。第八章讨论了压杆的动力稳定性计算方法，并介绍了有关实验研究成果。

本教材的特点：既重视基本理论和基本概念，又考虑便于读者自学和理解，因此编入了较多的例题，以帮助读者消化吸收。书中既介绍传统的分析方法，又反映了近代中外有关研究成果和规范规定的计算方法，例如刚架柱的计算长度，编入了美国规范、吕烈武教授和本书作者的研究成果——弧形钢闸门支臂柱的计算长度等。本教材也十分重视先进国家的稳定计算方法，在书中的第二及第三两章中，分别介绍了西欧、美国、加拿大和日本等国在计算轴心压杆和偏心压杆方面的稳定计算公式。

本书由河海大学俞良正教授担任主审。他对书稿作了认真审查，并提出了宝贵意见，特此致谢。

由于水平有限，书中不当之处在所难免，请读者指正。

何运林

1993 年 12 月于西北农业大学

目 录

前 言

第一章 稳定分析方法	1
第一节 稳定的基本概念	1
第二节 中性平衡法(静力法)	2
第三节 轴心压杆的高阶微分方程	4
第四节 能量法	8
第五节 变分法	12
第六节 势能驻值法	17
第七节 瑞利-里兹法	19
第八节 伽辽金法	22
第九节 差分法	26
第十节 有限单元法	32
第二章 轴心压杆的稳定性	45
第一节 杆端在理想约束条件下压杆的临界荷载	45
第二节 杆端在弹性约束条件下压杆的临界荷载	49
第三节 初弯曲和初偏心的影响	52
第四节 轴心压杆的非弹性屈曲	57
第五节 残余应力对轴心压杆屈曲的影响	62
第六节 压杆的大挠度理论	64
第七节 世界主要国家采用的设计公式	69
第三章 偏心压杆的稳定性	75
第一节 偏心压杆的特点	75
第二节 偏心压杆按边缘屈服准则的计算方法	76
第三节 偏心压杆按相关公式的计算方法	81
第四节 偏心压杆的简化计算方法	83
第五节 世界主要国家采用的设计公式	86
第四章 刚架的稳定性	91
第一节 刚架的屈曲模态	91
第二节 刚架的临界荷载——中性平衡法	92
第三节 刚架的临界荷载——转角位移法	97
第四节 刚架的临界荷载——有限单元法	104
第五节 刚架柱的计算长度	107

第六节	弧形钢闸门框架柱的计算长度	114
附录	弧形钢闸门主框架按有限单元法求解稳定问题的计算机程序	124
第五章	开口薄壁杆件的扭转与稳定性	138
第一节	开口薄壁杆件扭转的基本概念	138
第二节	开口薄壁杆件弯曲扭转的应变能	142
第三节	开口薄壁杆件弯曲扭转的荷载势能	144
第四节	轴心压杆弯曲扭转屈曲的临界荷载	146
第五节	工字形截面简支梁受均匀弯曲时的侧向稳定性	148
第六节	工字形截面简支梁受集中荷载时的侧向稳定性	150
第七节	工字形截面梁侧向屈曲的临界弯矩通式	153
第六章	薄板的稳定性	157
第一节	薄板的屈曲微分方程	157
第二节	单向均匀受压简支矩形板的临界荷载	162
第三节	薄板弯曲的应变能	164
第四节	单向均匀受压四边固定矩形板的临界荷载	166
第五节	受剪四边简支矩形板的临界荷载	168
第六节	各种受力及支承条件下板的屈曲系数	172
第七节	薄板的非弹性屈曲	174
第八节	薄板的大挠度理论	177
第九节	单向受压板的屈曲后性能及极限荷载	181
第七章	拱的稳定性	187
第一节	概述	187
第二节	圆拱的临界荷载	188
第三节	抛物线拱及悬链线拱的临界荷载	192
第四节	拱的计算长度系数	195
第八章	压杆的动力稳定性	197
第一节	压杆的运动基本方程	197
第二节	突然施加荷载的稳定分析	198
第三节	弧形闸门柱的动力稳定分析	200
第四节	弧形闸门柱动力稳定性的试验研究	204
附录	钢与混凝土组合柱的稳定设计公式	206
	主要参考文献	209

第一章 稳定分析方法

第一节 稳定的基本概念

受压构件的承载能力，主要由强度条件和稳定条件来决定。一个结构是否稳定，是结构工程设计中与强度计算同样重要的问题。如果对结构稳定问题没有足够的注意或考虑不周，会导致结构丧失稳定，产生严重事故。例如1907年加拿大圣劳伦斯河上的魁北克桥，在施工过程中，由于悬臂桁架中受压最大的下弦杆丧失稳定，致使桥梁倒塌，9000t钢结构变成一大堆废铁，伤亡75人。1922年美国华盛顿镍克尔卜克尔剧院，在一场特大雪中倒塌，原因系由于屋顶结构中一根梁超载，引起梁丧失稳定，从而导致建筑物倒塌，死亡98人，受伤100余人。又如我国广东鹤地水库溢洪道上的弧形钢闸门，于1966年由于库区刮起7级阵风，浪高0.6m，波浪反复冲击闸门，使弧门支臂柱失稳，从而导致闸门破坏，弧门支臂柱失稳现象，如图8-4所示。

在工程实践中，丧失稳定有两种类型。第一类稳定问题的特征是：当荷载逐渐增加时，结构原有的变形形式被破坏了，并出现

与以前完全不同的发展很快的新变形形式。图1-1(a)为轴心受压柱丧失稳定的例子：如果荷载 P 小于临界荷载，则柱仍然是直的，这种直线平衡形式是稳定的；当荷载 P 逐渐增加时，直线平衡形式就会变成不稳定的；当荷载 P 达到某一值时，柱就会产生新的变形，即弯曲变形，此时的荷载就称为柱的临界荷载

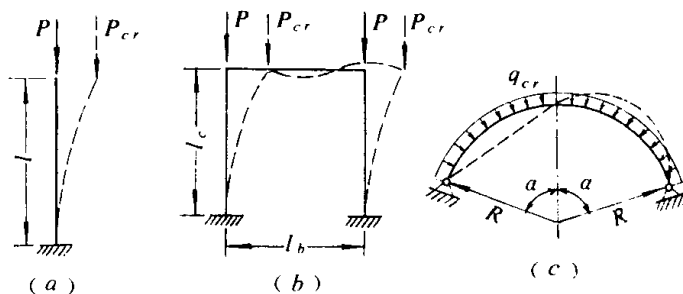


图1-1 构件和结构失稳的变形曲线

载(P_{cr})。图1-1(b)为对称刚架丧失稳定的例子，图1-1(c)为承受静水压力作用的圆拱，产生类似于波浪形的曲线弯曲丧失稳定的例子。

从上述几个丧失稳定的实例可以看出，第一类稳定问题经常与结构变形形式的质变相关，故又称质变失稳，因为它出现了新的与变形前平衡形式有本质区别的平衡形式。

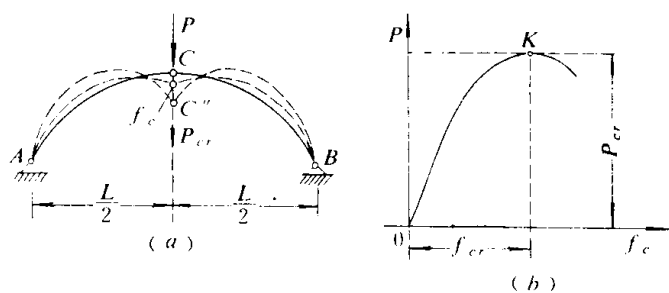


图1-2 三铰拱失稳的变形曲线及 $f_c \sim P$ 关系曲线

第二类稳定问题的特征是：原来的变形大大地发展，但不出现新的变形形式。三铰拱丧失稳定就属于这类稳定问题的例子，见图1-2(a)。当荷载 P 不大时，拱顶铰 C 的挠度 f_c 也不大，当荷载 P 逐渐增大时，拱发生弯曲变形，铰 C 逐渐下降，此时内外力保持平衡，然而可能出现不增加荷

载 P , 挠度 f_c 也会逐渐增加, 甚至减小 P 时挠度 f_c 也能增加, 此时, f_c 与 P 的关系可表示为图 1-2 (b), 图中 $f_c \sim P$ 关系曲线顶点 K 的相应 P 值, 叫做临界荷载。

从图 1-2 中丧失稳定的实例可看到, 结构的变形总是朝着一个方向发展, 并且变形不产生质的变化, 而只是量的变化, 所以这类稳定问题又称为量变失稳。

结构工程中的压杆、梁、板、刚架和拱等, 都可能会由于刚度不够而丧失稳定。例如对于理想的轴心压杆、梁和薄板, 原来为平直的构件, 在荷载作用下, 当受外界干扰时, 会发生纵向弯曲、侧向弯曲扭转或鼓曲等变形。当构件承受的荷载小于临界荷载时, 外界干扰消除后, 构件能立即恢复到原来的直线压缩或平面弯曲状态, 这时构件处于稳定平衡。当荷载增大到临界荷载时, 构件立即由稳定平衡转变为不稳定平衡, 即使外界干扰消除后, 构件非但不能恢复到原来的平直状态, 而且弯曲、扭转或鼓曲等变形还会突然增大, 从而导致破坏。

对于理想的平直构件, 当由稳定平衡变为不稳定平衡时, 要经历一个暂时的中性平衡, 又称为临界平衡, 在外界干扰消除后, 构件能暂时保持微曲状态的平衡, 例如压杆的曲线平衡或梁的侧向弯扭平衡等。根据中性平衡时微小的弯曲、扭转或鼓曲变形, 可以建立近似的或精确的微分方程; 在求解微分方程和引用边界条件的过程中, 可得到线性齐次代数方程组, 应用方程组中系数行列式等于零的条件, 可得特征方程或稳定方程, 从而可求得临界荷载。

应该指出, 不管是第一类稳定问题还是第二类稳定问题, 它都与强度问题有明显的区别和不同的目的。强度问题是要找出结构在稳定平衡状态下的最大应力, 故为应力问题; 研究强度问题的目的, 是要保证实际的最大应力不超过材料的某一强度指标。稳定问题是要找出与临界荷载相对应的临界状态, 因为结构的稳定计算必须根据结构的变形状态来进行, 故为变形问题; 研究结构稳定问题的主要目的, 在于防止不稳定平衡状态的发生。

第二节 中性平衡法 (静力法)

静力法又称中性平衡法, 是一种常用的稳定分析方法, 它根据构件处于中性平衡状态时的平衡关系, 来求解构件失稳时的临界荷载。

现在讨论采用静力法, 对压杆进行稳定分析的实例。设有一轴心压杆 (图 1-3), 压杆为等截面并由同一材料制成, 承受的轴心压力为 P 。为了便于研究, 须将轴心压杆理想化, 设有下列 4 条假定:

- (1) 压杆轴线为理想笔直, 荷载沿其形心轴作用;
- (2) 压杆横截面为双轴对称, 弯曲中心与截面形心重合, 屈曲时不发生扭转;
- (3) 材料力学性能符合虎克定律;

(4) 压杆纵向弯曲的挠度微小, 设沿截面主轴 x 方向的挠度用 u 表示。虽然曲率的精确公式为: $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2u}{dz^2} / \left[1 + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}$, 但由于式中的 $\left(\frac{du}{dz} \right)^2$ 与 1 相比很小, 可略去不计, 故小挠度压杆的曲率可近似地用 $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2u}{dz^2}$ 来表示, 从而可用线性微分方程求解。

在上述假定下的屈曲，可称为理想的小挠度压杆的弹性屈曲。当压力 P 达到临界荷载值时，压杆便能暂时保持如图 1-3 (b) 中实线所示的微弯平衡状态。从材料力学可知，压杆在轴向压力 P 作用下，压杆轴线的曲率 $\frac{1}{\rho}$ 与弯矩 M 之间的关系应为

$$EI \frac{1}{\rho} = -M \quad (1-1)$$

式中 $\frac{1}{\rho}$ —— 弯曲轴线上任意一点的曲率。

按上述小挠度理论的分析，式 (1-1) 可变为

$$EI \frac{d^2u}{dz^2} = -M \quad (1-2)$$

式 (1-2) 即为小挠度情况下，压杆挠度曲线的近似微分方程，由于压杆任一截面处的弯矩 $M = Pu$ ，故 (1-2) 式又可表示为

$$EI \frac{d^2u}{dz^2} = -Pu \quad (1-3)$$

式 (1-3) 就是压杆在中性平衡时，压杆横截面的内力矩等于外力矩的表达式，也就是取微弯压杆 z 处截面以下的杆段分离体的力矩平衡式，如图 1-3 (c) 所示。

将式 (1-3) 全式除以 EI ，并令

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (1-4)$$

则微分方程式 (1-3) 可写为

$$\frac{d^2u}{dz^2} + k^2u = 0$$

或表示为

$$u'' + k^2u = 0 \quad (1-5)$$

这是一个二阶线性齐次常微分方程式，它的通解为

$$u = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (1-6)$$

式中 C_1 、 C_2 —— 积分常数，可由下列边界条件求得。

对于两端铰接的轴心压杆，两端支座处的挠度为零，其边界条件为

$$z=0 \text{ 时, } u=0$$

$$z=l \text{ 时, } u=0$$

将此二边界条件代入式 (1-6)，可得下列含 C_1 、 C_2 两个积分常数的齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} 0 + C_2 &= 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

上列线性齐次方程组有非零解的条件为，令该式未知常数 C_1 、 C_2 的系数所形成的行列

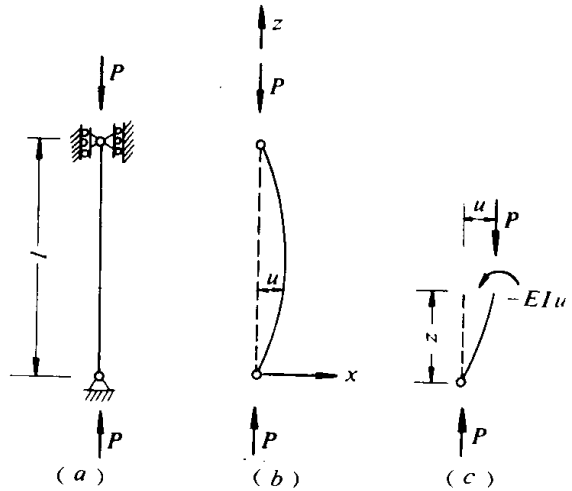


图 1-3 两端铰支轴心压杆计算简图

式等于零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0 \quad (1-8)$$

式(1-8)称为特征方程或稳定方程，将其展开得

$$\sin kl = 0$$

故 $kl = n\pi$ (1-9)

式中 n ——正整数，即 $n=1, 2, 3, \dots$ 。

将式(1-4)代入式(1-9)得

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (1-10)$$

当 $n=0$ 时，则 $P=0$ ，这时压杆未承受压力；当 $n=1$ 时，则 $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ ，显然，式(1-10)为理想轴心压杆弯曲失稳时的最小压力值，也就是工程上需要的临界荷载值，即

$$P_{\sigma} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1-11)$$

这个临界荷载又称为欧拉荷载。但是它与实际压杆的屈曲荷载有所区别：按照线性理论分析，使理想压杆达到中性平衡时的荷载，称为临界荷载；而把实际的非理想压杆产生弯曲失稳（屈曲）时的荷载，称为屈曲荷载。

轴心压杆达到临界荷载时的挠曲形状，可按式(1-6)利用 $z=0$ 时 $u=0$ 的边界条件，得到 $C_2=0$ ，将此积分常数代入式(1-6)则得

$$u = C_1 \sin kz$$

再将式(1-9)代入上式得

$$u = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l}$$

当取 $n=1$ 时，上式则变为

$$u = C_1 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (1-12)$$

式(1-12)即为轴心压杆的屈曲模态，也就是两端铰支理想轴心压杆的挠曲线形状。在线性柱子理论特征值问题中，方程式(1-12)即挠曲线形状，就称为特征向量，由于式中的 C_1 值是不能确定的，所以，只能确定特征向量的形状，而不能确定 u 的幅值。上述结论只适用于线性柱子理论，即按小挠度柱子理论分析所得结果。如果按非线性柱子理论，即大挠度柱子理论分析，由于它采用了曲率的精确表达式，则压杆挠曲时的中点挠度值是确定的。

第三节 轴心压杆的高阶微分方程

高阶微分方程的优点，在于它可以求解任何边界条件压杆的临界荷载，如果用二阶微分方程求解临界荷载，必须先对不同边界条件的轴心压杆建立不同的方程，而每一个方程

仅对某一特定边界条件的压杆有效。

现以梁柱为例，来推导轴心压杆的四阶微分方程。所谓梁柱就是指既承受轴心压力 P ，又承受横向荷载 q 的杆件，又称为压力-弯曲构件（图 1-4）。

图 1-4 (a) 为一梁柱，假设梁柱的材料性能服从虎克定律，轴心压力 P 和横向均布荷载 q 作用在同一平面内，属小变形。从该图中任取一微段 dz ，如图 1-4 (b) 所示，其平衡条件为

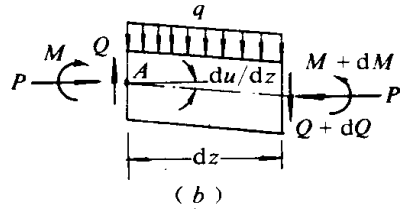
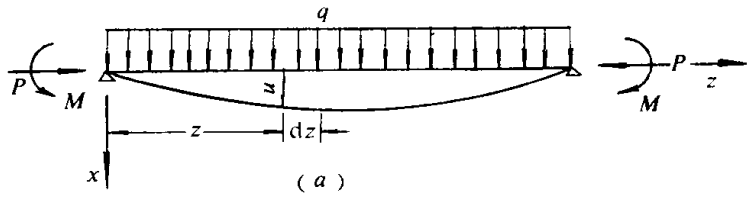


图 1-4 梁柱的计算简图

$$\sum X = 0, -Q + qdz + (Q + dQ) = 0$$

故
$$q = -\frac{dQ}{dz} \quad (1-13)$$

$\sum M_A = 0$ ，即对 A 点取矩，得

$$M + qdz \frac{dz}{2} + (Q + dQ)dz - (M + dM) + P \frac{du}{dz} dz = 0$$

考虑为小变形，可忽略二阶微量，得

$$Q = \frac{dM}{dz} - P \frac{du}{dz} \quad (1-14)$$

由式 (1-2) 知， $EI \frac{d^2 u}{dz^2} = -M$ ，将此式代入式 (1-14) 得

$$EI \frac{d^3 u}{dz^3} + P \frac{du}{dz} = -Q$$

将上式再对 z 求导一次得

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{dQ}{dz} \quad (1-15)$$

将式 (1-13) 代入式 (1-15) 得

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} = q \quad (1-16)$$

式 (1-16) 即是梁柱弯曲时的基本微分方程式。当为轴心压杆时，横向荷载应为零，即 $q = 0$ ，这样式 (1-16) 就变为

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad (1-17)$$

将式 (1-4) $k^2 = \frac{P}{EI}$ 代入上式则得

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad (1-18)$$

式 (1-18) 即为所求的轴心压杆四阶齐次微分方程式。它适用于任何边界条件，其通解为

$$u = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4 \quad (1-19)$$

式中 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 ——分别为积分常数，可根据所研究杆件的边界条件确定。

为便于应用，下面介绍各种支承情况的边界条件和式 (1-19) 的各阶导数。

边界条件为:

$$\begin{aligned} \text{铰支端 } u=0, \frac{d^2u}{dz^2}=0 \\ \text{固定端 } u=0, \frac{du}{dz}=0 \\ \text{自由端 } \frac{d^2u}{dz^2}=0, \frac{d^3u}{dz^3}+k^2\frac{du}{dz}=0 \end{aligned}$$

式 (1-19) 的各阶导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dz} &= C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz + C_3 \\ \frac{d^2u}{dz^2} &= -C_1 k^2 \sin kz - C_2 k^2 \cos kz \\ \frac{d^3u}{dz^3} &= -C_1 k^3 \cos kz + C_2 k^3 \sin kz \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

【例 1-1】 试用高阶微分方程求解两端固定轴心压杆的临界荷载。

解 轴心压杆四阶微分方程式的通解为

$$u = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4 \quad (1)$$

当轴心压杆两端固定时, 其边界条件为

$$\begin{aligned} \text{当 } z=0 \text{ 时, } u=0, \frac{du}{dz}=0 \\ \text{当 } z=l \text{ 时, } u=0, \frac{du}{dz}=0 \end{aligned}$$

将式 (1) 代入上列 4 个边界条件, 得

$$\left. \begin{aligned} u(0)=0, 0+C_2+0+C_4=0 \\ u'(0)=0, C_1 k+0+C_3+0=0 \\ u(l)=0, C_1 \sin kl+C_2 \cos kl+C_3 l+C_4=0 \\ u'(l)=0, C_1 k \cos kl-C_2 k \sin kl+C_3+0=0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上列方程组 (2) 为线性齐次方程组, 该方程组有非零解的唯一条件是: 其系数所构成的行列式应等于零, 即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ k \cos kl & -k \sin kl & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

展开上述行列式 (3) 得

$$2(\cos kl - 1) + kl \sin kl = 0 \quad (4)$$

按三角恒等式, (4) 式中的 $\sin kl$ 及 $\cos kl$ 可表示为下式

$$\left. \begin{aligned} \sin kl &= 2 \sin\left(\frac{kl}{2}\right) \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \\ \cos kl &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{kl}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (4) 并整理得

$$\sin\left(\frac{kl}{2}\right)\left[\frac{kl}{2}\cos\left(\frac{kl}{2}\right)-\sin\left(\frac{kl}{2}\right)\right]=0 \quad (6)$$

显然式 (6) 有两个解答分述如下:

第一个解: 令式 (6) 的第一项等于零, 即

$$\sin\left(\frac{kl}{2}\right)=0$$

故

$$\frac{kl}{2}=n\pi$$

即

$$kl=2n\pi \quad (7)$$

因

$$k^2=\frac{P}{EI} \quad (8)$$

由式 (7) 得 $k=\frac{2n\pi}{l}$ 代入式 (8) 得

$$P_{cr}=\frac{4n^2\pi^2 EI}{l^2} \quad (9)$$

当式 (9) 中的 $n=1$ 时, 可获得最小临界荷载值, 即

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2} \quad (10)$$

第二个解: 令式 (6) 中方括号内的因式等于零, 即

$$\frac{kl}{2}\cos\left(\frac{kl}{2}\right)-\sin\left(\frac{kl}{2}\right)=0$$

全式各项除以 $\cos\left(\frac{kl}{2}\right)$ 得

$$\operatorname{tg}\left(\frac{kl}{2}\right)=\frac{kl}{2} \quad (11)$$

上述三解方程式 (11) 可用图解法求得最小根为

$$\frac{kl}{2}=4.493 \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (8) 得临界荷载为

$$P_{cr}=\frac{8.1815\pi^2 EI}{l^2} \quad (13)$$

现将第一个解式 (10) 与第二个解式 (13) 分别示于图 1-5 (a) 和图 1-5 (b) 中。图 (a) 为对称屈曲型式, 图 (b) 为反对称屈曲型式。从公式 (10) 和公式 (13) 可以看出, 后者大于前者, 然而这个大的临界荷载, 只有当压杆中点有侧向支撑时, 才具有实际意义。

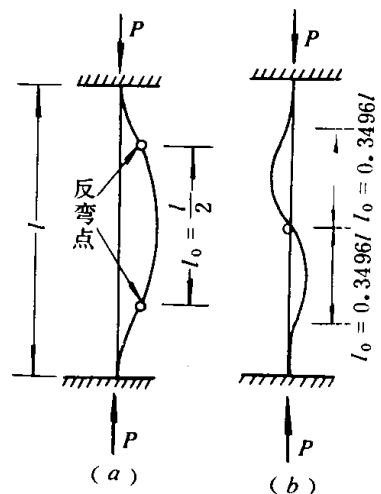


图 1-5 两端固定轴心压杆屈曲型式

【例 1-2】 试用四阶微分方程，求解下端固定、上端不能转动、但可自由侧移的轴心压杆的临界荷载（图 1-6）。

解 该轴心压杆的四阶微分方程的通解为

$$u = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4$$

采用下列四个边界条件，求通解中的 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 等四个积分常数。

边界条件为

$$\text{当 } z=0 \text{ 时, } u=0$$

$$\text{当 } z=0 \text{ 时, } u' = 0$$

$$\text{当 } z=l \text{ 时, } u' = 0$$

$$\text{当 } z=l \text{ 时, 剪力为零, } u''' = 0$$

由上述四个边界条件，可得下列四个方程式为

$$u(0) = 0, C_2 + C_4 = 0 \quad (1)$$

$$u'(0) = 0, C_1 k + C_3 = 0 \quad (2)$$

$$u'(l) = 0, C_1 k \cos kl - C_2 k \sin kl + C_3 = 0 \quad (3)$$

$$u'''(l) = 0, -C_1 k^3 \cos kl + C_2 k^3 \sin kl = 0 \quad (4)$$

由式 (3)、式 (4) 得

$$C_3 = 0$$

由式 (2) 得

$$C_1 = 0$$

代入式 (4) 得

$$C_2 \sin kl = 0 \quad (5)$$

式 (5) 中 C_2 有非零解的条件为 $\sin kl = 0$

则该式的最小非零解为 $kl = \pi$ 又因 $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ，因此可得该压杆的临界荷载为

$$P_{\sigma} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (6)$$

显然，该临界荷载值，与两端铰接轴心压杆的临界荷载值相同。

第四节 能量法

前节的静力法，是建立微曲中性平衡状态下的平衡微分方程并获得临界荷载的精确解。但是，在很多情况下，当求解微分方程很困难或者不可能时，例如对变截面压杆以及受非

均匀压缩力作用的杆件，由于所建立的微分方程将是变系数的，因此这种方程的求解就十分困难，这时就有必要采用近似分析方法。本节介绍的能量法就是近似分析方法之一，以下各节还将分别介绍各种近似分析方法。

铁摩辛柯的能量法是建立在能量守恒原理基础上的，按照能量守恒原理，一个保守系统处于平衡状态的充要条件为：存贮于该系统内的应变能必须等于外荷载所做的功。所谓保守系统是指内力与外力所做的功与该力经过的路线无关，只取决于力的初始位置与最终位置。当由于非弹性性能引起的内摩擦或外摩擦存在时，就成为非保守系统。

现在讨论如何运用能量法求解轴心压杆的临界荷载。图 1-7 (a) 为一轴心压杆，在轴心压力 P 作用下压杆轴向压缩为 Δ_c ，压杆保持理想的直线平衡状态，此时外力所做的功 W 和杆内的应变能 U 分别为

$$W = \frac{1}{2} P \Delta_c$$

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

将 $\Delta_c = \frac{PL}{AE}$ 代入外力功 W 的表达式，则得到外力功 W 等于压杆压缩应变能 U 的表达式，即

$$W = \frac{1}{2} P \Delta_c = \frac{P^2 L}{2AE} = U$$

上式表明：轴心压杆在直线平衡状态时，符合能量守恒原理。当压杆处于微弯的中性平衡时，如图 1-7 (b) 所示，由于压杆弯曲使应变能产生增量 ΔU ，同时由于外力 P 继续向下移动了 Δl ，外力功又产生了增量 ΔW 。在临界荷载作用下，压杆不仅在直线状态能保持平衡，在微弯状态下也能保持平衡，因此，按照能量守恒原理，压杆从直线平衡过渡到微弯平衡时，所产生的外力功增量 ΔW 必须等于应变能增量 ΔU ，从而得到确定临界荷载的能量守恒原理的表达式

$$\Delta W = \Delta U \quad (1-21)$$

式中 ΔW ——压杆在常量轴心压力作用下，构件弯曲时外力功的增量；

ΔU ——压杆在常量轴心压力作用下，构件弯曲时应变能的增量。

由图 1-7 (b) 知，轴心压力 P 所做的功 ΔW 可表示为下式

$$\Delta W = P \Delta l \quad (1-22)$$

$$\Delta l = s - l \quad (1-23)$$

式中 Δl ——压力 P 作用下，构件弯曲产生的位移增量；

s ——压杆弯曲后的曲线长度；

l ——压杆曲线在杆轴线上的投影长度。

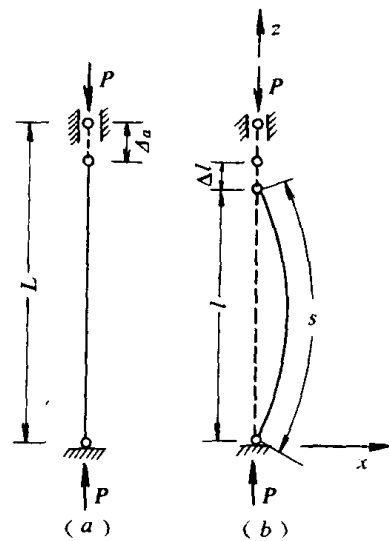


图 1-7 能量法解轴心压杆的简图

因为 $ds = (dz^2 + du^2)^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz$, 对其进行积分, 左端从 0 积到 s , 右端从 0 积到 l , 得

$$s = \int_0^l \left[1 + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz$$

用二项式定理展开上式, 考虑压杆变形微小, 忽略 $\left(\frac{du}{dz} \right)^2$ 以上的高阶项, 则 $s = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right] dz$, 将该式代入式(1-23), 得

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz \quad (1-24)$$

再将式(1-24)代入式(1-22), 则得到外功增量为

$$\Delta W = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz \quad (1-25)$$

该轴心压杆弯曲应变能的增量为

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz \quad (1-26)$$

因为 $M = -EI \frac{d^2u}{dz^2}$, 将该式代入式(1-26)得

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2u}{dz^2} \right)^2 dz \quad (1-27)$$

将式(1-25)及式(1-27)代入能量守恒原理表达式(1-21), 即得到计算临界荷载的公式为

$$P_{cr} = \frac{\int_0^l EI (u')^2 dz}{\int_0^l (u')^2 dz} \quad (1-28)$$

显然, 为了求解式(1-28), 必须先假定轴心压杆的变形曲线, 即位移函数 $u(z)$ 的表达式, 然后才能计算式中的积分, 下面举例说明用能量法求压杆临界荷载的具体应用。

【例 1-3】 试用能量法求解两端铰接轴心压杆的临界荷载。

为了研究用能量法求临界荷载的一些特点, 下面假设不同的变形曲线进行分析。

解 1 设轴心压杆的变形曲线为一个正弦半波, 即位移函数为 $u = A \sin \frac{\pi z}{l}$, 该式满足下列边界条件, 即

几何边界条件 $z=0$ 处, $u=0$

$z=l$ 处, $u=0$

力学边界条件 $z=0$ 处, $u'=0$

$z=l$ 处, $u'=0$

根据假设的变形曲线表达式, 可求得挠度的一阶导数和二阶导数为