线性代数引论

[匈] I. FARKAS 和 M. FARKAS 著

潘鼎坤译

J41/91/23

北京师范大学图书馆

869119

人民教育出版社

本书是根据匈牙利出版的 IRENE FARKAS 和 MIKLOS FARKAS 合著《线性代数引论》(INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA) 1975 年版译出。

本书可供高等学校理工科各专业学生作为教学参考书，也可供科技人员参考之用。

线性代数引论

[匈] I. FARKAS 和 M. FARKAS 著

潘鼎坤 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.375 字数 170,000

1981 年 4 月第 1 版 1982 年 2 月第 1 次印刷

印数 00,001—16,500

书号 13012·0605 定价 0.66 元

译者的话

近三十年来由于电子计算机在各个科学技术分支中有着广泛应用和发展，线性代数这门课程就变得越来越重要了．它不仅是数学专业和计算数学专业的一门重要基础课，而且也已日益成为从事自然科学、工程技术和经济管理等方面教学科研技术人员的基础知识的一部分．本书写得很有特色．各个抽象数学概念的引出总是尽可能地从现实世界中的物理模型和实际经验出发，由浅入深，由具体到抽象，最后过渡到公理化体系的严谨论证，并且十分注意抽象概念的应用，介绍了一些重要的应用例题．本书篇幅不大，内容是相当丰富的．对向量代数、复数、行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、欧氏空间、线性算子、二次型以及近世代数中的一些基本概念(如群、环，域等)都作了简明扼要的阐述．几乎所有定理都给出了严谨的证明．线性代数中有一些概念，初学者常常混淆不清，每每引起这样那样的疑问，作者对此十分注意，总是十分细致地指出各个概念的各自特性以及它们之间的区别．例如在笛卡儿直角坐标系中，空间中的一个点的三个坐标和它的位置向量的三个坐标虽然是相同的，但又明确指出点和它的位置向量是不同的东西，并说明了理由．又如平面向量与复数，行列式与矩阵等等之间的相互联系和相互区别都作了清楚的解释．又如为什么不规定向量的除法运算？矩阵、矩阵乘法、线性空间、线性映射等等概念(或运算)的实际背景是什么？对这样一类容易产生的疑问，无不详加说明．每章之后，还精选了相当数量的习题，做了这些习题，更能加深对本书基本内容的了解．每个习题都给出了答案．一些较困难的习题还给出了提示．译者认为这本书是两位原作者

对本门课程的丰富教学经验的总结，解决初学线性代数的读者容易产生的疑问和困难．凡具有我国高中毕业水平并具有一定毅力的人便可阅读本书，困难不大．所以，本书既可作为理工科大专学生的教学参考用书，也便于在职科技人员自学．

笔者在翻译过程中改正了原书中不少错误，为了行文简洁，没有一一加以指明．这里特别要指出的是，人民教育出版社的编辑同志在整理译稿付印过程中做了十分认真细致的工作，并帮助改正原书及译稿中一些错误，译者在此表示衷心的感谢．但由于译者水平有限，错误仍恐难免，谨请读者多多批评指正，不胜感激．

译者写于西安

1981 年

引　言

本书打算成为一本名符其实的引论．它是为攻读数学、自然科学或工程科学的一年级大学生编写的，不要求读者具有超过高中知识的基础。它可作为一学期的线性代数课程的课本，可与讨论实数的数学分析同时并进。

线性代数方面已有几本好书，它们从公理出发定义群、域、线性空间等等，并接着去证明这些代数结构的主要定理．这好像不再需要同种类的其它课本了；但是我们认为：把初学者引向公理本身的途径多被忽略．本书第二位作者的讲义以及当前这本书的目标是要从实际经验着手来展示线性代数的发展——也就是，打算在本学科的具体代数结构(一部分在高中里教过)与公理化体系的论述之间建立桥梁．为了这个目的，我们走上了在一本严谨课本的开头使用了直观概念的危险途径．

因之，在第一章中，我们讨论了寻常空间中普通向量代数．这里向量是位移的直观概念的模型．除此以外，从开始，论述便是严谨的．这章内容被安排成为后面引进的抽象概念的模型．可用同样的理由来说明第二章中复数的内容，系着重于复数域中线性空间的结构．在第三章中给出了内容相当全面的初等矩阵代数并包括行列式的简明理论．这里，还讨论了一个更具体的线性空间的模型：有序 n- 数组的集合．(作者相信这个特殊结构必须在线性空间的抽象讨论之前学习，才可能使得向量的坐标表示没有含混之处．)第四章讨论线性方程组理论．在这里说明了解的集合的结构概况．我们希望，这对于学习例如线性微分方程和线性积分方程的读者将是有用的．在第五章中给出线性空间的公理化的定义，也讨论了欧氏空间的概念和性质。第六章考虑了把线性空间或欧

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

氏空间映射入自身的线性算子，其中着重于对称（自伴随）算子．线性相关和线性无关都被看作线性代数的基础概念，并且在本书所论及的各个不同课题中都起着主导作用．

全书课文划分成节，节的编号与章无关．在每一节中，将定义、定理（引理、推论被看作与定理本质上是同义词）、例题、公式以及图形等分别编号．例题构成完整理论的一部分．习题放在每章的末尾，每个习题的提示、答案或此二者都列在全书之后．证明的结尾用一点和一感叹号“.!”来标志．此外都使用标准的初等数学记号．例如 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素，$A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集．

我们对细心地阅读了本书的P. Rózsa教授所提的宝贵的批评与建议表示衷心感谢．

I. F
M. F 于布达佩斯

1974年5月

目　录

第一章　向量代数初步

1. 寻常空间中的向量. 初等运算

在力学或物理定律中出现的许多量，不能仅用一个实数来表示其特性．象位移、速度、力等量，只有当它们的大小以及它们的方向都已知时，才是确定的．例如，位移是指把空间中任意一点移动到其它一点的一种动作。为了表示一个位移 $\boldsymbol{x}$，它的“大小”（一个非负数）、“方向”（譬如说，用平行于位移的一直线来表示）和“指向”（沿直线移动的两个可能指向中的一个）都必须给出．空间中给定了有先后次序的任意二点 A 和 B，就准确地规定了一个由 A 移动到位置 B 的位移 $\boldsymbol{x}$．因此，这个位移在空间的任何点上都可以完成．反之，给出任意的一点 A 和一个位移 $\boldsymbol{x}$，便确切地确定了 A 沿 $\boldsymbol{x}$ 移动到的一点 B．相继发生的两个位移能用一个位移完成，后者叫做前二者之和．记住了位移的直观概念，我们就将讨论向量．

所谓向量 $\boldsymbol{x}$ 是由它的长（大小、绝对值）$|\boldsymbol{x}|$、方向以及指向所决定的，也就是说，由一个非负数、一条直线（表示平行于此直线的所有直线）、以及给定直线所指明的指向所决定的．如果两个向量的长、方向和指向都相同，便说此二向量相等（相同）．长是零的向量 $\boldsymbol{x}$，即 $|\boldsymbol{x}|=0$，叫做零向量并用 $\boldsymbol{0}$ 表示之．如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，便说此二向量平行（共线），$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$．如果存在一个平面平行于所有三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，便说这三个向量是共面的．

空间中任一有序点偶 (A, B) 确定一个且只有一个向量，用 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$ 表示之，它的长等于 A 和 B 间的距离，它的方向由 A 与 B（如 $A\neq B$）所决定的直线给出，它的指向是由 A 向 B．有序点偶 (A, A) 确定零向量 $\boldsymbol{0}=\overrightarrow{AA}$．零向量的方向和指向是不确定的．零向量被

看作平行于任何向量．由有序点偶(A, B)确定的向量$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$能用有向线段$AB$表示．此时，称$A$为向量$\boldsymbol{x}$的起点，而$B$称做向量$\boldsymbol{x}$的终点．在图中，这个有向线段用顶点在$B$处的箭头来表示．

任意一点A和任意一个向量$\boldsymbol{x}$确定了一个且只有一个点B，即，通过点A沿向量$\boldsymbol{x}$的方向作一直线，并且在此直线上自点A出发依照$\boldsymbol{x}$所确定的指向，作出离点A的距离为$|\boldsymbol{x}|$的直线段的不同于A的端点B．显然，$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$．

有向线段AB(它被固定在点A和A, B所确定的直线上)可以表示向量$\overrightarrow{AB}$，但不恒等于它．向量$\overrightarrow{AB}$能用由AB通过平行位移所得的任一有向线段来表示．如果A，B和C是任意点，$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$，且由$C$和$\boldsymbol{x}$所确定的点是$D$(即$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{x}$)，那末，自然有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$．有时必须固定一个向量于一已知点．这就是为什么把最后的恒等式有时被解释为向量$\overrightarrow{CD}$是把向量$\overrightarrow{AB}$由点A到点C作平行位移所得的缘故．事实上，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$当然是相同的向量．

由平行四边形的基本性质知，如果

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}, \quad 则 \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD} \tag{1.1}$$

(见图 1.1)。

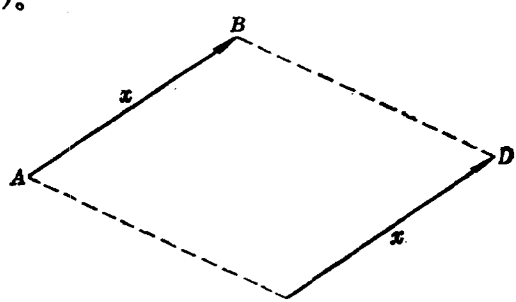

图 1.1

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个任意向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 间的角规定如下. 如果 A 是一任意点, 并且 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$, 则 $\alpha=\angle BAC$. 显然 α 不依赖于点 A 的选取并且 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. 如果两个向量间的角等于 $\pi/2$, 那末我们说这两个向量是正交的(垂直的). 零向量与任一其它向量间的角是不确定的. 零向量被看作与任一向量都正交.

定义 1.1 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量而 A 是任一点. 分别用 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 和 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ 确定点 B 和 C. 于是向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和, 并用 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示之.

今说明 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和与 A 的选取无关. 命 A' 是一任意点, B' 和 C' 分别用 $\overrightarrow{A'B'}=\boldsymbol{a}$ 和 $\overrightarrow{B'C'}=\boldsymbol{b}$ 确定之. 由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ 和 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$, 所以由(1.1), $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ 和 $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$, 亦即 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$. 再用(1.1)便得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

向量的和中的项叫做这和的分量, 而这和有时叫做分量的合量. 由定义 1.1 和简单的几何事实, 立知向量加法适合下面的定律. 加法是可换的, 亦即, 对于任意两个向量,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}. \tag{1.2}$$

(见图 1.2, 这图同时说明了所谓平行四边形法则。)加法是可结合的, 亦即, 对于任意三个向量,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \tag{1.3}$$

反复运用恒等式(1.2)和(1.3), 我们看到, 如果有限个向量之和的分量, 相互交换或重新结合, 其和不变. 一个向量, 如加以零向量, 保持不变, 亦即, 对于任一向量 $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}. \tag{1.4}$$

给定向量 $\boldsymbol{a}$, 我们用 $-\boldsymbol{a}$ 表示适合

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{1.5}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

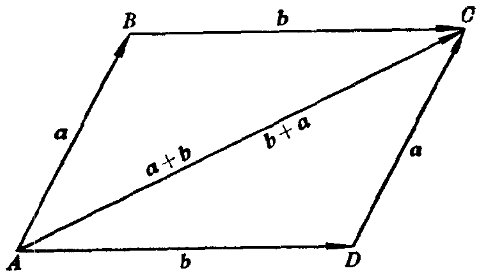

图 1.2

的向量，$-\boldsymbol{a}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

设 A 是任一点；如果 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，那末显然 $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 有同样的长和同一方向，但它们的指向是相反的.

定义 1.2 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量；它们的差规定为如下的向量

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1.6}$$

因三角形二边之和大于或等于第三边，故对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，由定义 1.1 便立刻得到基本的三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{1.7}$$

（见图 1.2）.（1.7）的一个简单结果是不等式

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \tag{1.8}$$

成立，因对于任意 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{b}=(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a};$$

于是由（1.7）有

$$|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{b}|\leqslant|-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|,$$

或

$$-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$$

而后一不等式相当于(1.8).

由图1.3可见，如P是任一点且$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，那末$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$.

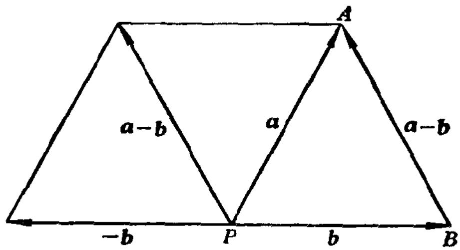

图 1.3

如果我们要强调：一(实)数不是一个向量，我们说它是一个数量.

定义 1.3 (数量与向量的乘法). 命$\lambda>0$是一数量而$\boldsymbol{a}$是一向量；$\lambda\boldsymbol{a}$是如下向量：它的长是$\lambda|\boldsymbol{a}|$，它的方向与指向跟$\boldsymbol{a}$的相同. 命$\lambda<0$是一数量而$\boldsymbol{a}$是一向量；$\lambda\boldsymbol{a}$是如下向量：它的长是$|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向与$\boldsymbol{a}$的相同，而它的指向与$\boldsymbol{a}$的相反. 最后$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

显然，向量$(-1)\boldsymbol{a}$是$\boldsymbol{a}$的反向量，亦即，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

如果 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，那末向量

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

叫做$\boldsymbol{a}$的单位向量，它的方向与指向跟$\boldsymbol{a}$的相同，而

$$|\boldsymbol{a}^0|=\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1.$$

由定义1.3，显然有下一定理：

定理 1.1 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$的充分必要条件是$\lambda=0$和$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$至少有一个成立.

数量与向量的乘法适合下面的规律（λ,μ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别是任意的数量与向量）：

$$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda \qquad \text{（交换性）} \qquad (1.9)$$

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\mu\boldsymbol{a} \qquad \text{（结合性）} \qquad (1.10)$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \qquad \text{（分配性）} \qquad (1.11)$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \qquad \text{（分配性）} \qquad (1.12)$$

(1.9)是一约定. (1.10) 是定义 1.3 的一个明显的结论. 分配律(1.11)与(1.12)应当予以证明, 但是, 分别看图 1.4 和 1.5 来代替形式的证明.

定理 1.2 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 和 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$ 那末 $\lambda=\mu$.

证 由给定条件有 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 亦即, 由(1.11), $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 于是由定理 1.1 便得我们的命题. ▌

定理 1.3 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是：其中一个是另一个的数量倍数.

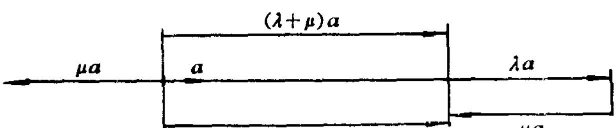

图 1.4

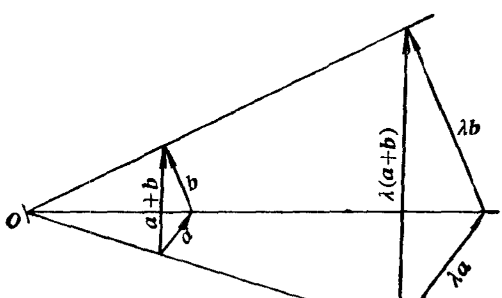

图 1.5

证 条件是必要的. 命 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 并设: 譬如说, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 那末, 按照它们的各自指向的两个可能情形, 或者 $\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{b}^0$ 或者 $\boldsymbol{a}^0=-\boldsymbol{b}^0$, 其中 $\boldsymbol{a}^0$ 和 $\boldsymbol{b}^0$ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量. (如果 $\boldsymbol{a}$ 是零向量, 那末 $\boldsymbol{a}^0$ 看作是用这两个方程中任一个来定义的。)在第一种情形中,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^0|\boldsymbol{a}|=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}.$$

在第二种情形中,

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}^0|\boldsymbol{a}|=-\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}.$$

最后如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 那末 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}$. ! ①

对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意的数量 λ_1,λ_2, 向量 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 显然是共面的, 因若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PB}$ 以及 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PC}$, 那末, P,A,B,C 诸点都在同一平面上. 这个命题的逆命题实质上就是下一定理.

定理 1.4 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行, 而 $\boldsymbol{v}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共面的任一向量, 那末存在唯一的有序数偶 (λ_1,λ_2) 使得

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}, \tag{1.13}$$

或者, 换句话说, $\boldsymbol{v}$ 是被唯一地确定的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的"线性组合".

证 在证明适合(1.13)的 λ_1 和 λ_2 的存在中, 将利用几何的依据. 命 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PB}$, 而 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PV}$. 由于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都不是零向量(它们不平行), 点 P, A 和 P, B 分别确定一直线. 过点 V 作二直线分别平行于 PA 和 PB. 经过 V 平行于 PA 的直线交直线 PB 于点 B_1; 经过 V 平行于 PB 的直线交直线 PA 于点 A_1. 依照平行四边形法则 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}$(见图 1.6), 再据定理 1.3, $\overrightarrow{PA_1}=\lambda_1\boldsymbol{a}$ 和 $\overrightarrow{PB_1}=\lambda_2\boldsymbol{b}$. 因之, (1.13)成立.

---

① 由向量与数量的乘法定义, 便立知本定理条件的充分性——译者注.

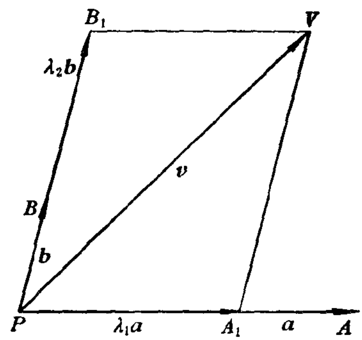

图 1.6

我们间接证明 (1.13) 中的有序数偶是被唯一确定的. 假设, 除(1.13)外, 我们又有 $\boldsymbol{v}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$. 那末

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b},$$

或者

$$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{a}=(\mu_2-\lambda_2)\boldsymbol{b}.$$

如果 $\lambda_1\neq\mu_1$, 那末

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mu_2-\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1}\boldsymbol{b}$$

必将成立. 这将意味着 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 它与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的基本假设矛盾. 如果假设 $\lambda_2\neq\mu_2$ 会得到同样的矛盾. 因此, $\mu_1=\lambda_1$, $\mu_2=\lambda_2$. ‖

在前面的定理中, 我们考虑了共面向量, 亦即, 平行于同一平面的向量. 这结果常常称之为: 两个不平行向量张成它们的平面. 关于空间中的向量有一类似定理, 即

定理 1.5 如果向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不平行于同一平面, 而 $\boldsymbol{v}$ 是一任意向量, 那末, 存在唯一的有序三数组 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}. \tag{1.14}$$

或者, 换言之, $\boldsymbol{v}$ 是被唯一地确定的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的"线性组合".

证 利用前面的定理, 首先证明适合(1.14)的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的存在. 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 它们中没有一个是零向量, 并且其中没有两个

是平行的．命 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PB}$, 且 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PV}$．点 P, A, B 不是在一直线上，因之，它们确定一平面．经过点 V 画一直线平行于向量 $\boldsymbol{c}$．因后一向量不平行于 PAB 平面，这条直线交 PAB 平面于点 Q．显然 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QV}$．向量 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是共面的，于是由前面的定理，$\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$．另一方面，向量 $\overrightarrow{QV}$ 平行于 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，于是由定理 1.3，$\overrightarrow{QV}=\lambda_3\boldsymbol{c}$．因而(1.14)成立(图1.7)．

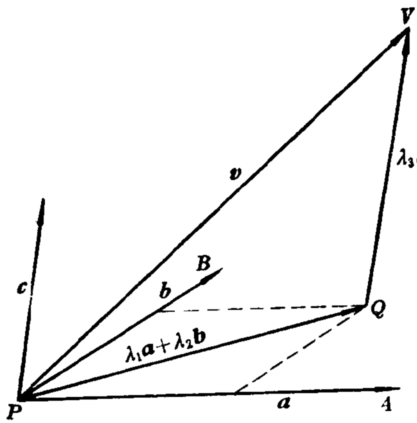

图 1.7

为了证明线性组合(1.14)的唯一性，除了(1.14)外，假定又有 $\boldsymbol{v}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}+\mu_3\boldsymbol{c}$．那末

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}+\mu_3\boldsymbol{c},$$

或

$$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{a}+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{b}+(\lambda_3-\mu_3)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

如果，例如，$\lambda_1\neq\mu_1$，则

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mu_2-\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1}\boldsymbol{b}+\frac{\mu_3-\lambda_3}{\lambda_1-\mu_1}\boldsymbol{c}$$

将成立．这将表示 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面，得出矛盾．假设 $\lambda_2\neq\mu_2$ 或 $\lambda_3\neq\mu_3$ 可导出同样的矛盾．于是，$\mu_1=\lambda_1$, $\mu_2=\lambda_2$, $\mu_3=\lambda_3$．|

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com