矢量与笛卡尔张量

彭乐生　编

上海交通大学出版社

矢量和笛卡尔张量

彭乐生 编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

按照张量的观点先叙述矢量代数和矢量分析，进而介绍直角坐标系中的张量运算。本书叙述时从直观的几何概念出发，最终归结为严格的张量体系。

本书特别注意阐明传统矢量符号与近代张量符号之间的联系、矩阵在张量运算中的应用、以及张量在力学中的应用等内容。书中还选编了一定数量的例题与习题。

可供理工科大学生作为教材使用，也可供工程技术人员学习和参考。具有微积分和理论力学知识的读者都能阅读本书。

矢量和笛卡尔张量

出　版：上海交通大学出版社
（淮海中路1984弄19号）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：上海交通大学印刷厂
开　本：787×1092（毫米）1/32
印　张：3.375
字　数：75000
版　次：1989年12月　第1版
印　次：1989年12月　第1次
印　数：1－1700
科　目：203-288
ISBN7－313－00567－9/O·29
定价：0.70元

前　言

本书是按照大学生学习力学的需要而编写的一本基础数学教材。众所周知，力学与数学的关系是十分紧密的。一方面，数学是力学的必不可少的工具，力学规律的精确描述和力学问题的求解都必须使用数学；另一方面，力学的进展又不断对数学提出要求，促进它的发展，产生出新的数学分支。有不少数学概念都是来源于力学，例如：数学分析的基本概念——微商——就有两个来源，一个是几何学中的“切线”，另一个就是力学中的“速度”，而微积分学和动力学则可以说是同时诞生的。力学的奠基人牛顿，同时也是微积分学的奠基人之一。

矢量既是几何量，也是力学量，矢量的英文名 vector 就有“运载”的意思。正是对力系的研究，促进了矢量代数的发展；正是对速度场和力场的研究，促进了矢量分析的发展。张量概念更是首先来源于力学，它的名称也反映了这一点：张量（tensor）这个词，就是由张力（tension）派生而来的。张量概念首先来源于力学，可是张量数学的发展和完善，却不是由于力学的贡献，甚至在相当长的时期内竟未受到力学界的重视。张量分析是伴随着黎曼几何发展起来的。在早期只有这一领域中的少数学者对它感兴趣，直到1915年，爱因斯坦发表了广义相对论，张量分析在他的论述中起了举足轻重的作用，这才受到物理界的广泛重视。

从50年代开始，力学的各个分支取得了很大发展，从而对数学提出了不少新的要求，于是，张量也开始进入工程力学的领域中。一种数学理论起源于力学，并经过相当长时间才被证明为有用，这也是数学发展史中常见的现象。其实，绝大多数

力学量都是张量，运用张量数学来处理力学问题，正符合事物的内在规律。近年来，张量在力学中的应用日益普及，这一情况也使传统的矢量数学得到了更新。

越来越多的力学著作现在都运用张量来叙述，尽管有的只不过是使用张量符号作为一种缩写工具而已。但是这样一来，不熟悉张量语言的读者就会感到很难阅读许多力学著作。为此我校首先在工程力学系中更新传统的矢量课程，将矢量纳入张量体系，开设了“矢量和笛卡尔张量”课程。本书就是根据这门课程的讲义整理编写而成的，它可供力学专业和与力学关系比较密切的专业选作教材用。

本书是一本有针对性的教材，而不是一本全面叙述张量分析的著作，正如书名所说，它只包括笛卡尔张量内容，书中的主要内容仍是矢量代数与矢量分析，但是从符号到方法都作了更新，内容更为充实。这门课程适合于安排在大学低年级讲授，以便为学习后续力学课程作准备。本教材的内容虽然有一定的范围限制，但仍保持较严谨的数学体系，并尽量介绍张量在质点动力学、刚体动力学中的应用以及在曲线几何中的应用。张量分析更为重要的应用是在变形体力学和曲面几何中，但是前者无法在大学低年级讲授，后者则超出了笛卡尔张量的范围，这些内容可安排在高年级学生的选修课，如“张量分析及其应用”课程中讲授。

将矢量纳入张量体系是本教材的特点，也是一种探索，它已经过了几届教学实践，被证明是行之有效的。但是新的探索总会有不完善之处，再加上作者水平有限，疏漏和错误在所难免，敬请读者指正。

作者于上海交通大学

1989.6

目　　录

第一章　矢量，它的定义、符号和方法

§1.1　标量、矢量和张量

某些物理量用1个实数就能描述，例如质量、温度。另有一些物理量，要用一组实数才能完全描述，例如力，除了要说明它的大小外，还必须说明它的方向，所以要用3个实数才能表达；又例如物体的转动惯量，在一般情况下需要用6个实数才能完全描述。质量是标量（scalar），力是矢量(vector)，转动惯量则是二阶对称张量。本章着重讨论矢量。

我们可以从3个不同的角度来讨论矢量：从几何角度来看，矢量是一条有向线段，它具有大小和方向两个特征；从解析的角度来看，矢量是一组有顺序的数，这一数组不仅取决于它所描述的矢量本身，而且与所选择的坐标系有关；在代数领域中，矢量被定义为线性空间的元素，所谓线性空间，是指能满足某种特定代数运算规则的集合。

以上对矢量的讨论是在不同的层次上进行的，其中几何方法最为直观，例如在力学分析中画示力图，就是用有向线段来表示力矢量的。但是用几何方法只能进行较为简单的矢量运算。稍为复杂一点的矢量运算，只用几何方法是无法进行的，必须借助于坐标用解析方法来进行。用解析方法还可以将矢量概念加以推广，从维数(dimension)上可以推广到多维空间，从阶数（order or rank）上可以由矢量推广到张量，从而将矢量运算与张量运算统一起来。本教材即是按照这一体系来编

写的。至于代数领域里的矢量概念，不仅可以从数组扩大到集合，还可以从实数域扩大到复数域。不过，这些内容已超出本课程的范围了。

§1.2 几何方法

按照几何方法，即图形的方法，可以用一根有向线段 $a\ b$ 来表示一个矢量。线段的长短表示矢量的大小，箭头表示它的方向（图 1-1），a 叫做始点，b 叫做终点。vector 这个词，就是由拉丁文“运载”（vectum）引伸而来的，中文则形象化地称为矢量，或简称为矢；也称为向量，意为有方向的量。

图 1-1

矢量符号在印刷时常用黑体字母来表示，例如 $\boldsymbol{A}$；手写时矢量符号不用黑体，可在字母上方加一个箭头以资区别，例如 $\vec{A}$。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小用 $|\boldsymbol{A}|$ 或 A 表示。

在本教材中，为了在课堂的黑板上书写和学生记笔记进一步提供方便，矢量一律用大写字母表示，标量用小写字母表示，因此手写时，矢量可以不加箭头也不会引起混淆，可以用 A 表示矢量，$|A|$ 表示其大小。书中有时也用 $\overrightarrow{ab}$ 表示矢量，用 $\overline{ab}$ 或 $|ab|$ 表示其大小。

矢量的大小恒取正值，称为矢量的模（magnitude）。模为零的矢量称为零矢，故 $\boldsymbol{A}=0$ 与 $A=0$ 等价。零矢没有确定的方向。现在对矢量的相等、加减、矢量与标量的相乘运算分别定义如下：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行且方向相同，模相等，则不论它们的

位置如何，可认为此两矢量相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$（图 1-2）。

（2）矢量的加法规定如下：设 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，将 $\boldsymbol{B}$ 的始点 a 与 $\boldsymbol{A}$ 的终点相接，由 $\boldsymbol{A}$ 的始点 o 到 $\boldsymbol{B}$ 的终点 b 作一矢量即为 $\boldsymbol{C}$。显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（图 1-3）。此法则称为矢量相加的三角形法则，它可以推广到多个矢量相加。$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可以由 $\overrightarrow{ob}=\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{oc}$ 得到，ob 是平行四边形 $oabc$ 的对角线，此称平行四边形法则，它与三角形法则是等价的。

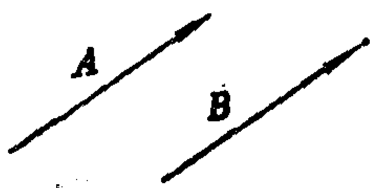

图 1-2

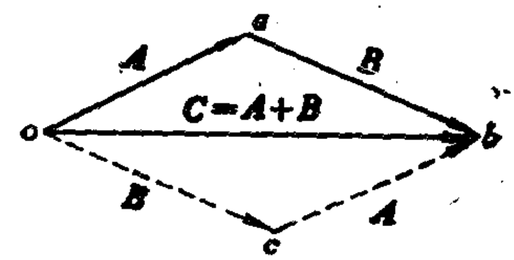

图 1-3

矢量是有向线段，但是能够用有向线段来描述的物理量并不一定都是矢量，这要取决于它是否符合矢量的加法法则（按照代数领域中的矢量定义，矢量的集合必须构成一个加法群）。设质点由 o 运动到 a，位移可以表示为有向线段 $\boldsymbol{A}$；又由 a 运动到 b，位移可以表示为有向线段 $\boldsymbol{B}$。两次运动的总位移可以表示为 $\boldsymbol{C}$，而 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，因此可以把位移看成矢量。又设在 o 点有两个力作用，一个是 $\overrightarrow{oa}$，一个是 $\overrightarrow{oc}$，由实验知合力为 $\overrightarrow{ob}$，而 $\overrightarrow{ob}=\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{oc}$，所以力也是矢量。物体转动的角位移虽也可以用有向线段来描述，但是不能用上述法则来求依次转动后的总的角位移，所以角位移不是矢量。

（3）若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 模相等，方向相反，可记为 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$（图 1-4）。称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的负矢或 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的负矢。如此又可以定义矢量的减法：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+$

$(-\boldsymbol{B})$。

(4) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与标量 m 相乘仍为一个矢量，记为 $m\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}m$。它的模为 $|m|A$，当 m 为正时，$m\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的方向一致；当 m 为负时，$m\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反。

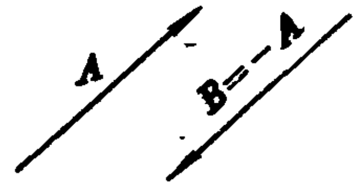

图 1-4

矢量加法满足交换律和结合律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$。

矢量和标量相乘，满足交换律、结合律和分配律：$m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}m$，$m(n\boldsymbol{A})=(mn)\boldsymbol{A}$，$(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$，$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$。

§1.3 矢量乘法

(1) 标积或点积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积定义为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$，其中的 θ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是一个标量，故称为标积。这里的乘法运算用点"·"表示，故亦称点积。点积满足交换律与分配律，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$。现在对点积满足分配律进行证明如下：

作 $\overrightarrow{oa}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{ob}=\boldsymbol{B}$，$\overrightarrow{bc}=\boldsymbol{C}$，则 $\overrightarrow{oc}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$（图 1-5）。

过 o 点作平面 s 垂直于 $\overrightarrow{oa}$。过 b 点和 c 点分别作 $\overrightarrow{oa}$ 的平行线与 s 相交于 b' 和 c'，再作 $bc''\,/\!/\,b'c'$ 并取 c'' 点在 cc' 线上，则有：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\overline{oa}\cdot\overline{cc'},\qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\overline{oa}\cdot\overline{bb'},$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\overline{oa}\cdot\overline{cc''},\qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\overline{oa}\cdot(\overline{bb'}+\overline{cc''})。$$

因 $\overline{bb'}=\overline{c''c'}$， $\overline{bb'}+\overline{cc''}=\overline{cc'}$，

所以 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\overline{oa}\cdot\overline{cc'}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

物体受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用经过位移为 $\boldsymbol{S}$ 时，则力 $\boldsymbol{F}$ 作的功 w 便是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的点积：$w=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}$。

（2）矢积或叉积

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢积定义为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}AB\sin\theta$，其中的 θ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，$\boldsymbol{U}$ 是一个单位矢量（模等于1的矢量），它垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若无特别说明，则根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{U}$ 构成右手系来规定 $\boldsymbol{U}$ 的方向（图 1-6），这里的乘法运算用"×"表示，故亦称叉积。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模 $AB\sin\theta$ 等于以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边所构成的平行四边形的面积，而 $\boldsymbol{U}$ 是垂直于这个四边形的单位矢，称为它的法矢。因此 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 也可看作是一个面积矢量。

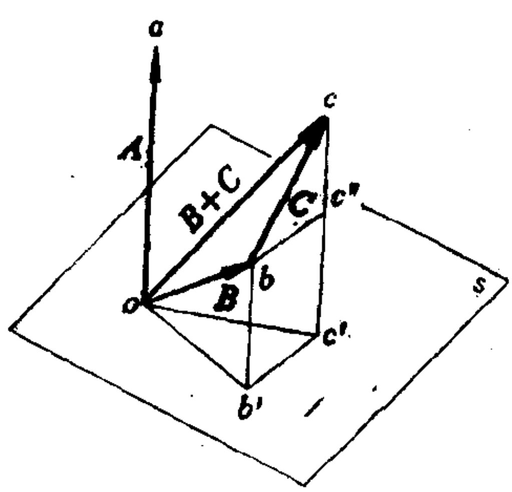

图 1-5

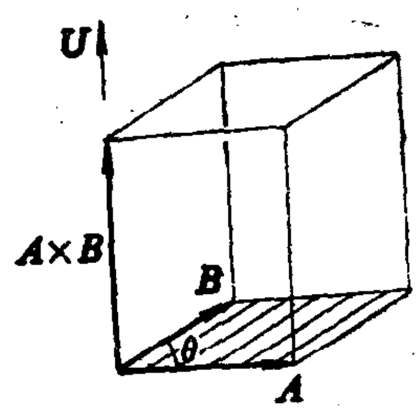

图 1-6

矢积不满足结合律，即 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 一般不成立；也不满足交换律，即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$一般也不成立。但是有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。矢积满足分配律：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}。$$

这个性质很重要，但它的证明很繁，留待用张量体系的解析方法来完成它。

设有力 $\boldsymbol{F}$ 作用在 a 点，则这个 $\boldsymbol{F}$ 对 o 点的力矩为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{oa}\times\boldsymbol{F}$（图 1-7）。

（3）并积或外积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的并积（亦称外积）记作 $\boldsymbol{AB}$，称为并矢（dyad），它是一个二阶张量。关于二阶张量的定义以及并积的具体运算，将在第三章中作详细的介绍，现在暂时将并矢 $\boldsymbol{AB}$ 当作一种符号看待，对它作直观的几何解释比较困难，但是可以通过它与矢量的运算规则来看出它的一些性质。并矢可以和矢量相乘，规定这种乘法按结合律进行：

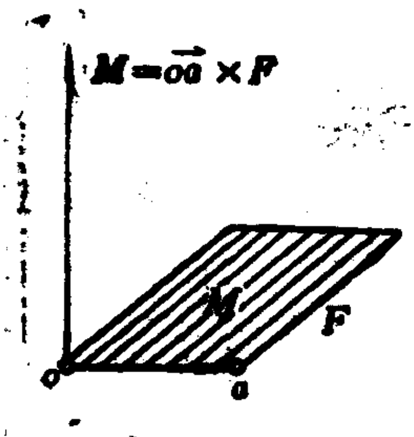

图 1-7

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B},\qquad(1.1a,b)$$

$$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}),\ \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}。(1.2a,b)$$

(1.1a,b) 式的右端为矢量，而 (1.2a,b) 的右端仍为并矢。

并积满足结合律和分配律，但不满足交换律，即

$$(m\boldsymbol{A})(n\boldsymbol{B})=mn(\boldsymbol{AB}),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},$$

但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 一般不成立。

综上所述，矢量有三种乘法：标积、矢积和并积，它们都有同一个重要性质——满足分配律。这是在代数领域中对矢量定义的一个基本要求，也是解析方法赖以建立的基础。矢量的这三种乘法都有其物理背景，否则，矢量乘法的定义似乎带有随意性。但不能将 $AB\sin\theta$ 也定义成另一种标积，因为它不满足

分配律。

（4）三矢相乘

两个矢量相乘的结果，可以是一个标量 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，可以是一个矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，也可以是一个二阶张量$\boldsymbol{AB}$。若干个矢量相乘时，实际上是逐次把其中的两个矢量相乘，使矢量的数目逐次减少，最后也化成为两个矢量相乘。三个矢量相乘称为三矢积或二重积（有的书上又称之为三重积），有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 三种形式。其中 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BC}$ 是一个与 $\boldsymbol{C}$ 平行的矢量；另外两个分别为标量和矢量，称为三矢标积和三矢矢积，都属于基本运算，必须熟练掌握。

由上述标积和矢积的定义容易推得，三矢标积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的绝对值，等于以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为棱边的平行六面体的体积（图1-8）。当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成右手系时，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 为正值，反之为负值。又容易验证 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$，据此可以引入一个新的符号 $[\boldsymbol{ABC}]$，定义为：

$$[\boldsymbol{ABC}]=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})。\tag{1.3}$$

它是一个标量，具有循环性质

$$[\boldsymbol{ABC}]=[\boldsymbol{CAB}]=[\boldsymbol{BCA}],\tag{1.4}$$

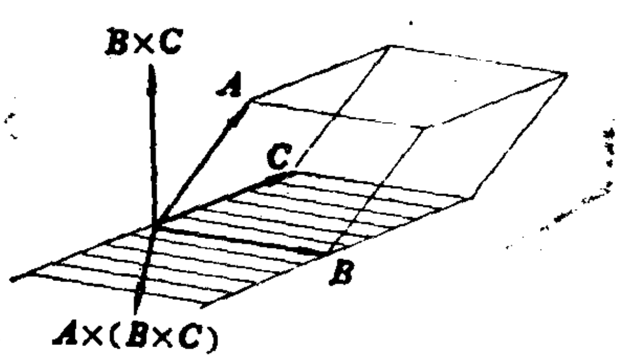

图 1-8

称此为循环公式，在矢量运算中应用很广。$[ABC]$ 还具有反对称性质

$$[\boldsymbol{ABC}]=-[\boldsymbol{CBA}]=-[\boldsymbol{BAC}]。\tag{1.5}$$

容易证明，循环性质已包括在反对称性质之中。

可以证明，三矢矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 满足

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})。\tag{1.6}$$

这称为分解公式，是矢量代数中一个重要的基本公式。因用几何方法来证明它很麻烦，故留待后面用解析方法来证明。这里先作一点解释：我们知道矢量 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 指向 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 所在平面的法向（图 1-8），而矢量 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 与矢量 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 互相垂直，所以必然处于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 所在的平面内，从而必定可以分解为 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的线性组合。

例 1.1　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为任意四个矢量，求证

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}[\boldsymbol{BCD}]+\boldsymbol{C}[\boldsymbol{DAB}]\\&=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{CDA}]+\boldsymbol{D}[\boldsymbol{ABC}]。\end{aligned}\tag{1.7}$$

解　考虑四矢相乘 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})$，令 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则利用分解公式（1.6）可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\\&=\boldsymbol{C}[\boldsymbol{DAB}]-\boldsymbol{D}[\boldsymbol{ABC}]。\end{aligned}$$

再令 $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$，可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{F}\\&=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{CDA}]-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{BCD}]。\end{aligned}$$

令这两式右端相等，移项后即得（1.7）式。该式说明：在三维空间中，任意四个矢量必定是线性相关的，其中任何一个都可以化为另外三个不共面矢量的线性组合，例如：

$$D=A\frac{[DBC]}{[ABC]}+B\frac{[ADC]}{[ABC]}+C\frac{[ABD]}{[ABC]}。\qquad (1.8)$$

这里还得强调指出，矢量不能用作分母，不能用作除数，上式中的分母都是标量。若 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=m$，$\boldsymbol{A}$ 和 m 已知，$\boldsymbol{B}$ 却是不确定的，不能从 $m/\boldsymbol{A}$ 来求出 $\boldsymbol{B}$。

§1.4 解析方法

以上介绍了几何方法。与之相应的符号称为黑体符号或 Gibbs 符号，也称为抽象符号。它的优点是直观，紧凑，运算简捷，而且不需要坐标系。抽象符号运算的最终形式是 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{AB}$ 和 $[\boldsymbol{ABC}]$，复杂形式最终必可化成这四种形式的组合。但是如果我们需要求出矢量运算的具体数量关系，用抽象符号和几何方法就不方便了。对于复杂的运算，用几何方法甚至可以说是无法进行的。抽象符号在某种意义上可以看成是一种算符，它提示人们进行某种运算，例如 $[\boldsymbol{ABC}]$ 是表示一个体积的值，但要具体算出它来，就应该借助于坐标系，用通常的标量数学运算来进行了。

(1) 坐标系和基 (basis)

最简单的坐标系是直角坐标系，即正交笛卡尔坐标系或简称笛卡尔坐标系（Cartesian coordinate system)。传统的坐标符号是 X、Y、Z，我们现在改用 x_1、x_2、x_3，以便适应于规范化的张量运算法则。

沿着坐标轴的正方向取 3 个单位矢量 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_3$，称为坐标系的基，有时也称基矢，但要注意它们并不满足矢量的严格定义；因为用黑体符号表示的矢量应该是与坐标系的选择无

关的，而 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$ 却取决于所选用的坐标系。根据例 1.1 的结论，任何一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$的线性组合，即

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{E}_1+a_2\boldsymbol{E}_2+a_3\boldsymbol{E}_3=\sum_{l=1}^{3}a_l\boldsymbol{E}_l, \tag{1.9}$$

式中的 a_l 称为 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{E}_l$ 方向的分量（component）。

空间一点 p 的位置，可以用矢量 $\overrightarrow{Op}$ 来描述（图1-9），$R(p)=\overrightarrow{Op}$ 称为 p 点的矢径（radius），它与 p 点坐标 x_s 的关系是

$$R(p)=\sum_{s=1}^{3}x_s\boldsymbol{E}_s。 \tag{1.10}$$

引入 Kronecker *delta* 符号 δ_{lm}，它的定义为：

$$\delta_{lm}=\delta_{ml}=\left\{\begin{matrix}1, & 当\ l=m \\ 0, & 当\ l\neq m\end{matrix}\right\}, \quad l、m=1、2、3, \tag{1.11}$$

则坐标和基有以下性质：

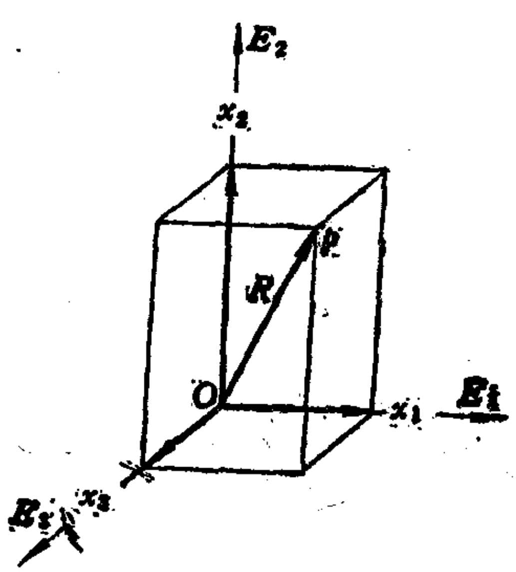

图 1-9