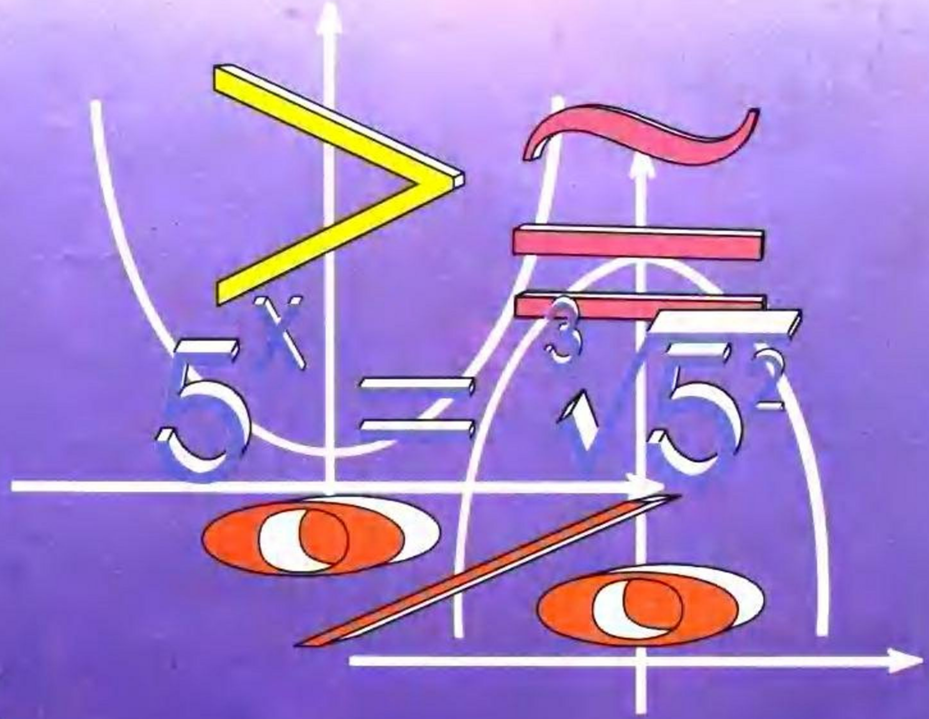
初等代数研究教程

主编 林国泰 副主编 司徒永显 邝会雄

·数学教育丛书·



暨南大学出版社

初等代数研究教程

JY1/171/17

主　编　林国泰
副主编　司徒永显
　　　　邝会雄

暨南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等代数研究教程/林国泰主编，司徒永显、邝会雄副主编．－广州：暨南大学出版社，1996.8
ISBN7－81029－530－6

Ⅰ.初…
Ⅱ.林…
Ⅲ.初等代数
Ⅳ.0122

暨南大学出版社出版
广东广彩印务公司印刷
新华书店发行
开本：850×1168　1/32 印张：17.5　字数：50.6 万字
1996 年 8 月第 1 版　　1996 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—8000 册
定价：18.00 元

编 委：

司徒永显	袁伟环	何小亚
曾　峥	陈守中	邓玉环
曾戈野	吴永发	周传忠
林国泰	庍会雄	

前　言

"初等代数研究教程"是高等师范学校数学教育专业的一门重要的专业基础课程，是从事中学数学教育必须掌握的基础理论．本书编写的指导思想是加深、拓宽中学代数的一些重点内容，力求用高等数学观点、方法去解决和理解初等代数的有关内容，达到对中学数学教材内容有较深刻透彻的理解和认识，从而形成用高等数学观点分析中学数学教材的能力．

本书是参照国家教委颁布的《普通高等师范学校数学教育专业教育教学基本要求》(试行)中有关章节的要求编写的，适合作高等学校数学系(包括师专、教育学院数学专业)开设本课程的教材．

本书编写过程中吸取了编者在《初等代数研究教程》教学上多年的经验，也吸取了近年来中学数学课程改革的新成果．根据本科、专科的教学实际和今后工作的需要，在编写上突出了实用性、灵活性和新颖性．全书正文部分是按师范院校数学教育专业本科教学要求编写的，也照顾专科院校的教学要求，内容上有一定伸缩性．在每章之后，附有相应的学习参考，内容包括对该章知识的说明、补充和延伸．每章还着重编写了对中学数学教材中有关内容的教学研究，指出相应章节的重点、难点和教学上应注意的问题、其目的是扩大师范生的视野，提高他们的阅读能力，并增大不同层次学校和对象选用本教材内容的灵活性．因为本书紧密联系中学数学教学实际，内容丰富、详略得当，因此本书也可以供在职中学

数学教师继续学习使用，并供从事数学教育研究人员参考.

参加本书编写的有司徒永显（第一章；第三章§1，§2，§3）、袁伟环（第二章）、何小亚（学习参考第二章）、曾峥（第三章§4，§5，§6及学习参考）、陈守中（第四章§1，§2，§3，§4）、邓玉环（第四章§5及学习参考）、曾戈野（第五章）、吴永发（第六章）、周传忠（第七章）、林国泰（第八章）、邝会雄（学习参考第九章）. 由林国泰担任主编，司徒永显和邝会雄任副主编.

本书由广东省高师数学教育研究会组织编写，并得到广东省高等教育厅教学处的支持和资助，华南师范大学数学系对本书出版也给予大力支持，特别是暨南大学出版社给予优惠的关照和密切的配合，在此谨向有关领导和研究会的全体同志表示衷心感谢.

由于我们水平所限，仓促付印，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

1996年2月

目　录

第一章　绪论

本章主要是概述代数学的发展史,以及研究中学代数教学的内容和基本要求.

§1.1　代数学发展概述

本节主要是概述初等代数的形成,以及介绍它发展为高等代数与抽象代数的概况.

一、初等代数的形成

初等代数的形成,大致经历过萌芽和积累阶段,"半符号代数"阶段和符号代数阶段.

1. 初等代数的萌芽和积累

初等代数是代数学的古典部分,它的萌芽可以追溯到公元前*1700*年以前,它是随着解方程(组)而产生,并积累和发展起来的.

在距今约三四千年前,埃及人已经会解一些一元一次方程的应用题,也解过个别特殊的二元二次方程组;巴比伦人比埃及人会解更多的一元一次及一元二次方程.他们用配方的方法求出某些二次方程的根,并在一定程度上掌握了二次方程的求根公式.巴比伦人还解过一些多个变量的方程组问题.

在希腊后期的数学中,"代数"一词仍未出现,当时的代数被纳入几何的范畴.但是,大约在公元*1*世纪,希腊数学家海伦

(Heron,约公元 50 年)首先把一些以几何形式出现的数量关系表示成算术和代数的形式,这对于代数学的发展起了积极的作用.

在代数学的早期历史上,中国的代数占有重要的地位.大约在公元前50年左右成书的《九章算术》就有不少代数成就,其中有“正负术”和有一整套的有理数运算法则,为代数学的发展提供了良好的基础.它的“开方术”给出了形如 $X^2 = C$ 的方程的解;“开带从平方法”给出了形如 $x^2 + bx = c$ 的二次方程的解;它的“方程术”则给出了线性方程组的筹式解法;此书的“开立方术”给出了形如 $x^3 = c$ 的方程的解.在公元5 世纪,祖冲之(429 ~ 500 年)给出了形如 $x(x + a)(x + b) = V$ 的三次方程的数值解法,并且在 11 世纪由贾宪等人创立“增乘开方法”,解决了高次方程的求数值根问题.

2.“半符号代数”

公元 3 世纪,希腊数学家丢番图(Diophantus,约 246 ~ 330 年)发表著作《算术》,其中包括数论和不定方程在内,故实际上它是一部讨论数的运算和方程的“代数学”.丢番图对代数的贡献主要有两个:一是对不定方程作了较广泛而系统的研究,因此,人们常把不定方程称之为“丢番图分析”;二是采用字母来表示未知数和一些运算符号.当然,他所用的符号只是一种文字的缩写形式.丢番图的这种缩写代数正处于以埃及和巴比伦为代表的文字代数与后来的韦达所创立的符号代数之间,故有人称之为“半符号代数”.

公元 10 世纪以后,中国进入“宋元数学”时期,此时中国的代数发展到了顶峰.秦九韶(约 1202 ~ 1261 年)把贾宪的“增乘开方法”发展为求任意高次方程的数值解法.11 世纪,中国提出列一元高次方程的方法 —— 天元术;14 世纪初,又发展为列出二元、三元、四元高次联立方程组的方法 —— 四元术.天元术和四元术都分别设计了特定的筹式来表示方程或方程组,每个筹式都

起到了一种符号的作用，故有人把“天元术”和“四元术”称之为具有中国特色的“半符号代数学”．中国的“天元术”的出现，标志了以方程为主要内容的早期代数从算术中独立了出来．

西方的一些数学史家一般认为，代数学的产生应归功于印度数学的贡献，这可能是因为西方数学直接来源于印度和阿拉伯，故忽视了中国在代数发展上的作用．当然，代数的发展也离不开印度和阿拉伯的贡献．在 7 至 11 世纪，印度数学家在不定方程和代数符号化方面取得了重要成就．二次方程有两个根，并且有可能是负数，这是印度数学家首先发现的，虽然他们还没有承认负根．这一个发现对后来的代数学的发展有着重要影响；阿拉伯人成功地吸收和保存了来自希腊、中国和印度的数学成就，并把它们传到欧洲去，故在代数学的发展中起到了承上启下的作用．公元 830 年左右，阿拉伯数学家阿尔·花拉子模（Al - Khowārizmī，约 780 ~ 约 850 年）写了一本名为《*ilmaljabr wa'lmuquabalah*》的书，原意为《还原（或移项）和对消的科学》．1140 年左右，由阿拉伯文译成拉丁文时，“*al - jabr*”变成了“*algebra*”（其余的词逐渐被遗忘），这个拉丁文的词于 1859 年被中国清朝数学家李善兰（1811 ~ 1882 年）首次译为“代数学”，这就是中文“代数学”一词的由来．阿拉伯人还采用了“移项”和“对消”等专门术语，并把未知量叫做“根”．这些对于解方程理论的发展都起有重要作用．

3．符号代数

15 世纪，欧洲的文艺复兴运动，解放了生产力并促进了科学的发展，其中代数学的发展尤为突出．对于代数的兴趣，主要是由于进行地理探险需要有准确的天文知识，需要有更合理的推测和计算，要求编制出更好的天文数表，以及制作三角函数表，这就对解方程和处理恒等式提出了更高的要求．同时，来自建筑、军火制造、航海和贸易的需要，也要求代数给出科学的定量分析，以及要求代数能提供表示曲线的方法．这些需要就促进了代数学的发

展，使之发展成为符号代数．

欧洲在发展初等代数的重要贡献有两大方面：一是一般三次方程求根公式的给出．在二次方程的公式解法的基础上，意大利数学家塔塔利亚（N · Tartaglin，*1499* ～ *1557* 年）、卡当（G · Cardano，*1501* ～ *1576* 年）等人于 *1535* 年给出一般三次方程的求根公式，卡当的学生斐尔拉里（L · Ferrari，*1522* ～ *1565* 年）于 *1540* 年又获得了四次方程的根式解，这些成果载于卡当著的《大术》（*1545* 年）一书中；二是符号的改进和普遍化，使用符号是 *16* 世纪代数学的最大成就．由于改进和普遍使用符号，使代数脱离了算术而成为严格意义下的代数学．

代数符号的改进，主要包括 *3* 个方面：一是引入未知数和已知数符号；二是引入乘幂符号；三是引入运算符号和关系符号．法国数学家韦达（F · Viete，*1540* ～ *1603* 年）是第一个系统使用代数符号的人，他不仅用字母表示未知数及其幂，还用字母表示方程的系数和常数，为代数学的发展建立了新的里程碑．在韦达以后的将近两个世纪内，经过不少数学家的努力，代数符号得到不断的改进和普及．例如，笛卡儿（R · Descartes，*1596* ～ *1650* 年）采用字母表中前面的几个字母表示已知量，用最后的一些字母表示未知量，这种记法一直沿用到今；现在通用的其他符号，有不少也是这个时期开始使用的．

到 *17* 世纪上半期，以解方程为主要内容的初等代数已经基本形成．同时，其他的代数内容也都有很大的发展．例如，*1614* 年英国数学家纳皮尔（J · Napier，*1550* ～ *1617* 年）发明了对数，并制定了世界上第一个对数表．在 *1770* 年，欧拉（Euler，*1707* ～ *1783* 年）的《代数学引论》问世，这是一本初等代数学的代表作，它标志着初等代数已经成为一门独立的数学分支．

二、高等代数和抽象代数

初等代数进一步发展成为高等代数，继而发展成为抽象代数．

1．高等代数

初等代数引进了一整套的代数符号，为建立代数方程的专门理论开辟了道路．结果产生了以方程论为主要内容的高等代数，其中包括行列式与矩阵理论、二次型和线性变换等．

方程论的中心问题是任意次方程的解法．它包括高次方程根的可解性问题，方程根的存在性问题和对具体方程的求解方法问题等 *3* 个方面．

从 *17* 世纪起，四次方程已得出根式解法，数学家就致力于研究五次或更高次方程的根式解法．所谓根式解法是指通过对方程的系数进行四则运算和开方运算而求出根的方法．五次方程根式解法问题，虽然经过不少数学家 *100* 多年的研究，尚未能解决，但从中产生了对称多项式理论、置换理论及预解式概念，并指出根的排列理论是"整个问题的真谛"，为后来解决这个问题打下了基础．

意大利数学家鲁菲尼（P · Ruffini，*1765* ~ *1822* 年）于 *1799* ~ *1813* 年试图证明四次以上的高次方程不可能用根式解法，虽未成功，但他却首先提出一条极为重要的定理：如果一个方程能用根式解出，那么根的表达式就能写成这样一种形式，其中的根式是已知方程的根和单位根的有理系数的有理函数．他没有给出证明．这个证明后由挪威数学家阿贝尔（N · H · Abel，*1802* ~ *1829* 年）完成了，故通常称这个定理为"阿贝尔定理"．*1824* 年，阿贝尔又利用这个定理，证明了次数大于四的一般代数方程不可能有根式解．

某些五次或五次以上的代数方程能用根式解出的充分必要条

件是什么呢?这个问题是由法国青年数学家伽罗华(E·Galois,1811 ~ 1832年)解决的.1830年1月,伽罗华把他关于方程可解性理论的论文交给巴黎科学院,但未被重视,甚至连他的手稿也丢失了.根据他的第二次手稿,在他死后于1846年由法国数学家刘维尔(J·Liouville,1809 ~ 1882年)整理发表出来.伽罗华的方程可解性理论的基础是每个方程都相应地有一个根的置换群,然后他指出:方程有根式解的充分必要条件即这个群是可解群.

高等代数研究的另一个基本课题是方程根的存在性定理,亦称代数基本定理.这是18世纪普遍关心的课题.这定理可叙述为:每一个实系数或复系数一元n次方程,至少有一个实根或复根.或可表达为:一元n次实系数或复系数方程有n个根.这个定理先后由欧拉等几位数学家给出不完全的证明,而第一个给出这个定理的完全证明的是德国数学家高斯(F·Gauss,1777 ~ 1855年).

方程理论的另一重要课题是:不解出方程而按它的系数的形式去反映它的根的一些性质,包括判别它是否有实根,指出有多少个正根和负根,并指出根的所在范围等几个主要问题,构成了方程论的主要内容.这些问题由笛卡儿和高斯等数学家解决了.

从17世纪下半叶开始,欧洲对线性方程组的研究也形成了高等代数的一项重要内容.1678年德国的数学家莱布尼兹(W·Leibniz,1646 ~ 1716年)首先研究解线性方程组的消元法,但当时的水平与中国的《九章算术》的“方程术”差不多.1693年莱布尼兹采用分离系数法又引出行列式的概念;1855年英国的凯莱(A·Cayley,1821 ~ 1895年)提出矩阵的概念,用于解线性方程组.矩阵是一种重要的数学工具,它与线性变换的有关理论相结合,又产生了线性代数,这个线性代数又成为高等代数的一个重要内容,而矩阵、线性变换和二次型成为线性代数中的主要内容.

1870年法国数学家约当(C·Jordan,1838 ~ 1922年)发表著