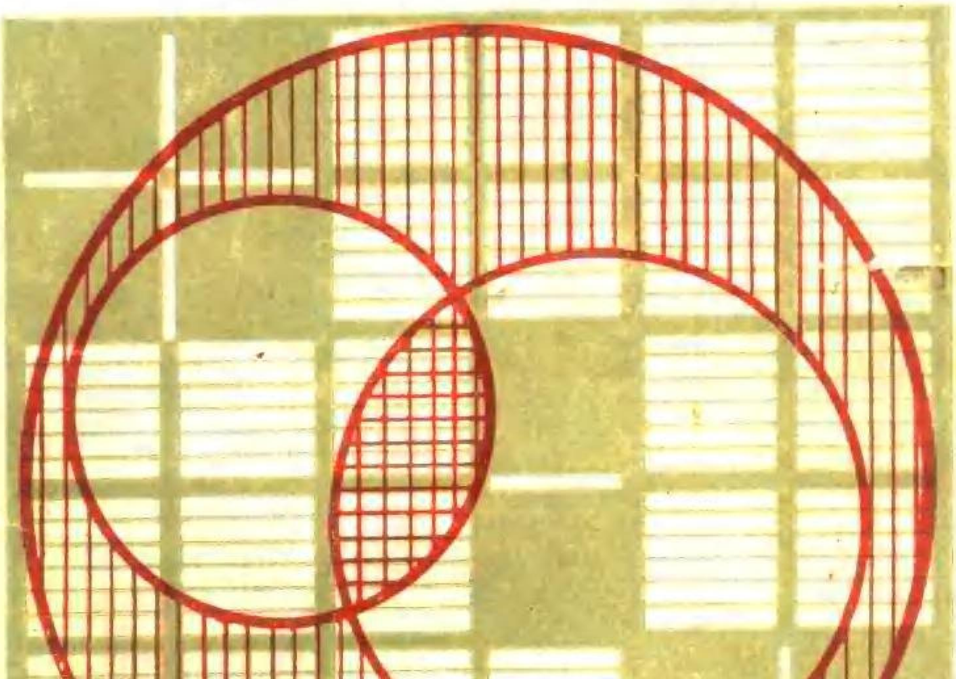
组合数学导论

〔美〕C.L.Liu 著

魏 万 迪 译



四 川 大 学 出 版 社

组合数学导论

〔美〕 C.L.刘 著
魏万迪 译

四川大学出版社

内 容 提 要

本书是著名的美籍组合数学家和计算机科学家刘炯朗教授久享盛誉的著作之一，系统地论述了组合数学的几个主要方面（组合计数、图论、组合最优化和区组设计），内容全面、选材精当、论证严谨、深入浅出。本书非常注重应用，紧密联系计算机科学、数字通讯、运筹学、管理科学、电子工程等学科。书中例题丰富，每章都有类型广泛、难易兼顾的大量习题。本书很有特色，引人入胜，颇富启发性。因此1968年在美国初版后，年年印刷至今，广被选作大学生和研究生的教材，且为许多学术论著所引用。大英百科全书在其“组合论”条目中已把它列为参考书。本书对基础数学、应用数学、概率统计、计算数学、运筹学、计算机科学、管理学、电子工程和数字通讯等方面的教师、研究生、本科生和广大科技人员都很有参考价值。

INTRODUCTION TO
COMBINATORIAL MATHEMATICS
Computer Science Series
C · L · Liu

*　　*　　*

组合数学导论
［美］ C.L. 刘 著
魏万迪 译

*

四川大学出版社出版发行（成都四川大学内）
四川省新华书店发行　　成都银河印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张18.5　字数435千
1987年11月第一版　　1987年11月第一次印刷
印数：1—8000册
ISBN 7—5614—0052—7/O·11
统一书号：13404·27　　定价：3.10元

中文译本序言

近二、三十年来，组合数学在研究方面有极其迅速之发展，在数学教育方面其重要性亦日益增加° 同时兼顾纯粹数学与应用数学两领域，实为组合数学特色之一° 数年以前，得机与魏万迪教授共同从事组合数学之研究工作，获益至多。最近又承魏教授于百忙之中抽空将拙作译成中文刊行。感激至深，谨此致谢。

刘炯朗

一九八七年于美国伊里诺斯大学

序

组合数学是一个迷人的数学分支。在工程、自然科学、社会科学、经济学和运筹学中都有着为数众多的应用。该书是关于这一课题的一本引论性著作，它是我在讲授由麻省理工学院电子工程系开设的应用组合数学一课时用过的教学笔记的产物。

本书包括的课题可以分为四组，它们是应用组合数学的各方面的代表：计数分析（第一至第五章），图论（第六至第九章）．最优化方法（第十至第十三章），试验设计（第十四章）。介绍的水平适合于高年级大学生和一年级研究生。不假定读者预先具有组合数学或近世代数的知识。带有☆标记的诸节可以略去而不影响连续性。必要的代数概念都在需要的地方引进，因而凡有“●”标记的那些节对于已修过近世代数的学生可以跳过。

由于这是一册引论性课本，我未曾试图汇编一份庞大的参考文献目录。相反地，倒是希望学生会更有效地利用附随每章的、为数虽少但却是精选过的参考文献目录。

每章之后的习题汇编是本书的一个整体组成部分。一些习题要求学生应用课文中展开的抽象概念，而另一些则要求他们以自然的方式推广这些概念。我们已经配备了一册包含全部习题解答的书。

我要对Gian－Carlo Rota教授表示衷心的感谢，他以最能激发灵感的方式教我组合数学．我还要感谢David A · Huffman教授，他帮助着手和组织这个课程，并作了许多有益的技术性建议．我要感激麻省理工学院MAC（多存取计数机）工程的主任Robert M·Fano教授在我写作此书的全过程中对我的鼓励和支持。在他的领导下，MAC工程的气氛和环境非常良好而令人愉快。谨对 Murray Edelberg先生致以衷心的谢意，他对本书作了大量有价值的建议，协助校清样，提供习题，并准备了一本很透彻的题解手册。对 Donald R·Haring博士仔细审阅全部手稿，对Shimon Even教授以及Peter J·Denning和John A·Williams两位先生的建议也致谢忱。特别要对Kathleen Dimond女士多次打印手稿的极佳工作致谢．最后但并不意味着程度最低地，我要感谢我的妻Jane，她供给习题，协助校清样，提出许多关于本书的批评和建议，而且还是鼓励和谅解的永不枯竭的源泉。

G · L · Liu

（刘炯朗）

目　录

第一章　排列和组合

§1 1　引

在电报通讯中，当成群的点和短划用来表示字母-数字符号的时候，一个通讯工程师也许想知道，由一定个数的点和短划所组成的不同的表示物的总数。为了研究物质的物理性质，一个物理学家可能想计算在分子场中分子排列的方式的数目，或者在不同的能级间电子分布的方式的数目，一个运输工程师或许想决定可接受的火车时刻表的数目，一个计算机科学家可能想对这样一个数目有些观念，这就是，为了应付对弈者的每一着棋，他的下棋程序应该考察可能的应法的数目。诸如此类的计数问题是在排列和组合的基本理论中讨论的，这就是本章的课题。

“**选出**”和“**安排**”二词将在通常的意义下使用。因此，象下面一些说法将不会引起意义上的混淆：“从五个候选人中**选出**两个代表”，“从五个候选人中**选出**两个代表时，有10种可能的结果”，“把书**安排**在书架上”，“把五本不同的书**安排**在书架上有120种方法”，等等。“**组合**”一词同“**选出**”一词有同样的意义，而“**排列**”一词同“**安排**”一词有同样的意义，正式地说，把n个物的一个**r-组合**定义为从这些物中选出r个的无序选出，而把n个物的一个**r-排列**定义为这些物中的r个的一个有序安排。例如，由100位参议员中的20位组成一个委员会，这是一个无序选出，因而是100位参议员的20-组合。另一方面，有t匹马参加的跑马竞赛的结局，如果没有两匹马赛平的话①，可以视为是这些马的一个有序安排，因而是这t匹马的一个t-排列。注意，这里只是定义r-组合和r-排列这些术语，而未曾提及有关这些物的性质的任何事情，因为就这些定义而言，毋须这样做。

这里感兴趣的是计算已给的一组物的组合或排列的个数。记号$C(n,r)$表示n个**不同**的物的**r-组合**的个数，而记号$P(n,r)$表示n个**不同**的物的**r-排列**的个数。在§1-3和§1-4中将算出$C(n,r)$和$P(n,r)$的值。很明显，$C(n,n)=1$（从n个物中只有一种方法选出n个来），$C(n,1)=n$（从n个物中有n种方法选出一个来），$C(3,2)=3$（对三个物A，B和C，两个物的组合是AB，AC和CB），$P(3,2)=6$（对三个物A，B和C，两个物的排列是AB，BA，AC，CA，BC和CB）。

§1-2　和则、积则

在五个罗马字母a，b，c，d和e组成的字母表和三个希腊字母α，β和γ组成的字母表中，显然有$5\times3=15$种方法选出两个字母，使得一个字母表中选出一个。另一方面，因为有五种方法选出一个罗马字母，有三种方法选出一个希腊字母，故有$5+3=8$种方法选出一个字母，它或是一个罗马字母，或是一个希腊字母，这些观念可以正式地叙述成下面的基本规则：

积则：如果一个事件能以m种方式出现，另一事件能以另外n种方式出现，则这两个事件能以$m\times n$种方式出现。

① 此为译者所加。

和则：如果一个事件能以m种方式出现，另一事件能以另外n种方式出现，则这两个事件之一出现的方式的数目是m＋n。

显然，一个事件的出现既可以指一定个数的物的组合，也可以指它们的排列。今考虑下面一些说明性的例子。

例1-1　从五册拉丁文书籍，七册希腊文书籍和十册法文书籍中选择两册不同语种的书籍，有5×7＋5×10＋7×10＝155种选法，因为有5×7种方法选择一册拉丁文书籍和一册希腊文书籍，有5×10种方法选择一册拉丁文书籍和一册法文书籍，然而，如果只是从这22册书籍中选择两册，则有$\frac{22\times21}{2}=231$种选法①。

例1-2　由积则，有

$$P(n,r)=P(r,r)\times C(n,r)$$

这是因为，可以这样作出n个不同的物的r-排列：首先作出这n个物的r-组合，然后作出这些r-组合的r-排列。

由和则，有

$$C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$$

这可由下面的推证得知，假定把n个不同的物之一标为一个特殊的物，包含这个特殊的物在内的r个物的选出方法的个数是$C(n-1,r-1)$，不包含这个特殊的物在内的r个物的选出法的个数是$C(n-1,r)$；从这n个物中选出r个物的方法的个方数等于上述两种选法的个数之和。

§1—3　排　列

现在来推导n个不同的物的r-排列的个数$P(n,r)$的表达式。可以看出，把n个物中的r个物排成某种顺序，同放置n个物中的r个于r个不同的（有标记的）位置是一回事。有n种方式填入第一个位置（从这n个物中选出一个），有$n-1$种方式填入第二个位置（从余下的$n-1$个物选出一个），…，有$n-r+1$种方式填上最后一个位置（从余下的$n-r+1$个物中选出一个），于是由积则，有

$$P(n,r)=n(n-1)\ \cdots\ (n-r+1)$$

若用记号

$$n!=n(n-1(n-2)\cdots3\times2\times1\qquad n\geqslant1$$

则

$$P(n,r)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots3\times2\times1}{(n-r)\cdots3\times2\times1}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

这里，$n!$读为n阶乘，且只就正整数n给出$n!$的定义。当n是实数时，$n!$的定义是在高等微积分中“Γ－函数”的题目下讨论的，例如，可以参看*Buck*[1]。还应指出，0!的值是1。

例1-3　如早些时候提到过的，三个不同的物的2-排列的个数是

$$P(3,2)=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=6$$

①原文为22×21＝426，这里为译者所改。

例1-4 有另一种推导公式

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

的方法。

首先用归纳法证明$P(n,n)=n!$。作为归纳法基础，显然有$P(1,1)=1=1!$。作为归纳法假设，假定$P(n-1,n-1)=(n-1)!$。为了把n个不同的物排好顺序，可以挑出一个特殊的物而首先安排余下的$n-1$个物。对这$n-1$个物的每一有序安排，都有n个位置供这个特殊的物占据（在已经安排了的物之间有$n-2$个位置，还有两个端部位置）。因此，由积则有

$$P(n,n)=n\times P(n-1,n-1)=n\times(n-1)!=n!$$

假定把n个有标记的位置分成两组：头r个位置和余下的$n-r$个位置。由积则，在这n个位置上放n物的方法的个数等于把这n个物中的r个放在头r个位置的方法的个数同把剩下的$n-r$个物放在余下的$n-r$个位置的方法的个数之积。因此有

$$P(n,n)=P(n, r)\times P(n-r, n-r)$$

此即

$$P(n, r)=\frac{P(n,n)}{P(n-r, n-r)}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

例1-5 n个人能有多少种方法站成一个圆圈？

可以看出，在诸物的线形排列和圆形排列之间有差异。在圆形排列的情况下，并不对n个人指定绝对位置，而只是彼此相对地被安排。有两种看待这个问题的方法。

方法一[#] 如果n个人先是线性地排列着，然后把这条线的两端闭合起来形成一个圆形排列，则有总数为$P(n,n)$个这样的排列，然而，因为仅只n个人之间的相对位置是重要的，所以用这种方式得到的两个圆形排列，如果第一个排列可以经由旋转一个位置，或旋转两个位置，…，或旋转n个位置而变成第二个排列，则这二个排列实际上是同一个。因此，圆形排列的个数等于

$$\frac{P(n,n)}{n}=(n-1)!$$

方法二[#] 如果挑一特殊的人占据一个固定的位置，则余下的$n-1$个人将以这个固定的位置为参照点而排成一个圆形。在这种情形下，有$(n-1)!$种安排这$n-1$个人的方法。

设有n个并非完全不同的物，更确切地说，设有q_1个第一类物，q_2个第二类物，…，q_t个第t类物。于是，这n个物的n-排列的个数由公式

$$\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!} \qquad (1—1)$$

给出。为了导出这个公式，设想把这n个物作上标记，使得即使同一类的诸物也变成能彼此区分。自然，这n个“不同的”物可以用$n!$种方式排列起来。然而，如果两个排列仅仅由于加了标记的同一类物的安排不同而不同，则当抹去所加的标记之后，它们就是同一排列，因此，未加标记的诸物的每一排列对应于加了标记的诸物的$q_1!q_2!\cdots q_t!$个排列。这就推得了（1—1）中的公式。

例1-6 五条短划和八个点可以安排成

$$\frac{13!}{5!8!}=1287$$

种不同的方式。如果也只用这十三个短划和点中的七个，则有

$$\frac{7!}{5!2!}+\frac{7!}{4!3!}+\frac{7!}{3!4!}+\frac{7!}{2!5!}+\frac{7!}{1!6!}+\frac{7!}{7!}=120$$

个不同的表示。

例1-7 为了证明对任意的正整数k①，$(k!)!$能被$(k!)^{(k-1)!}$整除，考虑由$k!$个物所组成的集体，其中k个物属于第一类，k个物属于第二类，…，k个物属于第$(k-1)!$类。排列这些物的方式的总数由

$$\frac{(k!)!}{k!k!\cdots k!}=\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$$

给出。因为排列的总数必为整数值，故$(k!)^{(k-1)!}$一定整除$(k!)!$。

从n个不同的物中不限重复次数地选出r个物的排列的个数是

$$n^r$$

这个结果可直接应用积则而推得。这是因为，有n种方法选取一个物来填第一个位置，有n种方法选取一个物来填第二个位置，…，有n种方法选取一物来填第r个位置。

例1-8 在1和10,000,000,000之间的一百亿个数中，有多少个数含有数码1？又有多少个数不含有数码1？

在0和9999999999之间的一百亿个数中，有9^{10}个数不含有数码1，故在1和10000000000之间的一百亿个数中，有$9^{10}-1$个数不含有数码1，因而有$10^{10}-(9^{10}-1)$个数含有数码1。

例1-9 一个二元序列是由一些0和1所组成的序列。试问，含有偶数个0的n码二元序列的个数是多少？这里，零被认为是偶数，而n码序列意指该序列中数码的个数为n。

由于对称性，2^n个n码二元序列中有一半含有偶数个0，另一半含有奇数个零。如果注意到这一点，则问题就立刻解决了。

看待这个问题的另一方法是考虑2^{n-1}个$(n-1)$码二元序列。如果一个$(n-1)$码二元序列含有偶数个0。则可对它附添一个1作为第n个数码而产生一个含偶数个0的n码二元序列。如果一个$(n-1)$码二元序列含有奇数个0，则可对它附添一个0作为第n个数码而产生一个含偶数个0的n码二元序列。因此，含偶数个0的n码二元序列有2^{n-1}个。

作为拓扩，考虑n码四元序列，即以0，1，2和3为其数码的序列。再一次由对称性得到，含0和1的总个数为偶数的序列有$\frac{4^n}{2}$个。

为了求得含有偶数个0的四元序列的个数，可把这4^n个四元序列分成两组：只含2和3的2^n个序列为一组，至少含有一个0或1的4^n-2^n个序列为另一组。自然，第一组中的序列含偶数个0，第二组中的序列可以按照2和3在序列中的模式再分成一些类，例如，模式为$23xx2x3xx$的序列为一类，这里诸x是0或1。因为每一类序列中一半有偶数个0，故在第二组中含偶数个0的序列的总数是$\frac{4^n-2^n}{2}$。因而，在4^n个n码四元序列中，有$2^n+\frac{4^n-2^n}{2}$个序列含有偶数个0。

①原文无“正”，此为译者所加。

含有偶数个0和偶数个1的 n 码四元序列的个数是$\frac{4^n}{4}+\frac{2^n}{2}$。这一结果的证明留给读者作为练习。

§1-4 组合

根据例1-2中的结果，n 个物的 r -组合的个数是

$$C(n, r)=\frac{P(n, r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

由此公式，立即得到一个明显的关系式：

$$C(n, r)=C(n, n-r)$$

这确是意料中的事，因为从 n 个物中选出 r 个来，等价于挑出$n-r$个物来不被选出。

例1-10 如果一个凸十边形无三条对角线在这个十边形的内部交于一点，问这些对角线被它们的交点分成多少条线段？

首先，对角线的条数等于

$$C(10,2)-10=45-10=35$$

这是因为，连接这个十边形的$C(10,2)$ 对顶点有 $C(10,2)$ 条直线，但是在这45条线中有10条是这个十边形的边。因为这个十边形是凸的，故对每四个顶点，可以认为在图1-1所示的对角线间恰有一个交点，从而诸多角线的交点的总数是$C(10,4)=210$

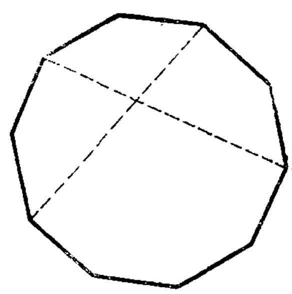


图 1—1

因为其上有k个交点的对角线被分成$k+1$条线段，又因为每一个交点在两条对角线上，故诸对角线被分成的线段的总数为

$$35+2\times210=455$$

例1-11 有十一位科学家在一项秘密设计中工作，他们想把文件锁在柜子里，使得当且仅当至少六位科学家在场，文件柜才能被打开。最少需要多少把锁？每一位科学家至少要带多少把钥匙？

为了回答第一个问题，须看到对任一由五位科学家组成的组，必有一把锁他们不能打开。再者，对于两个不同的由五位科学家组成的组，必有两把不同的锁他们不能打开。因为如果这两组不能打开的锁只是同一把，则在这两组科学家中必有六位，他们所组成的组不能打开柜子。这样一来，至少需要$C(11,5)=462$把锁。

关于每一位科学家必须带的钥匙的数目，可以这样来考虑：设A是这些科学家之一。一

当A同另外五位科学家的组相结合时，A就应有别的五位科学家打不开锁的钥匙.这样一来，A至少要带$C(10,5)=252$把钥匙。

虽然上面只证明了这里求得的数只是锁和钥匙数目的下界，而实际上可以用这么多锁和每位科学家所带的这么多钥匙设计出一个符合要求的方案来。

例1-12 从1，2，…，300这些数中，有多少种方法选出三个来使得它们的和能被3整除？

300个数1，2，…，300可以分成三组：被3整除者为一组，3除余数为1者为一组，3除余数为2者为一组。显然，每一组有100个数。如果三个数都选自同一组，或者三个数都选自不同的组，则这三个数的和能被3整除。此外无其他合要求的选法，这样一来，选择符合要求的三个数的方法的总数是

$$C(100,3)+C(100,3)+C(100,3)+100^3=1485100$$

现在来证明，当其允许重复地选取物时，从n个不同的物中选出r个物的方法的个数是

$$C(n+r-1,r)$$

让这n个物与整数1，2，…，n相等同；把具体选出的r个物所相应的整数按不降的①顺序列成一表$\{i, j, k, \cdots, m\}$，并用此表等同于这r个物的选出。例如，第一个物选了三次，第二个物未选，第三个物选了一次，第四个物选了一次，第五个物选了二次，等等，这样一个选出就表示为$\{1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, \cdots\}$。对这样一个表中的$r$个整数，把0加到第一个整数上，把1加到第二个整数上，…，把$r-1$加到第r个整数上。于是，$\{i, j, k, \cdots m\}$就变成$\{i, j+1, k+2, \cdots, m+(r-1)\}$。例如，选出$\{1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, \cdots\}$就变成$\{1, 2, 3, 6, 8, 10, 11, \cdots\}$，于是每一个允许重复的选出唯一地等同于从整数1，2，…，$n+(r-1)$中选出r个不同的整数的一个组合，而且反之亦然，这就证明了（1—2）中的公式。

例1-13 从为数众多的一分币、二分币、一角币和二角伍分币中，可以有多少种方法选出六枚来？

答案是

$$C(4+6-1, 6)=C(9, 6)=84,$$

因为这同从一枚一分币、一枚二分币、一枚一角币和一枚二角伍分币中不限重复地选出六枚是同一回事。

例1-14 掷三个不同的骰子的时候，可能的结果的个数是$6\times6\times6=216$。如果这三个骰子是没有区别的，则可能结果的个数是$C(6+3-1, 3)=56$。这可如下看出：考虑从1，2，3，4，5，6这六个数中允许重复地选出三个数。

今有并非完全不同的诸物，其中有q_1个第一类的物，q_2个第二类的物，…，q_t个第t类的物。从这些物中选出不少于一个物的方法的个数是

$$(q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_t+1)-1$$

这可直接从积则推出。选取第一类中的物有q_1+1种方法，即一个也不选，或选取它们中之一，或选取它们中之二，…，或选取它们中的全部，类似地，选取第二类中的物有q_2+1种方法，…选取第t类中的物有q_t+1种方法。项“-1”对应于这样一种“选出”：根本没有选取

① 原文为“递增的”（increasing）。这里应是“不降的”

任何，因而这应扣除。

例1-15 数1400有多少个正因数？

因为$1400=2^3\times5^2\times7$，故其正因数的个数是

$$(3+1)(2+1)(1+1)=24$$

这里1和1400都被认为是数1400的因数。

例1-16 对n个已给的砝码，把这些砝码组合起来能拼成的不同重量的最多个数是多少？

因为一个砝码可以选在一个组合中，或者不选在其中，故有2^n-1个组合。因此所求的最多个数是2^n-1。事实上，如果选取诸砝码的重量分别为2^0个单位，2^1个单位，2^2个单位，…，2^{n-1}个单位，则这个最多个数总是可以达到的。

作为这个例子的一个拓广，今问：用一组n个砝码和一台天平可以称出的不同的重量的最多个数是多少？

每一个砝码可以有三种方式处理，即，放在砝码盘中，放在要称的东西所在的盘中，或者根本就不用它。因此，有3^n-1种使用这n个砝码的方式。然而，在这3^n-1种方式的至少一半之中，放在砝码盘中的总重量不超过放在另一盘中的总重量。因此，当一组n个砝码供用的时候，最多可以称出$\frac{3^n-1}{2}$个不同的重量。事实上，选取诸砝码的重量分别为3^0个单位，3^1个单位，3^2个单位，…，3^{n-1}个单位，就能称出从1到$\frac{3^n-1}{2}$个单位重的东西。

§1-5 不同诸物的分配

在§1-3和§1-4中已经讨论了一些物的排列与组合。本节和下节要讨论一些物在不同的或不能区别的一些位置的分配问题。即将看到，这一问题同排列和组合问题关系极为密切，而且在很多情形则是等价的。

在前面关于诸物的排列的讨论中，引进了把不同的诸物放入不同的盒的概念。必须考虑两种情形。第一，对$n\geqslant r$，有$P(n,r)$种方法把r个不同的物放入n个不同的盒，这里每一盒最多只能装一物。如前面指出过的，第一个物可以放在n个盒之一内，第二个物可以放在剩下的$n-1$个盒之一内，等等。另一方面，对$r\geqslant n$，有$P(r,n)$种方法把r个物中的n放在n个不同的盒内，这里每一盒最多也只能装一物。其论证与上面的论证类似，即，有r种方式选取一物放入第一个盒，有$r-1$种方式从余下的$r-1$个物中选取一物放入第二个盒，等等。

r个不同的物在n个不同的盒中的分配问题，当每一盒可以装任意多个物的时候，等价于n个盒之r个盒的排列且允许重复。用不同的物在不同的盒中的分配的说法，因为第一个物可以放入n盒之一中，第二个物也可以放入n盒之一中，等等，故有n^r种分配诸物的方法。读者应当想通，无论n大于或小于或等于r①，分配诸物的方法的个数都是n^r。

注意，在上面的情形中，当同一盒中放入一个以上的物时，诸物在盒中是无序的。当诸物在盒中的顺序也要考虑的时候，则分配方法的个数是

① “或等于”为译者所加。

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}=(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n$$

为了证明这个结果，把这样一个分配设想为 r 个不同的物和 $n-1$ 个相同的盒间隔板的一个有序安排。用前面导出的关于 $r+n-1$ 个物的排列的公式，这里有 $n-1$ 个物属于同一类，就得到结果 $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$。

还有另一种方法来导出这一公式。有 n 种方法分配第一个物，第一个物放入一个盒之后，可以把这个物当成是一个添加的隔板，它把该盒分成了两个盒。因此，有 $n+1$ 种方法分配第二个物。类似地，有 $n+2$ 种方法分配第三个物，…，有 $n+r-1$ 种方法分配第 r 个物。

例1-17 今欲在五根旗杆上悬挂七面旗子，全部旗都得展示出来，但并非所有的旗杆都得使用。问有多少种安排的方法？

答案是 $5\times6\times7\times8\times9\times10\times11$。论证如下：如果只有一面旗在一旗杆上，则假定这面旗升在杆之顶；然而，如果在一旗杆上有一面以上的旗，则杆上诸旗的顺序是重要的。

类似地，七部汽车通过五间收费亭有 $5\times6\times7\times8\times9\times10\times11$ 种方式。

设有 n 个物，其中 q_1 个属于一类，q_2 个属于另一类，…，q_t 个属于第 t 类，自然有 $q_1+q_2+\cdots+q_t=n$①。设有 n 个不同的盒，每一个盒可装一物。可以看到把这 n 个物放入这 n 个盒的分配等价于这 n 个物的排列，这样一来，由(1-1)中的公式，分配方法的个数是

$$\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!}$$

从另一观点来导出这个结果是会有启发的。

在 n 个不同的盒中，有 $C(n,q_1)$ 种方法选取 q_1 个盒出来装第一类物；在余下的 $n-q_1$ 个盒中有 $C(n-q_1,q_2)$ 种方法选取 q_2 个盒出来装第二类物；…；在余下的 $n-q_1-q_2-\cdots-q_{t-1}$ 个盒中有 $C(n-q_1-q_2-\cdots-q_{t-1},q_t)$ 种方法选取 q 个盒出来装第 t 类物，因此，分配方法的个数是

$$C(n,q_1)C(n-q_1,q_2)C(n-q_1-q_2,q_3)\cdots C(n-q_1-q_2-\cdots-q_{t-1},q_t)②$$

$$=\frac{n!}{q_1!(n-q_1)!}\,\frac{(n-q_1)!}{q_2!(n-q_1-q_2)!}$$

$$\frac{(n-q_1-q_2)!}{q_3!(n-q_1-q_2-q_3)!}\cdots\frac{(n-q_1-q_2-\cdots-q_{t-1})!}{q_t!(n-q_1-q_2-\cdots-q_t)!}$$

$$=\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!}$$

上面推导的最后一步用到了 $(n-q_1-q_2-\cdots-q_t)!=0!=1$。

设有 r 个物，其中 q_1 个属于一类，q_2 个属于另一类，…，q_t 个属于 t 类，自然有 $q_1+q_2+\cdots+q_t=r$③。设有 n 个不同的盒，每一盒可装一物，这里 $n>r$。于是，可以类似地推得，把这 r 个物放入这 n 个盒的分配的个数是

$$C(n,q_1)C(n-q_1,q_2)C(n-q_1-q_2,q_3)\cdots$$
$$C(n-q_1-q_2-\cdots-q_{t-1},q_t)$$

①为译文清楚，加此式。

②为便于理解，译者对原文略有改动。

③为译文清楚，加此式。