

● 非线性科学丛书 ●

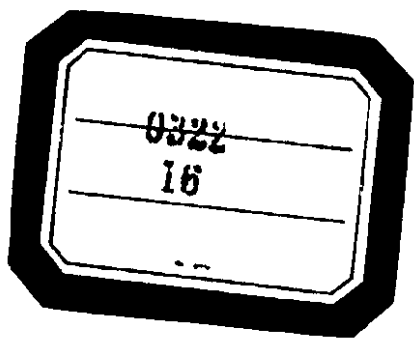
弱混沌与准规则斑图

汪秉宏 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助





1135822

非线性科学丛书

弱混沌与准规则斑图

汪秉宏 编著

郑伟谋 孙义燧 审阅

1135822



上海科技教育出版社



B1026703

内 容 提 要

本书是非线性科学丛书中的一种, 主要介绍退化哈密顿系统相空间的弱混沌结构随机网及其与自然界中各种准规则斑图的联系。全书分四章。首先阐述不可积哈密顿系统的随机层和随机网的有关概念和理论, 给出定量估计随机网厚度的方法。着重介绍共振扭转映射产生的均匀随机网, 讨论准周期网与准晶体对称铺砌的密切关系, 指出随机网的分形生长行为和粒子通过网的随机扩散模式。然后介绍各种准周期铺砌图案的动力学生成方法, 研究准对称斑图作为动力学组织的各种性质, 并介绍装饰艺术中的平面铺砌方法和生物体中的准晶体对称性。最后讨论流线斑图的对称性与混沌, 介绍拉格朗日湍流斑图及三维定态流随机网的解析研究进展。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读, 也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由郑伟谋、孙义燧审阅。

非线性科学丛书

弱混沌与准则斑图

汪秉宏 编著

郑伟谋 孙义燧 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号 邮政编码: 200233)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 188,000

1996年1月第1版 1996年1月第1次印刷

印数 1—3,200本

ISBN 7-5428-1209-2/O·89 定价: (精装本) 12.50元

711.1-1/15

Advanced Series in Nonlinear Science
Weak Chaos and Quasi-regular Patterns

Wang Bing-Hong

Department of Modern Physics,
University of Science and Technology of China
Hefei Anhui, 230026, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1995

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：（按姓氏笔画为序）

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20 世纪 60 年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了 80 年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

50年前, 爱因斯坦(A. Einstein)在给波恩的一封讨论客观世界完备定理的信中称: 他不相信有“掷骰子的上帝。”爱因斯坦对量子理论的概率解释始终不满意, 他生前一直企图为量子力学寻找一种与经典力学的更为直接的类比。尽管爱因斯坦在1917年也发现经典不可积系统的量子化困难, 但他认为量子力学本质上仍然如经典力学那样是描述决定论性的过程, 其中并不存在必须使用概率方可描述的不确定性。

然而, 时至今日, 再也没有人会对于即使在少自由度的经典力学系统中也存在混沌一事感到惊讶了。人们普遍认识到: 简单规则的反覆作用, 结果可以是一片混乱; 在完全受严格确定性规律支配的地方, 可以出现随机的统计规律性; 没有任何随机力的决定论性保守系统, 竟会表现出无规、复杂的随机运动。人们把这些现象称之为“决定论性混沌”。

“决定论性混沌”并不是一个自相矛盾的术语。在宏观层次上, 我们确实生活在一个既是决定论性的又基本上是随机性的世界中。决定论性, 是由于经典轨道的存在性和唯一性。随机性, 是由于一条混沌轨道可以与掷钱币一类随机过程完全对应。决定论性混沌就是决定性规律所产生的随机行为, 是可以用不包括任何随机项的微分方程或简单映射所描述的复杂的不可预测现象。一个动力学系统呈现出混沌现象, 既不是因为系统受环境的外噪声源的影响, 也不是由于无穷多自由度的相互作用, 更不是与量子力学不确定性有关。动力学规则的非线性, 是混沌运动存在的必要条件。非线性系统的内在对称性, 又赋予混沌行为以某种结构与秩序。混沌行为的一个重要特征是系统对于初始条件的敏感依赖

性: 初始近邻的两条轨道将在一个有限的相空间中迅速分离, 分离的程度将随时间按指数规律增长.

非线性系统对于初始条件的敏感性向人们提出如下问题: 如何数学化地确定混沌的概念, 并对其性质进行定量描述? 能否判别一个给定的决定论系统是否呈现混沌? 混沌的存在, 对系统行为的长时间预测意味着什么, 亦即我们能从混沌信号中提取系统的哪些信息?

为了回答这些问题, 人们必须明确地定义混沌, 阐述并证明混沌的动力学与拓扑性质, 发现和指出混沌的各种普适规律性, 讨论和揭示混沌对于经典动力学以及量子动力学的意义. 现代非线性动力学把解决这些问题作为它的研究目标.

其实, 人类对于动力学混沌的认识可以追溯到上一世纪末. 法国数学家与哲学家庞卡莱(J. H. Poincaré)早在一百年前就指出^[1], 若一系统的哈密顿量为

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}),$$

其中 $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ 为作用-角变量, 都是 N 维矢量, $H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ 对于各个 θ_i 是周期函数($i=1, \dots, N$), 并且其亥赛(Hesse)矩阵行列式不恒等于0,

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_j \partial I_k} \right| \neq 0,$$

那么, 除哈密顿量 $H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$ 本身之外, 不存在其他解析、单值, 关于 $\boldsymbol{\theta}$ 为周期函数的运动积分

$$J(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = \sum_n \varepsilon^n J_n(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}).$$

这是不可积系统概念的最早提出. 基于这一概念, 庞卡莱开创了对相空间中动力学全局性问题的定性研究, 并首先将拓扑分析方法和分歧概念引入动力学. 到了20年代, 范德波(B. van der Pol)对弛豫振荡进行了广泛研究, 导致力学奇异微扰论的发展; 安德鲁诺夫(А. А. Андронов)则把结构稳定性概念引入运动方程的研究之中. 在50年代, 由柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)提出, 莫斯

科大学的阿诺尔德(B. И. Арнольд)和纽约大学库朗数学研究所的摩泽(J. Moser)独立证明的 KAM 定理, 是对不可积哈密顿系统渐近动力学行为研究的一个重大突破^{[23]~[17]}. 对于一个可积系统施以弱扰动时, 那些频率可公度的不变环将破裂, 然而大多数频率非公度的不变环将仅仅发生形变而不破裂^[8]. 在 50 年代末, 柯尔莫哥洛夫和西奈(Я. Г. Синай)开始用动力学熵与混合的概念刻画破裂不变环邻域的混沌行为. 阿诺尔德研究猫映射, 斯梅尔(S. Smale)提出“马蹄映射”, 对混沌的出现作拓扑学的形象说明^{[9]~[16]}. 1963 年美国气象学家洛仑兹(E. N. Lorenz)首先对一个液体热对流简化模型的混沌行为进行了数值的分析. 次年, 法国天文学家依依(M. Hénon)亦以计算机证实一个自由度为 2 的自治哈密顿系统随能量之增加, 其轨道在能面相空间中的分布越来越随机. 自此之后, 人们发现越来越多的动力学系统中都存在混沌. 70 年代末, 美国人菲根鲍姆(M. J. Feigenbaum)发现倍周期分岔现象的标度行为, 并用重正化群方法证明其普适性, 计算出普适的标度常数. 这一工作大大激发了物理学家对于非线性动力学的研究兴趣. 80 年代初, 卡丹诺夫(L. P. Kadanoff)、格林(J. M. Greene)、麦开(R. S. MacKay)、菲根鲍姆和埃斯康德(D. F. Escande)等人把动力学的重正化方法推广到保守系统普适行为的研究上^{[17], [18]}. 最近 20 年来, 对于哈密顿系统的内在随机性与一般系统的动力学混沌的研究热潮方兴未艾, 关于混沌中的结构、随机性之有序以及复杂性中的普适规律, 人们不断有新奇的发现.

虽然发生混沌的实际系统大多数都属于耗散系统, 但是保守系统中为何存在随机现象的问题具有更基本的物理学意义. 人们期望, 对于不可积保守系统的研究所揭示的作为系统内禀特性的丰富复杂的相空间结构和奇异随机的动力学行为, 将能够使我们弄清楚宏观不可逆性的真正起源. 事实上, 对于哈密顿系统长期行为的研究, 将回答如下一些重要问题: 太阳系是否稳定? 怎样避免

加速器中的粒子束弥散? 流体如何从层流转变为湍流? 哈密顿系统的内在随机性是否强到足以解释统计力学理论的各态历经假设? 在上述意义上, 哈密顿系统动力学可以看作非线性力学、非线性物理乃至整个非线性科学的理论基础. 对于哈密顿系统中混沌的研究所形成的新概念、新方法和所发现的新现象、新定律, 必然要被其他众多的涉及非线性问题的学科领域所吸收、发展、验证和应用.

不可积哈密顿系统的相空间中, 一般都包含有无规运动区域. 这类无规运动是需要采用统计描述的扩散过程. 人们首先对于奇里科夫标准映射作为周期驱动单自由度振子这一简单模型的相空间扩散进行了细致研究. 由于能面相空间的低维性, 不变 KAM 环面的存在, 使得相空间中的全局性扩散仅当扰动强度超过某一阈值才可能发生. 全局性扩散的起始是一种普适的临界现象. 高于阈值扰动下的全局扩散意味着振子能量的无限增长, 振子的动量变化表现为粒子在相空间中的随机行走. 若设 p_n 为 n 个驱动周期之后的振子动量, 则导致此种扩散的平均能量渐近地随时间线性增长, 即按 $\langle p_n^2 \rangle \propto n$ 这一幂律增长, 平均是相对于初始条件的某个系综所取的.

在多于 2 个自由度的哈密顿系统中, 无规运动的相空间区域将连通成一个张满全相空间的网络. 这意味着对于任意弱扰动, 全局性的扩散都是可能的. 这种扩散称为阿诺尔德扩散, 反映了保守系统中有序与混沌两种动力学性质的关联.

扎斯拉夫斯基及其同事在 10 年前首次发现周期性受驱的单自由度退化系统中也可以发生类似于阿诺尔德扩散的现象.^{[19]~[22]} 这类系统具有允许混沌存在的最低自由度(3/2), 然而其未扰动系统满足退化条件, 因而 KAM 定理不适用. 有序与混沌的关联可以在 3 维的能面相空间中构造具有准对称性的弱混沌网络结构. 这一网络张满于整个相空间, 称为随机网. 最简单的例子是一个受到周期性 δ 脉冲序列驱动的简谐振子, 其动力学可以约化为平

面上的一种保面积扭转映射 $\hat{M}$ 。当驱动频率与振子固有频率之比为有理数时, 随机运动的轨道可以在相平面上编织成一个无限大的通道网络——随机网。随机网可以构造平面上的一个复杂铺砌。粒子沿着随机网的扩散是与阿诺尔德扩散类似的输运过程。随机网的隧道宽度相对于扰动振幅是指数小量。对于几乎所有的有理频率比, 网的对称性是准周期的。

粒子沿随机网的扩散和加速效应, 以及随机网结构特有的晶体对称性和准晶体对称性, 引起了人们对于随机网研究的极大兴趣。粒子的随机加速机制为高能宇宙射线的起源提供了新的可能解释。随机网结构的准规则性表明, 混沌的出现是几种不同的对称性(例如转动对称性和平移对称性)之间相互竞争中的普适性质。随机网的存在表明, 对称的决定论性规律与随机无规运动方式的结合可以是多种形式的。既可以表现为对于初始条件的敏感依赖性, 又可以产生超出人们想象的精致的对称或准对称结构。

扎斯拉夫斯基、萨格捷夫、扎哈罗夫(M. Yu. Zakharov)、邱尼可夫(A. A. Chernikov)、乌西科夫(D. A. Usikov)等人10年来对于随机网的拓扑结构和动力学性质进行了一系列研究, 并讨论了与此相关的粒子加速效应。美国康奈尔大学的朗柯帕(D. W. Longcope)和舒丹(R. M. Sudan)在1987年从相对论性力学考虑, 指出了随机网的有界性与粒子加速能量存在极限^[23]。2年后, 美国加利福尼亚州大学洛杉矶分校的卡里马巴弟(H. Karimabadi)和安格鲁普罗斯(V. Angelopoulos)又进一步考虑了任意极化的斜向传播波与带电粒子的相对论性相互作用, 证明某些波包仍能通过2维阿诺尔德扩散给予粒子无限加速^[24]。加利福尼亚州大学伯克利分校的列西腾堡(A. J. Lichtenberg)和沃特(B. P. Wood)则研究了外噪声对于粒子沿网的扩散速率的影响, 发现粒子沿随机网的扩散存在两种空间和时间的特征尺度^[25]。在网结构方面, 扎斯拉夫斯基等人把他们所提出的共振扭转映射 $\hat{M}_q$ 用作为任意 q 阶准对称平面铺砌的生成算符, 并应用于流体力学

中的流线斑图及固体中原子排序的准周期铺砌等问题的研究^{[28]~[29]}.

西瓦格尔(M. Schwägerl)和克鲁格(J. Krug)在1991年提出另一种产生相空间随机网的机制.^[30]他们研究平面上的一个单参数逐段线性连续保面积映射族. 对于这一类保守系统, KAM定理同样不适用. 相应于一个无穷的离散参数值集合, 同样可以发现张满全相空间的无限大随机网的存在. 然而, 这一类随机网中输运幂律不同于扎斯拉夫斯基等人所提出的受驱退化系统的随机网输运, 其输运粒子的能量随时间按 t^α 律增长, 其中 $\alpha < 1$, 称为亚扩散输运. 采用一种马可夫模型对相空间扩散进行分析, 可以得到 $\alpha = 2/3$.

关于随机网的准周期结构的研究, 洛文斯坦因(J. R. Lowenstein)于1994年提出了将 q 阶随机网映射 $\hat{M}_q$ 延拓到 q 维空间中的新方法.^[31]例如对于五阶随机网, 可以构造五次迭代映射 $(\hat{M}_5)^5$ 的具有所谓容许限度 ε 的准中心的不动点格子. 利用这一格子在五维欧氏空间中的周期性, 可以使用收敛迭代算法以任意精度确定准中心的位置, 从而画出五阶网的衍射斑图. 在目前, 随机网问题仍然是一个活跃的研究课题.^{[30]~[34]}

本书就哈密顿系统中的随机层、随机海和随机网问题作一介绍和评述, 着重介绍随机网的概念和分析方法, 以及与之有关的弱混沌、随机扩散输运和准规则斑图等问题. 本书主要取材于以上研究者的文献和著作, 也包括了著者本人的一些研究工作.

少自由度保守系统中混沌的发现, 已经扭转了传统科学中对于决定论一边倒的倾向. 自诩为混沌传教士的福特(J. Ford)针对爱因斯坦的名言说: “上帝的确是在掷骰子, 但骰子是灌了铅的.” 约翰·惠勒(J. Wheeler)认为, 科学的任务乃在于确定自然之骰的非均匀性, 弄清楚它是按照何种规则被“灌铅”的. 以不可积系统为研究对象的现代哈密顿动力学所揭示的新的物理现象与定律包括关于哈密顿系统中随机网与随机扩散的研究所获得的新结

果，也许对于确定自然之骰的非均匀性和洞悉其被“灌铅”的规则有所裨益。把隐藏于万物复杂性之中的各种普适规律及其本性挖掘出来，将使我们对于宇宙发展的倾向性有更深刻的理解。

Abstract

Stochastic web as a weak chaos structure in phase space of degenerate Hamiltonian system and its connection with various quasi-regular patterns in nature are studied. The basic concepts, theory of stochastic layer and stochastic web of non-integrable Hamiltonian system are introduced. The quantitative determination method of the width of stochastic web is given. The uniform stochastic webs generated by resonant twist mapping and the close relation of quasi-periodic web with quasi-crystal symmetrical plane tiling are discussed in detail. The fractal growth behaviour of stochastic web and particle's diffusion patterns along web channel are pointed out. The dynamical generating methods for varied patterns of quasi-periodic tiling are expounded, the various characteristics of quasi-symmetrical patterns as dynamical-organization are investigated. The plane tiling techniques in ornamental art and quasi-crystal symmetry among biological objects are presented. The symmetry and chaos of stream line patterns are also discussed. The advancement of analytical study for Lagrangian turbulence patterns and stochastic webs constructed by three-dimensional steady-state stream lines are reported. Readership includes graduate students, postdoctoral fellows, and practitioners in physical and engineering sciences.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第1章	随机层与随机网	1
§ 1	单摆系统的轨道解	1
§ 1.1	可积系统	1
§ 1.2	单摆的相轨图	2
§ 1.3	界轨运动的速度孤子	3
§ 1.4	捕获轨道和非捕获轨道解	4
§ 1.5	单摆的非线性参数	6
§ 1.6	平面波场中的粒子运动	8
§ 1.7	单摆运动的傅里叶谱展开	9
§ 1.8	速度谱的截断模数	10
§ 2	受驱单摆的随机层	12
§ 2.1	随机层概念的提出	13
§ 2.2	受驱单摆	13
§ 2.3	界轨邻域映射	14
§ 2.4	随机性起始判据	16
§ 2.5	零级能量变化	16
§ 2.6	受驱单摆的随机层厚度	18
§ 2.7	双极势驱动单摆	20
§ 2.8	非重叠共振的弱相互作用	21
§ 2.9	多波场中的粒子运动	22
§ 3	标准映射的随机层	23
§ 3.1	脉冲驱动转子	23