实验物理中的概率和统计

朱永生 著

内 容 简 介

本书介绍实验物理中所涉及的概率和数理统计方面的问题，内容包括：概率论初步，随机变量及其子样和它们的分布，参数估计（极大似然法、最小二乘法、矩法），假设检验，蒙特-卡罗方法，还简要地介绍了参数估计必须用到的极小化的有关知识. 书中讨论了取自普通物理、核物理、粒子物理和工程技术问题的不少实例，具体地讲述概率与统计的理论在实验测量中的应用. 书末附有较详尽的数理统计表，可供本书涉及的几乎所有概率统计问题之需要，而无需查阅专门的数理统计表书籍.

本书可供实验物理工作者和大专院校有关专业师生、理论物理研究人员、工程技术人员参考.

实验物理中的概率和统计

朱永生 著

责任编辑 赵惠芝

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1991 年 2 月第一次印刷 印张：19 3/4

印数：0001－1 400 字数：521 000

ISBN 7-03-001529-0/O·308

定价：20.10 元

J241/27/16

序

科学观测或实验的任务，是通过适当的方法和测量手段对社会或自然现象进行观测，并对测量结果进行正确的分析处理，以抽象出对自然或社会现象的规律性认识．这一过程中，在提出科学假设和适当的实验方案后，实验数据的获取和实验数据的分析处理便是缺一不可的两大环节．随着人类对自然界和社会的研究日益广泛和深入，许多现象的观测变得极为复杂和困难，只有组织相当规模的科技队伍，耗费大量资金制作庞大精密的设备才能进行测量研究，有些课题甚至需经过多年努力才能获得少量资料和数据．天文和宇航，核和粒子物理，国民经济和人口的统计，以及其它许多领域都不乏此种例证．通过如此艰巨努力获得的珍贵资料，如果仅仅因为分析处理的失当而使研究工作功亏一篑，那无疑是科学工作者的严重失职．可见，实验数据的正确分析处理之重要自不待言．

随机现象的发现和确认是认识史上的一大飞跃．最初，人们熟悉的大多是确定性现象，匀速圆周运动可作为一例．知道了初始位置和线速度，可以确定无疑地预期任一时刻的状态．但如步枪打靶那样的事实告诉我们，无论使用多精确的瞄准具，远距离的靶纸上弹着点总是呈现某种分布，不可能落在同一点上．也许这可归之为风向、风速、湿度、气流等诸因素微小变化综合影响的结果，但不稳定粒子的寿命并不受环境的影响．同时产生的许多同样的不稳定粒子，发生衰变的时刻却可以全然不同，对单个粒子而言，衰变的时刻是完全随机的，无规律可循．可见，随机现象是客观的实在．许多领域诸如核和粒子物理、原子能科学技术、化学、遗传学、生物学和医学、固体物理、地震学、经济学、统计学等等，无不涉及随机现象．可以说，掌握随机性数学的基本内容和方法，是从事实

验物理和有关学科研究的科学工作者、工程技术人员的一项基本功.

本书作者长期从事实验物理研究工作，近几年又参加过著名实验物理学家丁肇中教授领导的国际合作实验研究组，在当时世界上能量最高的正负电子对撞加速器PETRA上进行有关胶子存在和精密验证量子电动力学等方面的实验工作，参加了实验数据的计算机分析处理. 他根据自己在科学实验中积累的经验和心得，从实验物理的角度着眼，撰写了《实验物理中的概率和统计》一书. 该书贯穿了数学与物理问题密切结合的思想，避免过于抽象和过于数学化的讨论，但又注意了包容为处理物理问题所需的较为广泛的随机性数学基础知识. 在内容的选择和安排，原理的阐述方式，研究实例的讨论诸方面，都适合于实验物理工作者的需要. 可以相信，本书的出版，对实验物理数据分析水平的提高会起到应有的作用，对于有关学科的理论工作者、大专院校师生和工程技术人员，也不失为一本好的参考书.

赵忠尧

1988年10月3日

前 言

科学研究的基本手段之一，是通过科学实验对一定的物理量进行观察和测量，以得到一系列实验数据. 但只有运用一定的数学工具对实验数据进行正确的分析和整理，才能总结出所测定物理量之间的规律性联系，从而认识所研究对象的本质.

随着社会的发展，在自然科学和社会科学的许多领域中，随机现象的作用越来越重要. 大至广漠的宇宙，小至渺不可见的基本粒子，远至探索生命奥秘的遗传工程，近至有关国计民生的经济活动，概率和随机现象几乎处处存在. 因此，随机性数学就成为研究自然和社会客观规律，特别是实验科学的重要工具之一.

关于概率和数理统计的书籍一般侧重于数学上的严密和确切，但对于以随机性数学为工具研究客观规律的科学工作者而言，更为迫切的是了解随机性数学的基本内容和方法，并在自己的工作中正确地运用它们. 因此，本书力求从数学与物理问题相结合这一前提出发，阐述概率与数理统计的基本内容，而避免过于抽象和过于数学化的讨论. 重点是介绍基本概念、基本原理和方法，阐明方法的应用及适用条件，而不是对定理作严格的证明和推导，有些定理或结论只是直接引用，但与实验测量数据处理直接相关的内容则予以充实和强调. 例如 § 4.3, § 6.4, § 8.5—§ 8.9, § 9.4.4, § 9.5, § 9.6, § 9.9, § 10.4, § 12.8, § 13.4.5 的内容，都是其它数理统计书籍中较少涉及而在实验测量数据处理中经常遇到的问题或处理方法. 书中的示例有双重目的：首先使所介绍的原理和方法具体化，以便加深理解；其次是阐明如何在实际问题中正确地运用它们. 一部分例子取自核物理和基本粒子物理，并对理解它们所需的知识作了简单的介绍，学过大学普通物理的读者对此不会感到困难. 非该专业的读者可以从正确应用概率统计原理处理问

题的角度来阅读它们．本书对数学准备知识的要求限于函数、微积分、向量和矩阵的运算．

当作者刚从事科学研究时，即有幸在我国核物理界著名前辈实验物理学家赵忠尧先生的指导下学习和工作．他经常以亲身的经验强调实验观测和实验数据的正确分析整理对探索科学规律的极端重要性．他对本书的写作始终热情地关怀和鼓励，并为之写了序言，作者谨表示衷心的感谢．张竹湘同志协助绘制了本书的全部插图，在此谨致谢意．

限于本人水平，疏漏不足之处在所难免，诚恳欢迎专家和读者提出宝贵意见．

作者

目　　录

第一章　概率论初步 ……………………………………………1

§1.1　随机试验,随机事件,样本空间……………………………1

§1.2　概率……………………………………………………4

§1.3　条件概率,独立性 ………………………………………7

§1.4　概率计算举例……………………………………………9

§1.5　边沿概率,全概率公式,贝叶斯公式 ……………………15

第二章　随机变量及其分布…………………………………………18

§2.1　随机变量… ……………………………………………18

§2.2　随机变量的分布 ………………………………………19

§2.3　随机变量函数的分布 …………………………………24

§2.4　随机变量的数字特征 …………………………………26

§2.5　随机变量的特征函数 …………………………………32

§2.6　离散随机变量的概率母函数 …………………………35

第三章　多维随机变量及其分布……………………………………38

§3.1　二维随机变量的分布,独立性…………………………38

§3.2　条件概率分布 …………………………………………41

§3.3　二维随机变量的数字特征 ……………………………43

§3.4　两个随机变量之和的分布,卷积公式…………………48

§3.5　多维随机变量,向量和矩阵记号………………………52

§3.6　多维随机变量的联合特征函数 ………………………58

§3.7　多维随机变量的函数的分布 …………………………60

§3.8　线性变换和正交变换 …………………………………64

§3.9　误差传播公式 …………………………………………67

第四章　一些重要的概率分布………………………………………74

§4.1　伯努利分布和二项分布 ………………………………74

§4.2　多项分布 ………………………………………………82

§4.3　泊松分布,泊松过程……………………………………85

§ 4.4　泊松分布与其它分布的相互联系 ……………………………92
§ 4.5　复合泊松分布 ……………………………………………96
§ 4.6　几何分布，负二项分布，超几何分布 ……………………98
§ 4.7　均匀分布……………………………………………………102
§ 4.8　指数分布……………………………………………………103
§ 4.9　伽马分布……………………………………………………106
§ 4.10　正态分布 …………………………………………………109
§ 4.11　二维正态分布 ……………………………………………116
§ 4.12　多维正态分布 ……………………………………………123
§ 4.13　柯西分布 …………………………………………………127
§ 4.14　χ^2 分布 ……………………………………………………129
§ 4.15　t 分布 ……………………………………………………137
§ 4.16　F 分布 ……………………………………………………141
§ 4.17　实验分布 …………………………………………………146
4.17.1　实验分辨函数 ……………………………………………147
4.17.2　探测效率 …………………………………………………151
4.17.3　复合概率密度 ……………………………………………154
第五章　大数定律和中心极限定理 ……………………………157
§ 5.1　大数定律……………………………………………………157
§ 5.2　中心极限定理………………………………………………160
第六章　子样及其分布 …………………………………………166
§ 6.1　随机子样，子样分布函数 …………………………………166
§ 6.2　统计量及其数字特征………………………………………169
§ 6.3　抽样分布……………………………………………………174
6.3.1　子样平均值的分布 ………………………………………175
6.3.2　服从 χ^2 分布的统计量，自由度 ……………………………176
6.3.3　服从 t 分布和 F 分布的统计量 ……………………………179
6.3.4　正态总体子样偏度、子样峰度、子样相关系数的分布 ……181
§ 6.4　抽样数据的图形表示，频率分布 …………………………182
6.4.1　一维散点图和直方图，频率分布 …………………………182
6.4.2　二维散点图和直方图 ……………………………………185
第七章　参数估计 ………………………………………………190
§ 7.1　估计量，似然函数 …………………………………………190
§ 7.2　估计量的一致性……………………………………………192

§7.3 估计量的无偏性……193
§7.4 估计量的有效性和最小方差……196
§7.5 估计量的充分性……204
§7.6 区间估计……212
§7.7 正态总体均值的置信区间……217
§7.8 正态总体方差的置信区间……222
§7.9 正态总体均值和方差的联合置信域……225

第八章 极大似然法……227

§8.1 极大似然原理……227
§8.2 正态总体参数的极大似然估计……233
§8.3 极大似然估计量的性质……235
8.3.1 参数变换下的不变性……236
8.3.2 一致性和无偏性……236
8.3.3 充分性……237
8.3.4 有效性……238
8.3.5 唯一性……242
8.3.6 渐近正态性……243
§8.4 极大似然估计量的方差……246
8.4.1 方差估计的一般方法……246
8.4.2 充分和有效估计量的方差公式……249
8.4.3 大子样情形下的方差公式……252
§8.5 极大似然估计及其误差的图像确定……256
8.5.1 总体包含单个未知参数……256
8.5.2 总体包含两个未知参数……260
§8.6 利用似然函数作区间估计,似然区间……263
8.6.1 单个参数的似然区间……265
8.6.2 由巴特勒特(Bartlett)函数求置信区间……268
8.6.3 两个参数的似然域……271
8.6.4 多个参数的似然域……278
§8.7 极大似然法应用于直方图数据……280
§8.8 极大似然法应用于多个实验结果的合并……281
§8.9 极大似然法应用于实验测量数据……284

第九章 最小二乘法……288

§9.1 最小二乘原理……288
§9.2 线性最小二乘估计……291

9.2.1 正规方程 ……292
9.2.2 线性最小二乘估计量的性质 ……295
9.2.3 线性最小二乘估计举例 ……296
9.2.4 一般多项式和正交多项式拟合 ……300
§9.3 非线性最小二乘估计……303
§9.4 最小二乘拟合……313
9.4.1 测量拟合值和残差 ……313
9.4.2 线性模型中 σ^2 的估计……316
9.4.3 正态性假设，自由度……318
9.4.4 拟合优度 ……319
§9.5 最小二乘法应用于直方图数据……321
§9.6 最小二乘法应用于实验测量数据……328
§9.7 线性约束的线性最小二乘估计……330
§9.8 非线性约束的最小二乘估计……337
9.8.1 拉格朗日乘子法 ……337
9.8.2 误差估计 ……343
§9.9 最小二乘法求置信区间……344
9.9.1 单个参数的误差和置信区间 ……346
9.9.2 多个参数的误差和置信域 ……347
第十章 矩法，三种估计方法的比较……349
§10.1 简单的矩法 ……349
§10.2 一般的矩法 ……351
§10.3 举例 ……354
§10.4 矩法、极大似然法和最小二乘法的比较……357
10.4.1 反质子极化实验的模拟……358
10.4.2 不同估计方法的应用……359
10.4.3 讨论……365
第十一章 假设检验 ……369
§11.1 假设检验的一般概念 ……369
11.1.1 原假设和备择假设……370
11.1.2 假设检验的一般方法……371
11.1.3 检验的比较……376
11.1.4 分布自由检验……377
§11.2 参数假设检验 ……478
11.2.1 简单假设的尼曼-皮尔逊检验 ……378

11.2.2 复合假设的似然比检验 ……381
§ 11.3 正态总体的参数检验 ……388
11.3.1 正态总体均值和方差的检验 ……388
11.3.2 两个正态,总体均值的比较 ……390
11.3.3 两个正态总体方差的比较 ……393
11.3.4 多个正态总体均值的比较 ……399
§ 11.4 拟合优度检验 ……401
11.4.1 皮尔逊 χ^2 检验 ……402
11.4.2 皮尔逊 χ^2 检验中的自由度 ……406
11.4.3 拟合优度的一般 χ^2 检验 ……407
11.4.4 柯尔莫哥洛夫检验 ……416
§ 11.5 独立性检验 ……421
§ 11.6 一致性检验 ……424
11.6.1 符号检验 ……426
11.6.2 两子样的游程检验 ……432
11.6.3 游程检验作为皮尔逊 χ^2 检验的补充 ……437
11.6.4 两子样的斯米尔诺夫检验 ……441
11.6.5 两子样的威尔柯克逊检验 ……444
11.6.6 多个连续总体子样的克鲁斯卡尔——瓦列斯秩检验 ……450
11.6.7 多个离散总体子样的 χ^2 检验 ……454
第十二章 极小化方法 ……457
§ 12.1 引言 ……457
§ 12.2 无约束极小化的一维搜索 ……460
12.2.1 黄金分割法(0.618 法) ……461
12.2.2 斐波那契法 ……463
12.2.3 二次函数插值法(抛物线法) ……469
12.2.4 进退法 ……471
§ 12.3 无约束 n 维极值的解析方法 ……472
12.3.1 最速下降法(梯度法) ……475
12.3.2 牛顿法 ……479
12.3.3 共轭方向法和共轭梯度法 ……481
12.3.4 变尺度法 ……488
§ 12.4 无约束 n 维极值的直接方法 ……490
12.4.1 坐标轮换法 ……491
12.4.2 霍克-吉弗斯模式搜索法 ……492
12.4.3 罗森布洛克转轴法 ……493

12.4.4 单纯形法 ······ 497

§ 12.5 最小二乘 Q^2 函数和似然函数的极值问题 ······ 500

12.5.1 最小二乘 Q^2 函数极值 ······ 502

12.5.2 似然函数极值 ······ 504

§ 12.6 局部极小和全域极小 ······ 505

12.6.1 网格法 ······ 506

12.6.2 随机搜索法 ······ 507

§ 12.7 约束 n 维极值问题 ······ 509

12.7.1 变量代换法 ······ 511

12.7.2 罚函数法 ······ 511

§ 12.8 参数的误差估计 ······ 517

第十三章 蒙特-卡罗法 ······ 521

§ 13.1 蒙特-卡罗法的基本思想 ······ 521

§ 13.2 随机数的产生及检验 ······ 523

13.2.1 随机数的产生 ······ 524

13.2.2 随机数的统计检验 ······ 526

§ 13.3 任意随机变量的随机抽样 ······ 532

13.3.1 直接抽样方法 ······ 532

13.3.2 直接抽样方法的推广——变换抽样 ······ 536

13.3.3 舍选抽样方法 ······ 539

13.3.4 利用极限定理抽样 ······ 541

13.3.5 复合分布的抽样方法 ······ 543

13.3.6 近似抽样方法 ······ 545

13.3.7 多维分布的抽样 ······ 547

§ 13.4 蒙特-卡罗法计算积分 ······ 554

13.4.1 频率法(均匀投点法) ······ 554

13.4.2 期望值估计法 ······ 558

13.4.3 重要抽样方法 ······ 561

13.4.4 半解析法 ······ 562

13.4.5 自适应蒙特-卡罗积分 ······ 565

§ 13.5 蒙特-卡罗法应用于粒子传播问题 ······ 568

参考文献 ······ 573

附表 ······ 579

示例目录 ······ 618

第一章　概率论初步

§1.1　随机试验，随机事件，样本空间

自然界存在着在一定条件下必然发生的现象．例如两个点电荷之间必定有相互作用力；高处的重物必定落向地面；水在一个大气压、100℃条件下必然沸腾等等．这些现象称为必然现象，它们的过程和后果是完全确定的，可以唯一地用一定的物理规律给与精确的描述．例如点电荷之间的作用力服从库仑定律，真空中物体的下落过程服从自由落体规律．

但自然界还存在另一类性质不同的现象，即使在“完全相同”的条件下对同一事物作多次测量或试验，我们发现，试验的结果并不一样，一次单独的试验结果是不确定的，因此无法用任何数学公式计算出来．尽管每次试验的结果看来似乎杂乱无章，但如作大量重复试验，其结果却呈现出某种规律性．我们来举例说明．

投掷一枚均匀硬币，其结果或者是正面朝上，或者是反面朝上．我们无法预言任何一次投掷中硬币的哪一面朝上，但当投掷次数很多时，则正面朝上的次数约占1/2.

掷一个骰子，骰子的六个面分别刻有1，2，3，4，5，6等数字．每扔一次得到的点数是1—6中的哪一个数无法确定，但在大量投掷中，每一个点数的出现次数占总投掷数的1/6左右．

上述两例的共同特征是：个别试验中的结果是不确定的，但大量重复试验的结果即出现某种规律性．这类现象称为*随机现象*，这种规律性称为*统计规律性*．揭示随机现象的统计规律性的数学工具是概率论和数理统计．

扔骰子、扔硬币的试验有以下特性：试验可以“在相同条件”下重复进行；试验的结果不止一个，但所有结果都已明确地知道；每次试验结果究竟是其中的哪一种则无法肯定．具有这些性质的试验称为*随机试验*，简称*试验*．将某种随机试验E重复进行n次，

若各次试验的结果互不影响，则称 n 次试验是互相独立的．随机试验中可能出现的各种结果称为随机事件，简称事件．随机试验中每一种可能出现的结果是最简单、最基本的事件，称为基本事件．例如扔骰子试验中，每扔一次即是一次随机试验；“出现 1 点”、“出现 2 点”、… “出现 6 点” 是 6 个基本事件；“出现大于 4 的点”、“出现偶数点”是事件，但不是基本事件．试验中必定发生的事件叫必然事件，不会发生的事件叫不可能事件． 例如“点数大于 0”是必然事件，“点数大于 6”是不可能事件．

随机试验 E 的所有基本事件组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S．S 的元素是试验 E 的所有基本事件，元素也称样本点．例如扔硬币和扔骰子试验的样本空间可记为 $S_{硬币}$: {正面，反面}，$S_{骰子}$: {1, 2, 3, 4, 5, 6}．引入样本空间的概念后，可以看到事件是样本空间的一个子空间或子集． 例如“点数大于 4”是子集{5, 6}，“偶数点”是子集{2, 4, 6}．必然事件就是样本空间 S 的全域；不可能事件是空集，用 ϕ 表示．

现在我们来规定事件之间的关系及运算．设随机试验 E 的样本空间为 S，事件 A, B, $A_k(k=1, 2, \cdots)$为 E 的事件，我们用下述符号表示它们之间不同的关系：

$A\subset B$(或 $B\supset A$) 称为事件 B 包含事件 A，表示事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生．这可用图 1.1 加以说明，图中长方形表示样本空间 S，圆 A 和圆 B 表示事件 A 和 B 的子集，子集 A 含于子集 B 内．

$A=B$ 称为事件 A 与事件 B 相等，表示事件 A 包含事件 B 且

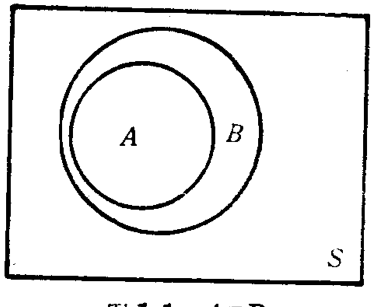


图 1.1 $A\subset B$

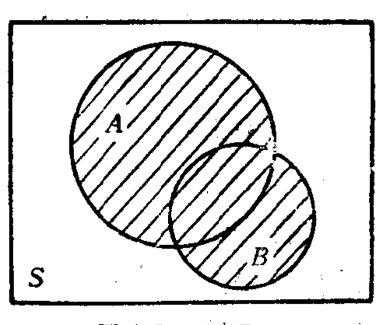


图 1.2 $A\cup B$

事件 B 包含 A，即 $B\supset A$ 且 $A\supset B$.

$A\cup B$ 称为事件 A 与事件 B 之和，表示事件 A 或事件 B 至少有一个发生. 图1.2中斜线部分表示 $A\cup B$. 类似地，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots\equiv\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为 A_1，A_2，…之和，表示这些事件中至少有一个发生.

$A\cap B$ 或 AB 称为事件 A 与事件 B 之积，表示事件 A 和事件 B 同时发生. 图1.3中斜线部分表示 AB.

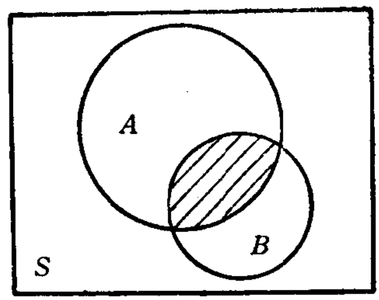
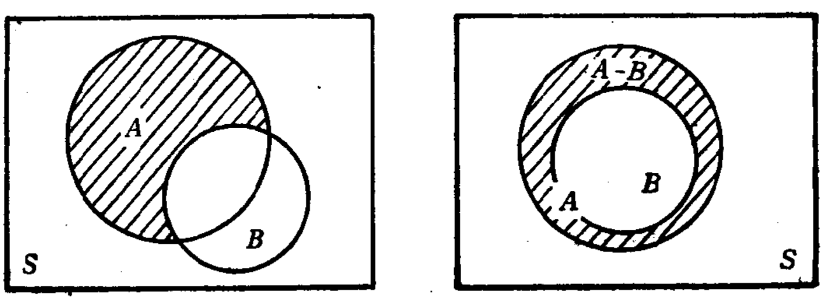


图1.3　$A\cap B$

类似地，$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots\equiv\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为事件 A_1，A_2，…之积，表示这些事件同时发生.

$A-B$ 称为事件 A 与事件 B 之差，表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

$A-B$ 如图1.4中斜线部分.



(a)　　(b)

图1.4　$A-B$

$AB=\phi$ 称为事件 A 与事件 B 互不相容，表示事件 A 与事件 B 不可能同时发生. 图1.5是互不相容的两个事件 A 和 B 的图示. 基本事件之间是互不相容的.

$A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$ 称事件 A 与事件 B 互逆，或 A，B 互为对立事件，表示事件 A 和 B 中必有且仅有一个发生，亦即 $A\cup B=S$，$AB=\phi$. 图1.6中斜线部分为事件 B 的对立事件 $A=\overline{B}$. 由此规定

可知,互逆事件一定互不相容.

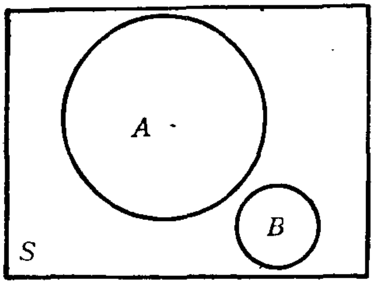


图1.5 $AB=\phi$

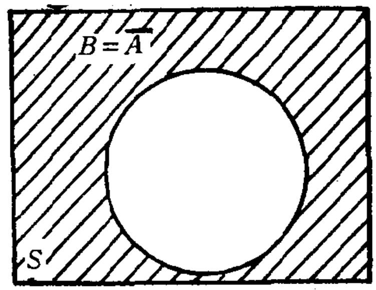


图1.6 $A=\overline{B}$

样本空间的划分是十分有用的一个概念. 设 S 为随机试验 E 的样本空间, E 的一组事件 B_1, B_2, $\cdots$, B_n 两两互不相容, 且 B_1, P_2 $\cdots B_n$ 之和等于样本空间的全域,即满足

$$\begin{cases} B_iB_j=\phi & i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \\ B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

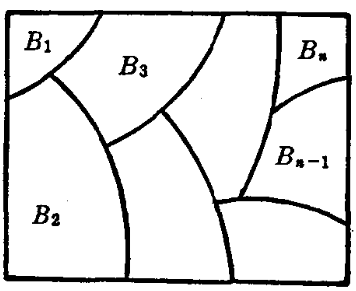


图1.7 样本空间的划分

则称 B_1, B_2,$\cdots$,B_n为样本空间 S 的一个划分. 图1.7是样本空间 S 的一个划分的图示. 显然样本空间的所有元素构成它的一个划分; 对立事件也是样本空间的一个划分.

以扔骰子为例, 骰子面朝上的点数作为随机试验, 其样本空间是 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 设一组事件 $B_1=\{1, 2\}$, $B_2=\{3, 4\}$, $B_3=\{5, 6\}$,则 B_1, B_2, B_3 构成 S 的一个划分. 事件组 $C_1=\{1, 2\}$, $C_2=\{2, 3\}$, $C_3=\{4, 5\}$不是 S 的划分, 它不满足式(1.1.1)的要求.

§1.2 概率

为了说明什么是概率, 首先引入频率的概念. 重复进行一种随机试验,共作了 N 次, 其中事件 A 出现 n 次(称为事件 A 的频数),比值 n/N 称为事件 A 在 N 次试验中出现的频率. 随着试验